Toiminnallista matematiikkaa: Rosvo ja poliisi -peli

Meeri Viljanen
Tutkijakoulutettava
Helsingin yliopisto

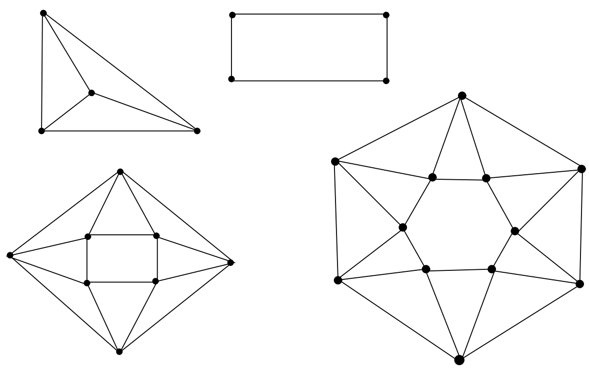
Sarjassa Toiminnallista matematiikkaa esitellään Summamutikka-matematiikkakerhoissa hyviksi havaittuja tehtäviä. Sarjassa esitetään tehtävät ratkaisuineen, annetaan neuvoja tehtävien ohjaamiseen ja valotetaan niiden matemaattista taustaa. Summamutikkakerhoja järjestävät LUMA-keskus ja Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitos pääkaupunkiseudun ala-asteilla. Lisätietoja Summamutikkakerhoista löytyy sivuilta: `http://mathstat.helsinki.fi/luma`.

Rosvo yrittää paeta kaupungista toiseen ympäri valtakuntaa. Häntä jahtaa lauma poliiseja helikoptereineen pystyttäen tiesulkuja rosvon reitille. Poliisien helikopterit ovat ketteriä ja radiopuhelimet alati käytössä, mutta onnistuuko rosvon silti löytää uusia pakoreittejä? Pitäisikö poliisivoimien palkata apuvoimia tai tehdä helikopterihankintoja? Pienen valtion poliisivoimat eivät saa rosvoa kiinni suurvallassa. Kuinka paljon poliiseja tarvitaan kussakin valtiossa?

Pelilaudat

Pelilauta on yksinkertaistettu valtio, matemaattiselta nimeltään verkko. Valtiossa on kaupunkeja (solmuja) ja niitä yhdistäviä teitä (särmiä). Pelinappuloina ovat yksi rosvonappula ja pelistä riippuva määrä poliisinappuloita. Rosvo on aina sijoitettuna jonkun pelilaudan kaupungin päälle, kun taas poliisit ovat sijoitettuina teiden päälle.

Pelilaudan voi tehdä piirtämällä verkon A3-paperille. Käteviä pelinappuloita ovat post it -laput, mutta mitkä tahansa nappulat, vaikka kivet ja kävytkin, käyvät.



Kuva 1: Kuvia erilaisista pelilaudoista eli verkoista.

Pelin päämäärä

Poliisipelaaja yrittää saartaa rosvonappulan. Saarto on onnistunut, kun rosvon kaupunkia ympäröivien teiden päällä on kullakin yksi poliisi, eli rosvo ei pääse liikkumaan yhtään tietä pitkin ulos kaupungista. Tällöin poliisit voittavat.

Rosvo on voittanut, jos tarpeeksi kauan pelattuaan pelaajat yhdessä päättävät, että poliisit eivät voi saartaa rosvoa.

Peli I

Pelissä on yksi parametri, poliisien lukumäärä p. Pelinappuloina ovat yksi rosvonappula ja p kappaletta poliisinappuloita. Pelin aluksi rosvopelaaja asettaa rosvonappulansa pelilaudalle johonkin kaupunkiin. Tämän jälkeen poliisipelaaja asettaa yhden poliisinappulan valitsemansa tien päälle. Peli jatkuu niin, että rosvopelaaja saa vuorollaan siirtää rosvonappulan mihin tahansa sellaiseen kaupunkiin, johon pääsee vapaita teitä pitkin. Rosvon täytyy siis välttää poliisin tiesulkuja. Rosvo voi myös tahtoessaan pysyä paikallaan. Poliisipelaaja voi vuorollaan lisätä uuden poliisin minkä tahansa tien päälle, ja kun kaikki p poliisia ovat jo pelilaudalla, hän saa siirtää yhtä poliisia valitsemansa tien päälle. Poliisit liikkuvat helikopterilla, joten heidän ei tarvitse välittää tiesuluista.

Peli II

Pelissä on kaksi parametria, poliisien lukumäärä p ja helikopterien lukumäärä h. Pelinappuloina on edelleen yksi rosvonappula ja p kappaletta poliisinappuloita. Peliä pelataan kuten peliä I, mutta nyt poliisivoimilla on yhden helikopterin sijasta käytössä h helikopteria. Vuorollaan poliisipelaaja voi asettaa laudalle tai siirtää laudalla yhteensä h:ta poliisinappulaa.

