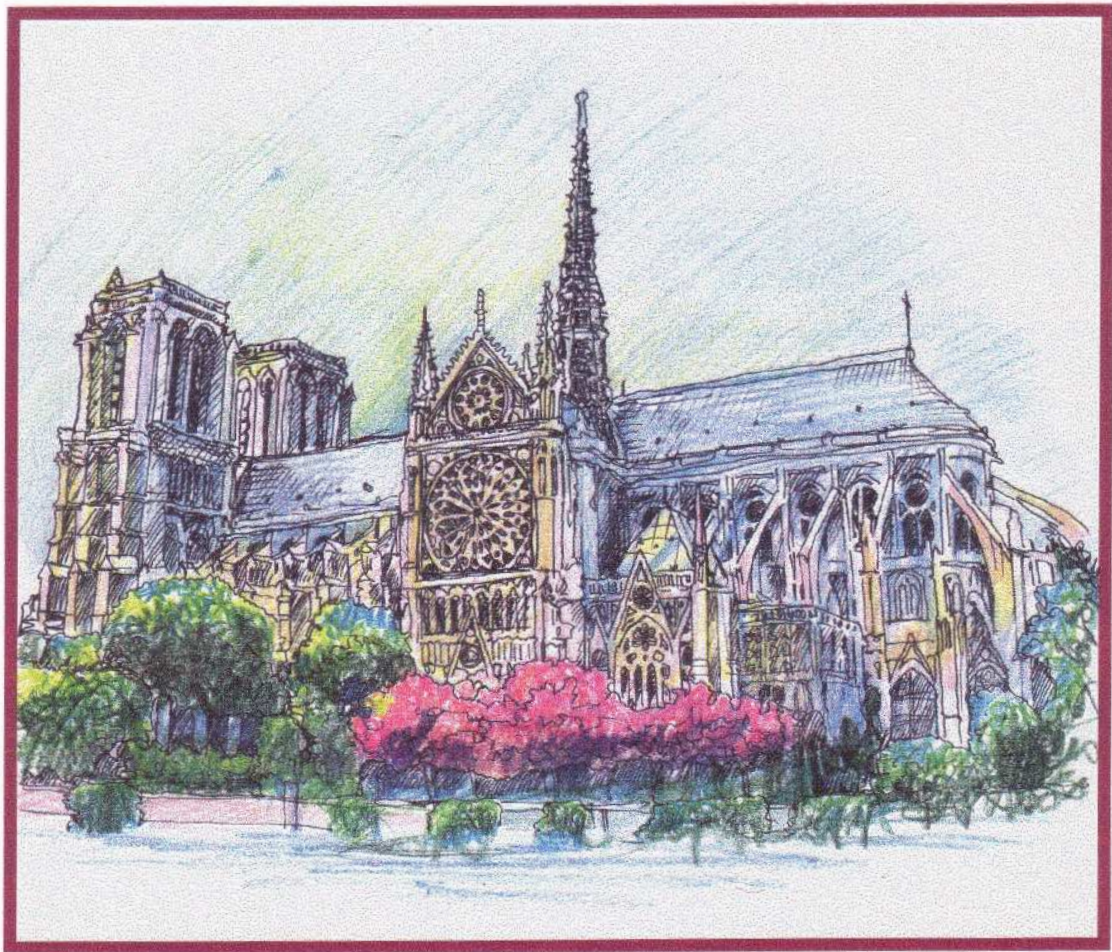




Matematiikkalehti Solmu

Erikoisnumero 1/2005–2006

<http://solmu.math.helsinki.fi>



Solmu

Erikoisnumero 1/2005–2006

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

ISSN 1459-0395 (Painettu)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)

00014 Helsingin yliopisto

<http://solmu.math.helsinki.fi>

Erikoisnumeron päätoimittaja

Marjatta Näätänen, dosentti; Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Toimitussihteeri

Mika Koskenoja, tohtoriassistentti; Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Sähköposti toimitus@solmu.math.helsinki.fi

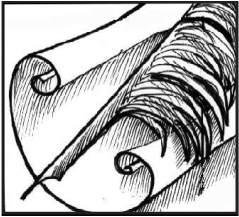
Graafinen avustaja *Marjaana Beddard*

Kannen kuva: Notre Dame

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Sisällys

Pääkirjoitus: Matematiikan opetus, osaamistaso ja -tarve (Marjatta Näätänen)	4
Toimitussihteerin palsta: PISA 2003 -tutkimuksen toteutuksesta (Mika Koskenoja)	7
PISA-tutkimus, matematiikan oppisisällöt ja opettajat (Olli Martio).....	9
Matematiikan taidoissa selviä puutteita (Kyösti Tarvainen ja Simo K. Kivelä)	11
Lukion vapaaehtoisten ”matematiikan tukikurssien” synkkä historia (Jukka O. Mattila)	13
Osataanko matematiikkaa kyllin hyvin? (Marjatta Näätänen)	15
Kaksi askelta taaksepäin (Seppo Visti)	19
Perusmatematiikkako tarpeetonta? (Mai Allo).....	22
Ranskalaisten akateemikkojen manifesti (Marjatta Näätänen ja Tapani Kuusalo)	24
Matematiikan käytön räjähdysmäinen kasvu – matematiikan ja yhteiskunnan uudet yhteydet	28



Matematiikan opetus, osaamistaso ja -tarve

Erikoisnumerot 2005 – 2006

Solmu julkaisee talvella 2005–2006 kaksi erikoisnumeroa, aiheena matematiikan opetus, osaamistaso ja -tarve. Numeroiden kansikuvat ovat tuttuja Pariisin näkymiä, Notre Dame ja Eiffeltorni. Syy tähän on, että erikoisnumerojen sisällöstä suuri osa on yhteistyötä ranskalaisten kanssa.

Ensimmäisessä erikoisnumerossa kerrotaan tarkemmin PISA-tutkimuksesta, ja Suomen eriasteisten oppilaitosten matematiikan opettajat kertovat kokemuksiaan matematiikan osaamistasosta. Nämä kokemukset tuntuvat olevan ristiriidassa PISA-tutkimuksen uutisoinnin kanssa, sehän kertoi, että nuoremme ovat matematiikan huippuosaaajia – niinpä yritämme paneutua PISA-problematiikkaan yksityiskohtaisemmin ja pyrimme selvittämään, mistä on kyse.

Ranskan kielestä on käännetty ja lyhennetty siellä kiivasta keskustelua herättänyt akateemikkojen manifesti, missä ilmaistaan huolestuminen Ranskan koulujen nykytilasta ja erityisesti matematiikan opetuksesta. Jälkimmäinen erikoisnumero sisältää Pariisissa pidetyn Suomen ja Ranskan matemaattisten yhdistysten järjestämän PISA-kokouksen esityksiä.

Suomen PISA-menestyksestä ja kansainvälisistä vertailuista

Kansainvälisestä kouluvertailusta, PISA:sta, on puhuttu paljon viime aikoina. PISA on OECD:n Programme for International Student Assessment. Matematiikassa on kuitenkin useita muitakin vertailuja, kuten TIMSS ja Kassell. Suomen koululaiset eivät selvinneet kovin hyvin kahdessa viimeksimainitussa, sensijaan PISA:ssa ensimmäinen oli Hong Kong (keskiarvo 550), sitten Suomi (544), Korea (542), Alankomaat (538), Lichtenstein (536), Japani (534), Kanada (532), Belgia (529).

OECD:n mukaan PISA mittasi seuraavaa:

PISA assesses the ability to complete tasks relating to real life, depending on a broad understanding of the key concepts, rather than limiting the assessment to the possession of subject-specific knowledge.

PISA:sta puhuttaessa on siis tärkeää muistaa, ettei PISA yritä mitata oppisisältöjen omaksumista, vaan PISA mittaa kuinka hyvin 15-vuotiaat ”ovat valmiita kohtaamaan tietoyhteiskunnan haasteet” ja ”miten hy-

Pääkirjoitus

vin he osaavat käyttää tietojaan ja taitojaan ratkaisutakseen todellisen elämän haasteita”. PISA ei tutki, miten hyvin koululaiset ovat oppineet koulun oppisisällöt. Kyse on siitä ”mitä oppilaat osaavat tehdä sillä, mitä he ovat koulussa oppineet, eikä vain siitä, osaavatko he toistaa koulussa oppimansa”.

TIMSS ja PISA

TIMSS ja PISA kehitettiin palvelemaan eri tarkoituksia, siksi ne antavat jonkin verran erilaisen kuvan oppilaan matematiikan taidoista. TIMSS perustuu kansainvälisen työryhmän yhteisesti valitsemiin matematiikan oppivaatimusten aiheisiin. PISA keskittyy lukutaidon käsitteeseen ja saattaa kertoa myös koulun ulkopuolisesta oppimisesta. TIMSS mittaa siis tarkemmin oppisisältöjen oppimista, PISA ns. matematiikan lukutaitoa. TIMSS kohdistuu ylempään luokkaan niistä kahdesta, joilla on enemmistö 9- ja 13-vuotiaita, yleensä siis 4. ja 8. luokka, PISA taas 15-vuotiaisiin riippumatta koululuokasta. Myös sisällössä on eroa, TIMSS pyrkii tutkimaan koululaisten osaamista matematiikan viidellä alueella: luvut, mittaaminen, geometria, data, algebra. Noin kaksi kolmannesta TIMSS:in kysymyksistä on monivalintatehtäviä, PISA:n tehtävistä yksi kolmasosa. PISA:n aiheet eivät ole oppisisällöistä (kuten geometria ja algebra), vaan painopiste on tilanteissa, joissa matematiikkaa sovelletaan. PISA:n kysymyksistä käsitelti dataa 40 % ja algebraa 11 %, TIMSS:in vastaavasti 11 % ja 23 %.

Miksi PISA on tärkeä?

Key features of PISA-survey are

- *its policy orientation, with design and reporting methods determined by the need of governments to draw policy lessons*
- *the innovative literacy concept that is concerned with the capacity of students to apply knowledge and skill in key subject areas and to analyse, reason and communicate effectively as they pose, solve and interpret problems in a variety of situations;*
- *the relevance to life-long learning (information on motivation, beliefs, strategies)*
- *its regularity*
- *the breadth of geographic coverage (49 countries have participated so far)*

OECD:n mukaan PISA siis pyrkii vastaamaan hallitusten tarpeisiin. Tämä tarkoittaa, että PISA-tutkimus on hyvin tärkeä ja sillä on suuri ohjaava vaikutus, johon tulisi kiinnittää vakavaa huomiota.

PISA:n suunnittelijoiden mielestä sen lukutaitokäsite on innovatiivinen ja sillä voidaan tutkia oppilaiden kykyä soveltaa tietoja ja taitoja, kykyä päätellä ja kommunikoida samalla kun oppilaat asettavat, ratkaisevat ja tulkitsevat eri tilanteiden ongelmia. PISA:n kyselyaineisto kertoo myös oppilaiden motivaatiosta, uskumuksista, strategioista. PISA toistetaan säännöllisesti ja siihen on osallistunut 49 maata tähän mennessä

Miksi Suomi menestyi?

Suomen menestystä PISA-tutkimuksen matematiikkaosassa on käsitelty paljon mediassa ja syitä menestykseen on esitetty. En toista niitä, vaan mainitsen vain pari seikkaa: kouluttautumismahdollisuudet ovat Suomessa erinomaiset, koulujen opettajat ovat menestystä selitettäessä avainasemassa, samoin kuin heikoimpien tukemiseen käytetyt ponnistukset. PISA:n tehtävissä tekstin ymmärtäminen on välttämätöntä, siinä auttaa suomalaisten hyvä lukutaito, jota on harjoiteltu sekä koulussa että lukemalla lastenohjelmien tekstityksiä päivittäin, jopa tuntikaupalla. Suomen hieno kirjastolaitos on myös tukenut lasten lukuharrastusta. Suomen koululuokilla jokseenkin kaikki saavat opetusta äidinkielellään. PISA-tehtävien tyyppisiä tehtäviä harjoitellaan Suomessa koulussa – joissain maissa datan esittäminen ja todennäköisyyden käsite on vasta pari vuotta sitten lisätty matematiikan oppisisältöihin. Eräänä tekijänä on myös mainittu, että suomalaiset lapset yrittävät ratkoa erilaisia tehtäviä, kun taas esimerkiksi venäläiset kertovat, että heidän koululaisensa eivät edes yritä tehtäviä, jotka ovat heille outoja. Mitenkään vähättelemättä suomalaisten lasten saavutuksia PISA-tutkimuksessa, on asia siis kuitenkin hiukan monimutkaisempi kuin että nuoremme olisivat nyt ”matematiikan huippuosaajia”.

Tarkemmin Suomen sijoituksesta

Suomen kärkisija johtui heikoimpien oppilaiden menestyksestä muiden maiden heikkoihin oppilaisiin verrattuna. Tämä näkyy vertailemalla jakaumien huonompaa osaa. Joidenkin maiden 25. prosenttipisteet (tämän rajan alapuolelle jäi 25 % jakaumasta) olivat Belgia 456, Hollanti 471, Korea 479, Japani 467, Hong Kong 485, Lichtenstein 470, Ranska 449, Suomi 488 (paras), OECD keskiarvo 432. Suomen ja OECD:n keskiarvon

erotus matematiikassa oli 56, ongelmanratkaisussa 61, lukutaidossa 64.

75. prosenttipisteen (tämän rajan alapuolelle jäi 75 % jakaumasta, yläpuolelle 25 %) suhteen Suomi oli paras vain lukutaidossa. Matematiikassa Suomen ohitti 4 OECD maata: Belgia 611, Hollanti 608, Korea 606, Japani 605 ja Hong Kong 622, sekä Lichtenstein 609. Suomen pisteluku oli 603, Ranskan 575, OECD keskiarvo 571.

Mikä PISA:ssa on ongelmallista?

PISA käsitteli seuraavia matematiikan sisältöjä:

- määrä
- tila ja muoto
- muutos ja suhteet
- epävarmuus

ja seuraavia prosessisisältöjä:

- yksinkertaiset matematiikan taidot
- yksinkertaisten ongelmien ratkaisu ideoita yhdistelemällä

Marjatta Näätänen

Katso myös: PISA-tutkimus vain osatotuus suomalaisten matematiikan taidoista,

<http://solmu.math.helsinki.fi/2005/pisakeskustelua.html>.

Tähän osoitteeseen on kerätty aihepiiriin liittyviä kirjoituksia.

– laaja-alainen matemaattinen ajattelu

Itsekukin voi katsella PISA:n tehtäviä ja muodostaa oman käsityksensä siitä, mitä esimerkiksi laaja-alainen matemaattinen ajattelu tässä yhteydessä tarkoittaa. Tarvittavat matematiikan työkalut löytyvät jokseenkin neljän peruslaskutoimituksen hallinnasta. PISA:n matematiikkakäsitystä kuvaa myös se, että PISA:n ongelmanratkaisutehtävät ja matematiikan tehtävät olivat hyvin samankaltaisia, niinpä suoritukset näissä kahdessa korreloivatkin voimakkaasti. PISA-menestyksen uutisointi herättää myös kiusallisen kysymyksen: eikö maasta löytynyt yhtään tiedetoimittajaa, joka olisi syventynyt asiaan ja käsitellyt sitä monipuolisemmin kuin nyt tapahtui?