Keskustelua

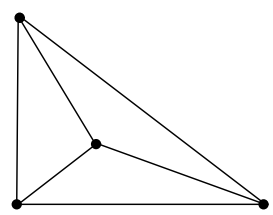
Peliä voidaan pelata ryhmissä niin, että puolet pelaajista pelaa rosvoa ja puolet poliisia. Välillä kannattaa vaihtaa osia. Ideana on kokeilla erilaisia pelilautoja ja erilaisia poliisien ja helikopterien määriä. Jos valtiossa on enemmän teitä, tarvitaan ehkä enemmän poliiseja rosvon saartamiseen. Jos valtiossa on yksikin kaupunki, jossa kohtaa neljä tietä, voiko kolmen poliisin voimin mitenkään saartaa fiksua rosvoa? Jos löydetään jokin riittävä määrä poliiseja rosvon saartamiseen, niin toki saarto onnistuu kaikilla tätä suuremmilla määrillä.

Oppilaiden on myös tarkoitus miettiä voittostrategioita sekä rosvolle että poliisille. Jos kustakin kaupungista lähtee neljä tietä, ja poliiseilla on käytössään kolme helikopteria, olisiko mahdollista saada aikaan sellainen tilanne, että kussakin kupungissa olisi ainakin yksi pakoreitti vartioituna? Tällaisessa tilanteessa rosvo voidaan aina saartaa seuraavalla vuorolla, sillä meni rosvo mihin kaupunkiin tahansa, voidaan kolme partiota siirtää jäljellä olevien pakoreittien päälle. Onnistuuko rosvon aina karata kaupunkiin, josta lähtevien vapaiden reittien määrä on suurempi kuin helikopterien määrä? Jos helikoptereita on käytössä vain yksi, poliisien tulee ehkä joukkovoimalla yrittää rajata rosvo jonkun pienemmän alueen sisään, josta sillä ei ole ulospääsyä, ja hitaasti hivuttaa rosvon oloa yhä tukalammaksi.

Kunkin verkon viereen voi pirtää valmiiksi talukon, johon on kirjattu poliisien ja helikopterien lukumääriä, ja johon tulee täydentää tieto siitä, kumpi pelaaja voittaa missäkin tilanteessa. Yksi pelilauta ja sitä vastaava täydennetty taulukko on piirretty kuvaan 2. Kullakin poliisien ja helikopterien määrällä kannattaa pelata muutamaan kertaan, jotta tiedetään, ettei voitto johtunut vain toisen pelaajan virheestä. Hienoa on, jos voittostrategia osataan päätellä joka tilanteessa.

Hauskaa on myös kokeilla verkkoja, jotka ovat eri näköisiä, mutta silti isomorfisia, kuten kuvassa 3. Voisiko tiedolla siitä, onko p poliisia ja h helikopteria riittävä määrä rosvon saartamiseen, päätellä jotakin valtion (siis verkon) rakenteesta?

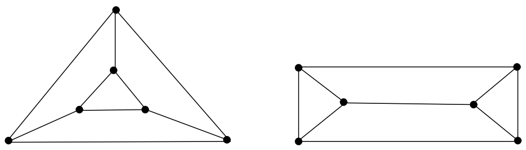
	2 poliisia	3 poliisia	4 poliisia
1 kopteri	rosvo	rosvo	poliisit
2 kopteria	rosvo	poliisit	poliisit
3 kopteria	rosvo	poliisit	poliisit



Kuva 2: Taulukkoon on kirjattu kummalla pelaajista on voittostrategia, kun peliä pelataan kuvan laudalla. Kahdella poliisipartiolla rosvoa ei voi saartaa, sillä kustakin kaupungista johtaa kolme tietä ulos. Jos kolmella poliisipartiolla on käytettävissään vain yksi helikopteri, on rosvon voittostrategia siirtyä aina sellaiseen kaupunkiin, josta pääsee

[1]Koska yksi poliisi voi olla kerrallaan vain kahden kaupungin vieressä, voi kolme partiota tukkia korkeintaan kuusi pakoreittiä kerrallaan, eli kaksi pakoreittiä korkeintaan kolmesta kaupungista. Aina on siis yksi kaupunki, josta pääsee pois kahta reittiä.

pois vähintään kahta vapaata reittiä[1]. Jos taas kolmella poliisipartiolla on kaksi kopteria, poliisit voittavat. Kolme partiota voidaan järjestää laudalle niin, että kustakin kaupungista on vähintään yksi pakoreitti suljettuna. Siirtyi rosvo tämän jälkeen mihin tahansa, se voidaan saartaa siirtämällä kaksi muuta partiota jäljellä olevien pakoreittien päälle. Neljä partiota voidaan asetella sulkemaan kunkin kaupungin ulostuloista kaksi. Tämän jälkeen rosvon saartamiseen riittää yksikin kopteri.



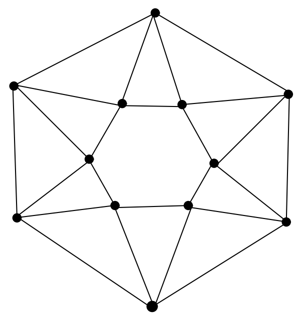
Kuva 3: Kuvan kaksi verkkoa ovat erinäköiset, mutta kuitenkin isomorfiset. Tämä tarkoittaa sitä, että jokaiselle somulle vasemmalla olevassa verkossa voidaan löytää yksikäsitteinen vastinsolmu oikealla olevassa verkossa siten, että vasemmalla kahden solmun välillä on särmä jos ja vain jos niiden vastinsolmujen välillä on särmä.