Suomen menestys on ollut näinä ankeina aikoina erittäin tervetullut uutinen. Niinpä onkin vast'edes pelättävissä, että PISA ohjaa yhä voimakkaammin matematiikan opetusta kouluissa. Näin käy, jos harjoittelu keskitetään PISA-tyyppisiin tehtäviin, jotta menestys taattaisiin vastakin, ja lopetetaan osallistuminen muihin, hieman enemmän itse matematiikan hallintaa mittaaviin vertailuihin. PISA:n matematiikkaosuus rajoittuu jokseenkin neljään peruslaskutoimitukseen, joita tulee osata soveltaa terveellä järjellä. Lisäksi tulee ymmärtää, mitä tehtävässä halutaan, saada selvää tehtävän tekstistä ja osata lukea sanomalehtien kaavioiden tyyppisiä dataesityksiä.



PISA 2003 -tutkimuksen toteutuksesta

PISA-tutkimusohjelma selvittää kolmen vuoden välein 15-vuotiaiden nuorten osaamista lukutaidossa, matematiikassa ja luonnontieteissä. Suomessa tutkimusohjelman kohderyhmänä olevat 15-vuotiaat ovat pääosin peruskoulun yhdeksännen luokan oppilaita. PISA 2003 -tutkimuksen perusjoukoksi määriteltiin ”peruskoulun kaikki oppilaat, jotka ovat syntyneet helmikuun 1987 ja tammikuun 1988 välisenä aikana”. Tutkimus on järjestetty niin, että tutkimustulokset ovat luotettavia ja eri maiden kesken vertailukelpoisia.

Ensimmäisessä PISA 2000 -tutkimuksessa pääalueena oli lukutaito, toisessa PISA 2003 -tutkimuksessa keskityttiin matematiikkaan ja ongelmanratkaisutaitoihin. Kolmannessa PISA 2006 -tutkimuksessa päärooli tulee olemaan luonnontieteiden osaamisessa.

PISA 2003 -tutkimukseen osallistui yhteensä 41 maata, joista 30 on OECD-maita. Suomesta otokseen valittiin 197 koulua otoskoon ollessa 6 235 oppilasta. Tutkimukseen vastasi kaikista 197 koulusta 5 796 oppilasta, joten vastauskato oli 7 %. Oppilaiden lisäksi tutkimukseen osallistui 197 rehtoria tai koulunjohtajaa, jotka vastasivat koulukyselyyn.

PISA 2000 ja PISA 2003 -tutkimuksista vastasi Suomessa Jyväskylän yliopiston Koulutuksen tutkimuslaitos yhteistyössä opetusministeriön kanssa. PISA 2003 -tutkimuksen kansallisena koordinaattorina toimi professori *Jouni Välijärvi* ja matematiikka- ja ongelmanratkaisuosuuden päävastuun kantoi erikoistutkija *Pek-*

ka Kupari. Tulevasta PISA 2006 -tutkimuksesta vastaa Helsingin yliopiston soveltavan kasvatustieteen laitoksen koulutuksen arviointikeskus. Suomessa toimii kansallinen tukiryhmä, mihin kuuluvat opetusministeriön, Suomen Kuntaliiton, Opetusalan ammattijärjestö OAJ:n ja Suomen rehtorien (SURE) kunkin nimeämä edustaja sekä OECD:n koulutusindikaattoriprojektin oppimistulosjaoston suomalaisedustaja.

PISA 2000 ja 2003 -tutkimusten Suomen kansallinen verkkosivu on osoitteessa <http://ktl.jyu.fi/pisa/>, josta löytyvät kaikki tutkimukseen liittyvät suomenkieliset dokumentit sekä linkit kansainvälisille sivuille. Tutkimusohjelman kansainvälinen verkkosivu on osoitteessa <http://www.pisa.oecd.org>. Näillä verkkosivuilla on tulostettavissa mm. PISA 2003 -tutkimuksen englanninkielinen kansainvälinen pääraportti ”Learning for Tomorrow’s World – First Results from PISA 2003” (478 sivua) sekä suomenkielinen kansallinen pääraportti ”Osaaminen kestäväällä pohjalla. PISA 2003 Suomessa” (262 sivua).

PISA:n matematiikan osaamisessa arvioidaan oppilaiden kykyä ratkaista heille ”arkielämän tilanteissa vastaan tulevia matematiikkaan liittyviä ongelmia”. Tutkimuksessa ei siis arvioida opetussuunnitelmien sisältöjen hallintaa. PISA 2003 -tutkimuksessa selvitetiin uutena alueena nuorten ongelmanratkaisutaitoja, jotka tarkoittavat oppilaiden kykyä ratkaista oppiainerajoja ylittäviä ongelmia.

Toimitussihteerin palsta

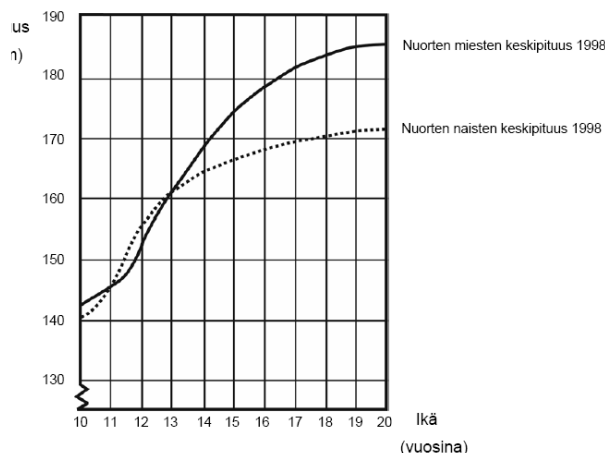
PISA 2003 -arvioinnissa matematiikan osaamista mitattiin yhteensä 85 tehtävän avulla. Matematiikan tehtävät oli kuitenkin jaettu eri tehtävävihkoihin yhdessä luetun ymmärtämisen, luonnontieteiden sekä ongelmanratkaisun tehtävien kanssa siten, että kunkin oppilaan tehtävävihkossa oli keskimäärin 50 tehtävää, joista runsaat puolet oli matematiikan tehtäviä. Tehtävien ratkaisemiseen oli varattu aikaa kaksi tuntia. Osa tehtävistä oli yksittäisiä, mutta usein kaksi tai useampi tehtävä muodosti kokonaisuuden, joka pohjautui yhteiseen tehtävän alussa esitettyyn kuva- tai tekstiaineistoon. Samaan aineistoon tai teemaan liittyneet tehtävät olivat usein vaikeudeltaan eritasoisia ja tehtävätyypiltään erilaisia (monivalintatehtävä, sarja oikein/väärin-tehtäviä, pelkkään numerovastaukseen rajoittuva ja/tai pidempää perustelua vaativa kysymys). Tällaisten tehtäväkokonaisuuksien käyttäminen mahdollisti testausajan tehokkaan käytön, koska oppilailla kului vähemmän aikaa tehtäväkontekstiin tutustumisessa.

Esimerkkejä matematiikan tehtävistä

Kasvaminen

Nuoriso kasvaa pidemmäksi

Seuraavasta kuvaajasta ilmenevät sekä nuorten miesten että nuorten naisten keskipituudet Hollannissa vuonna 1998.



Tehtävä 1. Vuodesta 1980 lähtien on 20-vuotiaiden naisten keskipituus kasvanut 2,3 cm 170,6 cm:iin saakka. Mikä oli 20-vuotiaiden naisten keskipituus vuonna 1980?

Mika Koskenoja

Tehtävä 2. Millä ikäkaudella tytöt/naiset ovat kuvaajan mukaan keskimäärin pidempiä kuin samanikäiset pojat/miehet?

Tehtävä 3. Selitä, miten kuvaajasta näkyy, että keskimäärin tyttöjen kasvunopeus hidastuu 12 ikävuoden jälkeen.

Vaihtokurssi

Tehtävä 1. Mei-Ling havaitsi, että Singaporen dollarien ja Etelä-Afrikan randien välinen vaihtokurssi oli

$$1 \text{ SGD} = 4,2 \text{ ZAR.}$$

Mei-Ling vaihtoi 3 000 Singaporen dollaria Etelä-Afrikan randeiksi tällä vaihtokurssilla. Kuinka paljon Etelä-Afrikan randeja Mei-Ling sai?

Tehtävä 2. Palatessaan Singaporeen 3 kuukauden kulluttua Mei-Lingillä oli jäljellä 3 900 randia (ZAR). Hän vaihtoi nämä takaisin Singaporen dollareiksi ja huomasi, että vaihtokurssi oli nyt

$$1 \text{ SGD} = 4,0 \text{ ZAR.}$$

Kuinka paljon Singaporen dollareita Mei-Ling sai?

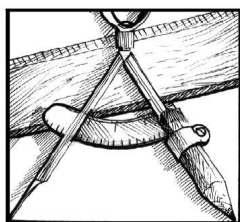
Tehtävä 3. Näiden 3 kuukauden aikana vaihtokurssi oli siis muuttunut 4,2:sta 4,0 randiin (ZAR) Singaporen dollaria kohti. Oliko Mei-Lingille eduksi, että vaihtokurssi nyt kun hän vaihtoi randinsa takaisin Singaporen dollareiksi, oli 4,0 randia 4,2 randin sijasta? Perustelee vastauksesi.

Merkittävä osa tehtävien ratkaisemisesta vaikuttaa olevan kysymysten ymmärtäminen. Vain osa tutkimuksessa käytetyistä tehtävistä on julkaistu, mutta julkaistujen tehtävien perusteella useimmissa tehtävissä vaadittiin enintään yhden peruslaskutoimituksen suorittamista. Noin 40 % tehtävistä testasi oppilaiden kykyä tulkita kuvaajien, taulukoiden ja diagrammien sisältämää kvantitatiivista tietoa.

Lähteet

Tähän kirjoitukseen on osittain suoraan lainattu PISA-tutkimusohjelman kansalliselta (kt1.jyu.fi/pisa/) ja kansainväliseltä (www.pisa.oecd.org) sekä opetusministeriön (www.minedu.fi) ja Opetushallituksen (www.oph.fi) verkkosivuilta löytyviä dokumentteja.

Toimitussihteerin palsta



PISA-tutkimus, matematiikan oppisisällöt ja opettajat

Olli Martio

Professori

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

olli.martio@helsinki.fi

Suomalaisten koululaisten saavutukset PISA-tutkimuksessa ovat hatunnoston arvoisia. Tutkimus on huolella tehty ja data luotettavaa. Opetushallitus ja sen matematiikan entinen asiantuntija *R. Seppälä* (Helsingin Sanomat 2.4.2005) ovat syystä tyytyväisiä.

Koulujen, korkeakoulujen ja ammattikorkeakoulujen opettajat (Helsingin Sanomat 10.3.2005 ja 17.2.2005) ovat kuitenkin huolestuneita suomalaisten koululaisten, lähinnä ylioppilastutkinnon suorittaneiden, matematiikan osaamisesta. PISA-tutkimus mittasi maiden välisiä suhteellisia eroja. Ajan mukana tapahtuneita muutoksia on myös mitattu. Professori *D. Burghes* arvioi, että vuonna 1994 brittiläisten koulujen vaatimustaso matematiikassa oli 5 vuotta jäljessä kuningatar Victorian aikaisesta tasosta.

PISA-tutkimus antaa odottaa, että matematiikan opetustulokset Suomessa eivät ole huonontuneet. Lehtori Liisa Näverin tutkimuksesta (Lasketun ymmärtäminen?, *Dimensio* 3/2005) käy ilmi, että suomalaisten koululaisten laskentataidot (numeroosaaminen, murtoluvut, alkeellisten lausekkeiden käsittely) ovat vuosista 1981–87 vuoteen 2003 heikentyneet 20–30 %. Tyypillisiä kysymyksiä testissä, joka samana toteutettiin em. vuosina, olivat lasku-

toimitukset: $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = ?$ ja $\frac{1}{6} : \frac{1}{2} = ?$. Oikein vastanneiden prosenttiosuudet 1981–87 ja 2003 olivat ensimmäisessä tehtävässä 56,4 % ja 36,9 % sekä toisessa 56,5 % ja 28,3 %. Testi suoritettiin 15-vuotiaille, PISA-tutkimuksen ikäluokalle. Huoli tasosta näyttää olevan perusteltu. Mistä johtuvat ristiriitaiset tulokset?

Tason laskulle tarjotaan standardiselyä: Koska nykyisin aikaisempaa suurempi osa ikäluokkaa harjoittaa matematiikan opintoja, niin tason lasku on selviö. Tämä ei kuitenkaan ole merkittävin syy. Kursseja on kevennetty ja vaatimustaso laskettu, ja myös parhaiden oppilaiden osaamisen taso on heikentynyt. Ilmiöt ovat kansainvälisiä ja monissa Euroopan maissa dramaattisempia kuin Suomessa.

Opetussuunnitelmien muutokset ovat olleet samansuuntaisia Euroopassa. Suunnittelijat ovat uskoneet lähinnä kasvatustieteilijöiden vakuuttelua, että matematiikan kouluopetus on muutettava ”käytännönläheiseksi”. Usein käytetty ilmaisu on ongelmakeskeinen. Tätä kansainvälistä trendiä heijastaa PISA-tutkimus; kysymykset kohdistuvat pitkälti ”luetun ymmärtämiseen”. Suomen koululaitokselle on kunnia, että koululaistemme ovat tässä taidossa saavuttaneet kansainvälisen huipun.

Löytyy myös toinen selittävä tekijä. Matemaattisten aineiden opettajista on pulaa useissa Euroopan maissa ja koulutuksessa on laskettu aineenhallinnan tasoa.

PISA-tutkijoiden väite, että nykyiset eurooppalaiset, ja myös suomalaiset, matematiikan oppisisällöt luovat hyvän pohjan jatko-opinnoille, on väärä. Perusteet jäävät valitettavan hatariksi. Tämä ei koske parhaita suoriutujia: he pystyvät aina paikkaamaan tietonsa. Probleema kohdistuu ”keskikastiin”, jota yhteiskunta kipeästi tarvitsee matematiikkaa vaativiin tehtäviin. Matemaattinen osaaminen pysähtyy tässä ryhmässä monen kohdalla PISA:n kysymysten tasolle.

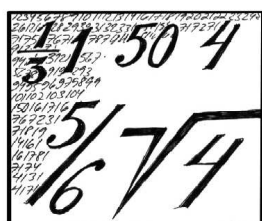
Ammattikorkeakouluista on tullut voimakas viesti. Niihin tulee paljon ylioppilastutkinnossa lyhyen matematiikan suorittaneita, joille edellä mainittujen kahden tehtävän suorittaminen on ylivoimaista. PISA-tutkimus paljastaa, että Suomessa sekä opettajat että opetus on niin korkeatasoista, että PISA:n kysymysten kohdalla tavoitteet on saavutettu huipputasolla. PISA:n testi ja nykyiset oppisisällöt matematiikassa Suomessa ovat pitkälti yhdenmukaiset. Valitettavasti tämä ei johda kestävään kehitykseen.

On paljon ihmisiä, jotka eivät juuri matematiikkaa tarvitse. Veroilmoituksissakaan ei enää tarvitse laskea summia. Nykyisten opetussuunnitelmien käsitys ”käytännön matematiikasta” on kuitenkin aikansa elänyt. Matemaattiset rakenteet, mm. geometria, murtoluvut ja niillä laskeminen, on kehitetty käytännön

ongelmien ratkaisemiseen. Murtolukulaskujen tarkoitus ei ole oppilaiden kiusaaminen, vaan laskutoimitusten ja lukujen suuruussuhteiden ymmärtäminen. Yllä mainitut testikysymykset voidaan suorittaa laskimella. Suoritus vastaa laskun kopiointia paperille. Laskimien käyttö onkin yliarvostettu matematiikan kouluopetuksessa. Moderneja laskumetodeja pitää opettaa, mutta oikeassa vaiheessa. Kurssimuotoisuus on myös vaikeuttanut matematiikan opetusta pilkkomalla opetettavan aineksen.