Timanttipeli

Esittelen tässä esimerkin vuoksi vielä yhden vaikeamman pelilaudan. Kuvassa 4 on esitelty timanttipelilauta ja voittotilanne eri poliisien ja helikopterien määrillä. Kolmella poliisilla ei selvästikään voida rosvoa saartaa, sillä jokaisesta kaupungista lähtee neljä tietä. Samoin jos poliisivoimilla on käytössään neljä helikopteria ja neljä poliisipartiota, voidaan rosvon kaupunki aina saartaa välittömästi. Minkälaisia voittostrategioita pelaajilla on muissa tilanteissa? Seuraavassa on muutamia näkökohtia ongelmaan, vaikkakin yksityiskohtaiset matemaattiset perustelut sivuutetaan.

Nokkela poliisipelaaja voi huomata, että kuudella partiolla pelilauta voidaan jakaa kahteen osaan siten, ettei rosvo pääse puolelta toiselle. Tutkitaan tapausta, jossa poliisivoimilla on kuusi partiota ja kaksi helikopteria. Poliisien voittostrategia on jakaa lauta ensin kahtia niin, että kummallekin puolelle jää kuusi kaupunkia, eikä rosvo pääse puolelta toiselle. Tämän jälkeen poliisit voivat kahta partiota vuorollaan siirtäen rajata rosvon alaa yhä pienemmäksi ja pienemmäksi. Jos helikoptereita on vain yksi, tämä ei onnistu, sillä yhtä partiota siirrettäessä syntyy väkisin reitti toiselle puolelle. Yhden kopterin tilanteessa tarvitaan seitsemäs partio estämään tämä.

Viisi partiota ei riitä, vaikka poliiseilla olisi käytettävissään kolmekin kopteria. Koska yksi partio voi olla kerrallaan vain kahden kaupungin vieressä, voi viidellä poliisipartiolla päästä korkeintaan kymmenen kaupungin vierelle. Tällöin jää ainakin yksi kaupunki, josta lähteville teille ei riitä yhtään poliisia. Rosvon voittostrategia on aina siirtyä sellaiseen kaupunkiin. Jos (ja kun) rosvo voi aina pysyä neljän pakoreitin kaupungissa, ei sitä voida kolmella helikopterilla saartaa.



	4 poliisia	5 poliisia	6 poliisia	7 poliisia
1 kopteri	rosvo	rosvo	rosvo	poliisit
2 kopteria	rosvo	rosvo	poliisit	poliisit
3 kopteria	rosvo	rosvo	poliisit	poliisit
4 kopteria	poliisit	poliisit	poliisit	poliisit

Kuva 4: Taulukkoon on kirjattu timanttilaudalla pelatun pelin voittostaretegian omaava pelaaja kullakin varustelutasolla.

Matemaattinen tausta

Vaikka tietokoneet voivat laskea yhä nopeammin ja nopeammin, on silti tärkeää yrittää rakentaa sellaisia algoritmeja, joilla ongelma ratkeaa mahdollisimman nopealla tavalla. Verkkoteoriasta onkin tullut tärkeä matematiikan osa-alue juuri tietotekniikan sovellusten myötä. Verkkoteoriassa tutkitaan esimerkiksi erilaisten ongelmien vaativuusluokkia. Verkkoteorian ongelman sanotaan ratkeavan polynomisessa ajassa, jos on olemassa polynomi $p(n)$ ja sellainen algoritmi, joka käyttää n:n solmun kokoisella verkolla ongelman ratkaisuun korkeintaan $p(n)$ aikayksikköä. Myös Rosvo ja poliisi -peli liittyy verkkoteorian tutkimukseen ja etäisesti myös vaativuusluokkiin. Voidaan osoittaa, että rosvotai poliisipelaajien voittostrategioiden olemassaolo liittyy tietynlaisen logiikan, eli matemaattisesti määritellyn kielen, kykyyn kuvailla verkkojen ominaisuuksia. Professori Lauri Hella käytti eräänlaista rosvo ja poliisi -peliä osoittaessaan, että polynomisessa ajassa ratkeavien ongelmien luokka ei ole sama kuin logiikassa $L^p_{\infty\omega}(\mathbb{Q}_h)$ määriteltävien ongelmien luokka, vaikka sallittaisiin mielivaltaisen suuria arvoja parametreille p ja h.

Polynomisessa ajassa ratkeavien ongelmien joukon tutkimus jatkuu edelleen. Tähän tutkimukseen liittyy myös kuuluisa "$P = NP$?" -ongelma, jonka ratkaisusta Clay Mathematics Institute on luvannut miljoona dollaria. Lyhenteen kirjain P tarkoittaa juuri polynomisessa ajassa ratkeavien ongelmien luokkaa.