PISA:n tulokset näyttävät, että koululaitoksemme pystyy vastaamaan koulutuksellisiin haasteisiin. On pystyttävä vastaamaan myös oppisisältöjä kosviin haasteisiin. Näistä tärkeimmät ovat peruskoulun matematiikan oppisisällöt ja näiden aiheuttamat epäjatkuvuuskohdat lukion ja peruskoulun saumassa. Lyhyen matematiikan lukion oppisisällöt vaativat myös pikaista korjausta. Valtioneuvoston tavoite, että 40–50 % ikäluokasta suorittaisi korkeakoulututkinnon, on mahdoton nykyisillä pohjatiedoilla.

Matemaattisten aineiden opettajien aineenhallinnan heikkeneminen on toistaiseksi vältetty Suomessa, kiitos yliopistojen laadukkaalle koulutukselle ja opetusministeriön asettamalle järkevälle laatutasolle. Opettajapula on uhka Suomessakin. Alalle aikovat löytyvät pitkän matematiikan yo-tutkinnossa suorittaneiden keskuudesta, ja heitä on liian vähän. Vaarallisinta olisi opettajien aineenhallinnan tason lasku. Suomella ei ole siihen varaa.



Matematiikan taidoissa selviä puutteita

Kyösti Tarvainen

Yliopettaja

Helsingin ammattikorkeakoulu Stadia

Simo K. Kivelä

Yliopistonlehtori

Teknillinen korkeakoulu

Yläasteen lehtori *Antero Lahti* esitti (HS 28.2.2005), että yli 200 opettajan esittämä huoli matematiikan opetuksesta (HS 17.2.2005) olisi pelkästään akateemisen maailman kritiikkiä.

Itse asiassa allekirjoittajista noin puolet on ammattikorkeakoulujen ja teknillisten yliopistojen (korkeakoulujen) opettajia, jotka eivät opeta ”akateemista” matematiikkaa, vaan tekniikassa ja insinööritieteissä tarvittavaa matematiikkaa. Insinööriopinnot aloittaa vuosittain yli 12 000 opiskelijaa.

Uusien insinööriopiskelijoiden matematiikan taitoja on systemaattisesti tutkittu Turun ammattikorkeakoulussa vuosina 1999–2004 järjestetyissä 20 tehtävän testeissä (Turun ammattikorkeakoulun raportteja 29). Erittäin huonoa osaamista kuvastaa esimerkiksi se, että testeihin osallistuneista 2400 opiskelijasta vain 35 % on osannut peruskoulun oppimäärään kuuluvan laskun, jossa murtoluvusta vähennetään toinen murtoluku ja erotus jaetaan kokonaisluvulla.

Jos ei osaa murtolukulaskuja, ei voi osata samoja laskusääntöjä käyttävää algebraakaan, joka insinööriopiskelijoille on keskeinen matematiikan osa-alue. Sen osaamista ei juurikaan testattu PISA-

tutkimuksessa. Algebrassa suomalaiset peruskoululaiset ovat menestyneet huonosti monissa vertailututkimuksissa (IEA 1981, Kassel 1994–96, TIMSS 1999).

Ammattikorkeakouluissa ammattiaineiden opettajat ihmettelevätkin, kuinka huonosti osataan algebrallisten lausekkeiden käsittelysääntöjä ja yhtälöiden ratkaisumenetelmiä. Opiskelijoiden heikentyneiden matematiikan taitojen vuoksi on ammattikorkeakouluissa ollut pakko karsia opetettavia asioita niissä tekniikan ammattiaineissa, jotka käyttävät eniten matematiikkaa. Tämä on vakava asia sen merkityksen kannalta, mikä tekniikan osaamisella on Suomen talouselämälle ja hyvinvoinnille.

Teknillisissä korkeakouluissa ja teknillisissä yliopistoissa tilanne ei ole yhtä huono, mutta niissäkin on havaittu nimenomaan algebrallisten taitojen heikentyminen ja puutteet vähänkin laajempien matemaattisten kokonaisuuksien käsittelyssä. Sama koskee ylioppilastutkintoa.

Suomalaisten matematiikan osaamisessa ja opetuksessa on myönteisiä seikkoja. Peruskoululaisten menestyminen PISA-tutkimuksen käytännönläheisissä numeerisissa tehtävissä on hyvä asia, mihin ovat

myötävaikuttaneet erinomaisia arkielämän esimerkkejä sisältävät peruskoulun matematiikan kirjat. Pakollisten kurssien lisäksi lukiolaisilla on mahdollisuus syventää osaamistaan hyvillä valinnaisilla kursseilla. Suomessa opettajat ovat tunnetusti motivoituneita ja saaneet hyvän koulutuksen.

Kuitenkin ammattikorkeakouluihin ja yliopistoihin tulevilla opiskelijoilla on kiistatta keskimäärin huonot matematiikan taidot. Tilanteen parantamiseksi opetusministeriön tulisi nimittää työryhmä joka selvittää, mistä osaamisen puutteet johtuvat, ja joka esittää parannustoimenpiteitä. Tässä työryhmässä tulee olla merkittävä edustus yliopistojen ja ammattikorkeakoulujen opettajilla, koska he tietävät, minkälaista matematiikkaa jatko-opinnoissa ja eri alojen sovellutuksissa todella tarvitaan.

Tällöin on selvitettävä, onko ensimmäinen sija PISA-tutkimuksessa vain jonkinlainen Pyrrhoksen voitto: onko Suomen peruskouluissa panostettu liikaa PISA-tutkimuksessa korostettuihin numeerisiin ongelmanratkaisutehtäviin ja ovatko muut maat sen sijaan panostaneet algebraan varmentaan oppilaille paremman pohjan, jolle matematiikan jatko-opinnot voidaan rakentaa lukioissa, korkeakouluissa ja yliopistoissa.

On myös selvitettävä, kuinka paljon ylioppilaiden huono keskimääräinen osaaminen johtuu nykyisistä lukiojärjestelyistä. Vakava virhe on ainakin se, että useimmissa lukioissa matematiikasta voi saa-

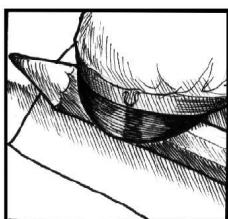
da hyväksytyt arvosanan, vaikka osa kursseista on hylättyjä, ja kursseilta saa olla poissa useita tunteja ilman pätevää syytä.

Matematiikan jatko-opinnoille näistä seikoista on suurta haittaa. Varsinkin ammattikorkeakouluissa tulee ilmi se, että oppilailla ei ole enää yhtenäistä perusosaamisen pohjaa, jolle voi rakentaa. Heillä on erilaisia puutteita tärkeässäkin perusosaamisessa sen mukaan, mikä lukion pakollinen kurssi on ollut hylätty tai vain osittain seurattu. Tämä johtaa opetuksen tehottomuuteen: ammattikorkeakouluissa suuri osa ensimmäisen vuoden matematiikan opetuksesta kuluu lukion asioiden kertaamiseen.

Mistään vaikeista, matemaattista erityislahjakkuutta edellyttävistä asioista ei lukion matematiikassa eikä yliopistossa insinöörimatematiikassa ole kyse, koska ammattikouluistakin valmistuneet opiskelijat, joita ammattikorkeakouluissa on noin kolmannes, oppivat nämä asiat.

Selvitystä vaatii myös se, että LUMA-talkoissa asetusta 17 000 lukion pitkän matematiikan suorituksista on jäänyt todella kauas: viime vuosina hieman yli 12 000 on suorittanut pitkän matematiikan. Tässäkin kohtaa vaikeudet kärjistyvät ammattikorkeakoulujen insinööriopinnoissa, joissa ylioppilasluokilla noin 40 % oppilaista on suorittanut vain lukion lyhyen matematiikan.

Kirjoitus on julkaistu Helsingin Sanomissa 10.3.2005, ja se julkaistaan Solmussa kirjoittajiensa luvalla.



Lukion vapaaehtoisten ”matematiikan tukikurssien” synkkä historia

Jukka O. Mattila
Parainen

Korkeakoulujen matematiikan opetuksen asiantuntijat ovat useaan otteeseen julkisesti kritisoineet yleisivistävän koulun tuottamia matematiikan hallinnan taitoja. Muun muassa yliopettaja *Kyösti Tarvainen* ja yliopistonlehtori *Simo K. Kivelä* arvostelivat maaliskuussa 2005 Helsingin Sanomissa ammattikorkeakoulujen insinööriopiskelijoiden lähtövalmiuksia matematiikan opintoihin.

Kirjoittajat toteavat suomalaisten koululaisten algebran taitojen olevan heikkoja ja kysyvät, onko PISA-tutkimuksessa korostettuihin numeerisiin ongelmanratkaisutaitoihin panostettu liikaa. Lisäksi he peräävät, että opetusministeriön tulisi perustaa työryhmä, joka selvittäisi, mistä algebran osaamisen puutteet johtuvat.

Eräs valtakunnallisen kouluhallinnon tärkeimpiä tehtäviä on taata nuorten koulu-uralle aukoton jatkumo. Näin on varsinkin yleisivistävässä koulutuksessa, koska sen käy läpi koko ikäluokka. Onhan koko ikäluokan juoheva läpimeno sekä yksilön opintouran että valtakunnallisen koulumenestyksen kulmakiviä. Erityisen tärkeä aukoton jatkumo on matematiikan tapaisessa tiukan kumulatiivisessa aineessa, jossa lähes kaikki uusi perustuu aikaisemmin opitulle.

Tämä jatkumo sai särön vuonna 1985, jolloin yläasteelta poistettiin valtioneuvoston päätöksellä yli

40 tuntia matematiikkaa, pääasiassa algebran alkeita. Tämän lisäksi – mikä on tämän kirjoituksen varsinaisen aihe – silloinen Kouluhallitus sälytti peruskoulussa tapahtuneen leikkauksen seuraukset peruskoulun jälkeisten oppilaitosten opettajien ja heidän opiskelijapolviensa niskoille lähes 20 vuodeksi. Koko ongelman ydin oli pitkään vain muutaman henkilön tiedossa. Asia tuli ensi kertaa julkisuuteen allekirjoittaneen taholta Helsingin Sanomissa vuonna 2002.

Ongelman syntyäikoihin 1980-luvun lopulla silloinen Kouluhallituksen matematiikan ylitarkastaja vähätteli algebraa ”temppuopiksi”. Temppujen opiskelun sijasta olisi pitänyt muodikkaammin ”soveltaa”. Matemaattisten aineiden opettajien koulutuspäivillä saarnattiin jatkuvasti yhtä aikaa temppuoppia vastaan ja soveltamisen puolesta. Ei siis ollut ihme, että temppuoppi, eli Tarvaisen ja Kivelän peräänkuuluttama algebra, ei ollut suosiossa. Kaikki arvo toki soveltamiselle, mutta se ei aina onnistu ilman formaaleja työkaluja eli perusalgebraa ja sen ”temppujen” jatkuvaa jauhamista.

Ensimmäinen yläasteen algebralla karsitun matematiikan läpikäynyt ikäluokka saavutti lukion syksyllä 1989. Matemaattisten Aineiden Opettajien Liitto MAOL ry (toimin tuolloin puheenjohtajana) vaati useaan otteeseen, että pois jätetyn algebran opettamiseksi on rai-vattava tilaa lukiossa, koska matematiikassa kaikki pe-

rustuu aikaisemmin opitulle eikä välistä voi ottaa palaa pois, kaikkein vähimmin tärkeimpiä työkaluja.

Kouluhallitus vastasi tähän tiedotteella T96/1989, jossa se totesi mm.: ”tarvittavien opetussuunnitelmallisten ratkaisuiden tekeminen on osa kunnan opetussuunnitelman kehittämistä”. Näin Kouluhallitus jätti valtioneuvoston tasolla tehdyn yläasteen tuntijakopäätöksen lukiolle aiheutuneiden ongelmien paikkaamisen faktisesti kunnallisten opetussuunnitelmatoimikuntien ja yksittäisten lukioden opettajien tehtäväksi.

Ainoa eksplisiittisesti ilmaistu matematiikan oppiaineksen karsinta oli yleisen matematiikan kohdalla mainittu ”murtolausekkeilla laskeminen voidaan sivuuttaa”. Tiedote T96/1989 totesi lisäksi: ”eräissä kouluissa on saatu hyviä kokemuksia järjestämällä työjärjestykseen merkittynä heti 1. luokan alussa kaikkien oppilaiden ohjelmaan sopiva matematiikan tukikurssi”.

Valtakunnallinen muutos olisi tietysti edellyttänyt valtakunnallista ratkaisua, eikä paikallista. Onhan jo pelkästään ylioppilastutkintoa varten lukioden oltava valtakunnallisesti samalla lähtöviivalla. Kaikissa kouluissa tukikurssien järjestäminen ei ollut edes mahdollista joko taloudellisten syiden tai muun opettajakunnan vastustuksen johdosta.

Seuraukset varsinkin heikompien ja keskinkertaistenkin oppilaiden matematiikan opiskeluun saattaa vain kuvitella. Ne olivat myös lukion matematiikan opettajien yleisenä puheenaiheena heti ensimmäisestä lukuvuodesta 1989–90. Vaikutukset heijastuivat luonnollisesti myös fysiikkaan ja kemiaan. ”Kuin välistä puuttuisi yksi luokka”, totesi eräs peruskoulusta lukioon

siirtynyt oppilas.

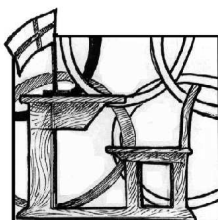
Seuraavakaan tuntijako (1992) ei korjannut asiaa, joten tukikurssit jäivät maan tavaksi. ”Väliaikaiset” tukikurssit on hiljaisesti sementoitu lukioden matematiikan opintoihin jo yli 16 vuodeksi. Tuntuu uskomattomalta, että koulusuunnittelussa voidaan valtakunnan tasolla kasata niin monen peräkkäisen opiskelijaikäluokan tielle näin kohtuuttomia taakkoja. Tilanne on todennäköisesti vielä ongelmallisempi ammatillisella puolella, koska siellä tätä perussyötä tukikurssitarpeineen ei välttämättä ole edes tiedostettu.

Marjatta Näätänen vertaakin kirjoituksessaan ”Osaatanko matematiikkaa kyllin hyvin” lukion kautta ja ammattillista reittiä saapuneiden opiskelijoiden matematiikan taitoja, ja lukion hyväksi. Sekin on selitettävissä siten, että päätös T96/1989 lähetettiin vain lukioihin ja näin tiedettiin vain lukioissa järjestää tukikursseja. Ammatillisella puolella ei kai ollut ketään heidän opiskelijoidensa etuja ajamassa.

Nyt kun peruskoulu on saanut vuonna 1985 menettämänsä matematiikan vuosiviikkotunnin takaisin, pitäisi katsoa, onko peruskoulun matematiikassa varmasti tarpeeksi ”tempuoppia” vai onko tuo tila täytetty muulla aineksella. Edelleenkin yleisesti käytössä olevat ylimääräiset lukion tukikurssit epäilemättä hämärtävät kurssissuunnittelijoiden todellisuudentajua.

Kuten yliopettaja Kyösti Tarvainen ja yliopistonlehtori Simo K. Kivelä ehdottavat, pitäisi viipymättä koota riippumaton ulkopuolinen elin varmistamaan, että peruskoulun jälkeiset matematiikan tukikurssit voidaan siirtää pysyvästi historiaan.

Artikkelin kirjoittaja Jukka O. Mattila on jäänyt vuonna 2004 eläkkeelle Paraisten lukion rehtorin tehtävästä. Hän on kahden vuosikymmenen aikana toiminut useissa tehtävissä Matemaattisten Aineiden Opettajien Liitto MAOL ry:ssä, mm. puheenjohtajana 1988–1994.



Osataanko matematiikkaa kyllin hyvin?

Marjatta Näätänen

Dosentti

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Solmun tekijöille on tullut paljon kannanottoja matematiikan osaamistasosta eri oppilaitosten matematiikan opettajilta. Tässä on kooste kommentteista.

Matematiikkaan suhtautuminen näyttää jakavan ihmiset kahteen ryhmään; niihin, jotka pitävät ja arvostavat matematiikkaa ja niihin, jotka pelkäävät ja inhoavat sitä. Jos jakautuminen osuisi niin, että ne, jotka pelkäävät ja inhoavat matematiikkaa, olisivat juuri niitä, jotka eivät myöhemmin ammattiopinnoissaan tai työelämässään tarvitse matemaattista tietoutta ja taitoja, olisi asiaan helpompi löytää ratkaisuja: Opetuksessa peruskoulusta yliopistoon asti voitaisiin keskittyä niihin, jotka pitävät matematiikasta ja arvostavat matemaattista ajattelua ja tietävät saavansa siitä etua opiskelussaan ja tarvitsevansa sitä työelämässään. Valitettavasti tilanne ei ole näin yksinkertainen. Näyttää jopa siltä, että viralliseksi kannaksi on muodostunut, että opetuksen tavoitteet ja työmäärät on suunniteltava erityisesti niiden mukaan, joiden tiedetään tarvitsevan matematiikkaa tehtäviensä kunnolla hoitamisessa, mutta jotka samalla inhoavat sitä yli kaiken.

Matematiikan parissa työskentelevät ovat kyllästymiseen asti saaneet kuulla kuin leuhkimisena ”Matematiikasta en koskaan ymmärtänyt mitään” ja ”Tarvitaanko tätä johonkin? Koneethan nykyisin laskevat.” Näin aikuiset siirtävät omat huonot asenteensa ja tunteensa uusille polville median auliilla avustuk-

sella. Opettajat toki kohtaavat työssään myös positiivisia ja innostuneita asenteita. Positiivisia kokemuksia tulee raportoitua eteenpäin harvoin; opetustyötähän raskauttavat ne, joilla on puutteelliset pohjatiedot ja huono asennoituminen ja joilta uuden oppiminen ei sen vuoksi suju.

Parhaillaan käynnistyvä kerhotoiminta osoittaa kuitenkin, että negatiivisen suhtautumisen kierre on katkaistavissa; oppilaat ovat kerhoissa – jos niitä heille pienestä pitäen tarjotaan – hyvin innostuneita matematiikasta. Myös unkarilaisvaikutteista matematiikan alkuopetuskokeilua tekevät suomalaiset opettajat iloitsevat innostuneista oppilaista.

Kokemuksia korkeakoulusta

Korkeakoulun matematiikan opettaja kertoo: Jouduin 1980-luvulta lähtien kokemaan, kuinka matematiikan ja tilastotieteen suorittajien määrä romahti siitähän pienestä osajien ja kiinnostuneiden joukosta mikä se oli ollut 1970-luvulla (noin 120 opiskelijasta matematiikan arvosanoja suoritti vuosittain noin 10–15). Tästä joukosta useat jatkoivat ylempiin tutkintoihin ja tutkimustyön pariin.

Kokemuksia ammattikorkeakoulusta

Ammattikorkeakoulun opettajalta: Surukseni täytyy tunnustaa, että opiskelijoiden (suomalaisten) matemaattiset taidot tuntuvat vuosi vuodelta käyvän köykäisemmiksi. Eihän meille ole koskaan tullutkaan lukioista parasta ainesta, mutta nyt tilanne on aika karmea. Alkeelliset peruslaskutoimitukset murtoluvuilla, lausekkeiden sievennys, peruskaavojen ”vettä valaen” hallinta ym. ovat monella täysin retuperällä. Sitten näiden opiskelijoiden kanssa pitäisi pystyä selviytymään sellaisista aiheista kuin Fourier’n sarjat, Fourier-muunnos, differenssiyhtälöt, z -muunnos jne., jotka esim. digitaalisessa signaalinkäsittelyssä ovat perustyökaluja. Matemaattinen tarkkuus (täsmälliset todistukset) on suurelta osin hylättävä. Lisäksi tähän soppaan on vielä liitettävä laskenta tietokoneella ja säästösyistä tapahtunut kontaktiopetustuntien vähennys viime vuosina.

Mikä mahtaa olla syynä tähän tilanteeseen? Mitä lukioissa tapahtuu nykyään? Vaaditaanko siellä tehtäväksi kotitehtäviä? Käydäänkö asioita läpi liian nopeasti? Meidän opiskelijamme eivät juurikaan tee kotilaskuja, ilmeisesti tällainen käytös on opittu jostain; kun ei niitä ole vaadittu ennenkään, niin ei niitä tehdä nytkään. Täytyy siis laskea laskuja harjoitustunneilla koulussa ja oikein ratkaistuista tehtävistä saa lisäpisteitä kokeessa. Tämäkään ei saa kaikkia laskemaan! Pitäisikö järjestää ilmainen oluttarjoilu laskuharjoituksiin? Koska harjoitustuntejakin on niukasti, jää opiskelijoiden laskurutiini vaatimattomaksi.

Eräs syy on varmaan myös se, että tekujen pääsykokeessa on viime vuosina supistettu runsaasti matematiikan osuutta. Sisään pääsee sellaisia, joilla nykyvaatimusten mukaan ei ole juuri edellytyksiä selviytyä opinnoista. Resurssien kaikinpuolista tuhlausta!

Totta kai poikkeuksiakin löytyy; onhan toki hyviäkin joukossa. Lisäksi jonkinlainen ilonaihe ovat ulkomaalaiset, joiden laskutaito on keskimäärin ottaen parempi kuin suomalaisten. Porukkaa on Kiinasta, Venäjältä, USA:sta, Unkarista ja Itävallasta; osa vaihto-opiskelijoita, mutta suurin osa käy läpi koko nelivuotisen insinöörin koulutusohjelman. Tietotekniikka on houkutin, ehkä myös Nokia. Kiinalaiset ovat kertoneet, etteivät he saa käyttää kaavakokoelmia, vaan kaavat on opetettava ulkoa. Kävin EU-opettajavaihdossa, opiskelijoiden keskimääräinen laskutaito oli huomattavasti parempi kuin täällä – mutta siellä onkin kunnan karsinta paikalliseen AMK:hon.

Ammattikorkeakoulujen tekniikan alan opiskelijoista kolmannes on lukenut lukion lyhyen matematiikan. Trigonometria-vektorit -perustan puuttuminen lukion nykyisestä OPS:sta on heille melkoinen opintoja vaikeuttava ongelma. Arvelisin, että tilanne on saman kaltaisen myös yliopistoissa ja teknillisissä korkeakouluis-

sa matematiikan ja luonnontieteiden osalta. Tämä lyhyen matematiikan asia koskee tuhansia teknisten alojen opiskelijoita vuosittain. Oman ongelmansa muodostavat ammattioppilaitoksista tulevat opiskelijat. Heitäkin on kolmannes AMK:n tekniikan opiskelijoista. Näiden opiskelijoiden matematiikan osaaminen on käytännössä peruskoulutasoa. Opetuksen eriyttäminen on ollut melkoinen työ, eikä se ole aina onnistunut. Tosin jotkut ammattioppilaitoksista tulevat opiskelijat ovat erittäin lahjakkaita ja motivoituneita.

Ammattikorkeakoulusta löytyy insinööriopiskelijoita, joille tilavuuden käsite on epäselvä; he eivät osaa laskea pinta-alaa, jos tunnetaan tilavuus ja korkeus.

Kokemuksia teknillisestä oppilaitoksesta

Oppilaiden perustiedot ovat osoittautuneen niin puutteelliseksi, että kaiken tarvitsemamme matematiikan opetamme alusta alkaen. Teknikkokoulutukseen ei tule oppilaita, jotka ovat hyviä matematiikassa. Monet tulijat osaavat joukon temppuja, mutta eivät itse asioita. Kaikkien matematiikan alueiden käsittely on aloitettava perusteista asti (myös ylioppilailla). Lukio opettaa kaksi pahaa asiaa:

1. En osaa, enkä opikaan.
2. Voisiko tästä lintsata?

Näistä poisopettamien on työlästä.

Teknillisen opiston opettaja, joka ei suostunut alentamaan matematiikan osaamisen vaatimustasoa lujuuksopetuksessa, sai nuhteet opetusviranomaisilta. Ehtoja ei saa antaa eikä luokalle jättää, vaikkeivat oppilaat osaisikaan oppisisältöjä. Kaikki vain insinööreinä lujuuksia suunnittelemaan vaikkei ole hajuakaan miten lasketaan! Opettaja painostettiin hyväksymään Gaussin käyrän mukaisesti tenttejä tuloksista riippumatta! Tällöin oli kyse jo ammatin vaatimasta tiedosta ja taidosta eikä perusopetuksen tasosta.

Esimerkkejä eri oppilaitoksista

Kauppaoppilaitoksessa peruslaskutoimitusten hallinta on olematonta, päässälaskutaito surkeaa ja matematiikan inhoaminen on yleistä.

Terveystieteiden oppilaitoksessa päässälaskutaito on olematonta, suuruusluokan arviointi ei onnistu. Laatuja ei osata muuntaa. Asenne matematiikkaa kohtaan on joko inhoava tai pelokas. Monien mielestä matematiikalla ei ole mitään tekemistä jokapäiväisen elämän kanssa.

Maatalousoppilaitoksessa suureyhtälöistä ei osata laskea muuta kuin valmiiksi ratkaistu suure.

Metsäoppilaitoksessa on enemmän sanallisia laskutehtäviä, joten pitäisi erityisesti osata soveltaa. Useissa ammattiaineissa vaaditaan melko korkeatakin matematiikan osaamista.

Kokemuksia peruskoulusta ja lukiosta

Lyhyen matematiikan abiturientti ei ensin tuntenut potenssimerkintää $x^2 \cdot x$:lle. Tämä selvitettiin ja sitten, nähtyään lausekkeen $-x - x$ hän luuli, että se on $-x$ toiseen potenssiin.

Lyhyen oppimäärän lukiolaisista merkittävä osa ei pysty ratkaisemaan yksinkertaista ensimmäisen asteen yhtälöä, tyyppiä $3x = 5$.

Tuntimääristä

Pitäisikö tuntimääriä lisätä? Tämä ratkaisu tulee tietysti ensimmäiseksi mieleen. Ongelma on kuitenkin monimutkaisempi ja vaatii syvällisempää pohdiskelua kuin vain tuntimäärien lisäämistä, joka sekin voi olla osa ratkaisua. Tuntimäärien supistamista ovat valittaneet lähes kaikkien aineiden edustajat. Asia on siis yhteinen kaikille hyvään kokonaistulokseen pyrkiville opettajille ja kouluttajille aineesta riippumatta. Tuntimäärien lisäystä yritimme korkeakoulussa aikoinaan, kun huomasimme, ettei porukka osannut lukion lyhyen oppimäärän asioita vaikka oli päässyt korkeakouluun vain, jos oli ylioppilaskirjoituksissa saanut vähintään cumun lyhyestä matematiikasta. Teimme testejä osaamisesta ja järjestimme vapaaehtoisia tukiopetuskursseja lukion oppimäärästä niille, jotka testien mukaan ja omastakin mielestään sitä tarvitsivat. Oppilaat olivat jopa innostuneita täydentämään osaamistaan, pisteitä ei saanut. Myöhemmin muita seuraten korkeakoulu päätti, että kaikkien pitää suorittaa pakollinen matematiikan (laskennon) oppimäärä, 4 opintoviikon laajuisena. Se synnytti lähes kapinan tai ainakin loi uskottoman vihamielisen asennoitumisen matematiikkaa kohtaan, joka katsottiin ”syylliseksi” päätökseen. Kielteistä asennoitumista tuki aineiden välinen kilpailu, olihan matematiikalle uhrattu opintoviikkojen määrä pois jostakin muusta. Kolmannes oppilaista oli avoimen vihamielisiä, kolmannes oli kiinnostuneita ja asiansa hyvin hoitavia, vaikka sosiaalinen paine vaikutti heihinkin, ja kolmannes vain halusi jotenkin saada kurssin pois alta.

Tasovaatimukset

Tulisiko kiinnittää enemmän huomiota tasovaatimuksiin ja vaatimusten toteutumisen kontrollointiin?

Miten ennen?

Ei kai perusopetuksen puitteissa voida lähteä erikoistamaan opetusta niin kuin erikoislukioissa? Aikaisemmin asia hoitui arvosanojen jouston avulla. Oppilaat saattoivat ”erikoistua” kutakin kiinnostaviin aineisiin siten, että hankkivat toisista parhaat arvosanat ja jättivät toiset alimmalle tasolle. Jokainen opettaja löysi hyviä ja huonoja oppilaita katraastaan ja huomio kiinnitettiin hyvien oppilaiden tasoon. Ylhäältä annetut tasovaatimukset olivat myös hyviä oppilaita ajatellen laadittu niin, että arvosanojen erilaisuudessa oli järkeä sekä osaamisen tason mittarina että tarvittavan jouston toteuttamisessa. Tässä suhteessa tasa-arvostaminen arvosanoissa ja vaatimusten asettamisessa aineen kannalta huonoimpien tai aineesta vähiten kiinnostuneiden oppilaiden ”mielentilan” kannalta optimaaliseksi on ollut tuhoisaa. Sitä ei korjata tuntimäärillä vaan oppilas-kohtaisella joustolla.

Opetusmenetelmistä

Myös opetusmenetelmät ovat tärkeitä jouston aikaansaamiseksi ja työskentelyn tehostamiseksi. Onko kokeilutoiminta tässä asiassa vireää ja tuloksellista vai onko alan tutkimus vain pieniä yksittäisiä asennekyselyjä?

Laskimen käyttö

Lyhyen matematiikan lukijat haluaisivat käyttää laskinta kaikessa. Esim. ei osata katsoa lukujen $1, 2 - \sqrt{7}, 4, 2 + \sqrt{7}$ suuruusjärjestystä ilman laskinta. Osittelu-lakien soveltaminen on aivan outoa.

Jakaantuuko oppilasaines kahtia?

Tämä on näppituntuman havainto. Dimensiossa julkaistavat tilastot osoittavat pitkän matematiikan ykköskirjoittajien jakautuneen kahteen kastiin riippuen siitä, onko kirjoitettu pakollisena vai ei.

Asennoituminen

Monet ovat huolissaan siitä, että liian moni oppilas etenkin keskitason lukioissa yrittää päästä helpolla ja tyytyy huonompaan kurssiarvosanaan kuin mitä kyvyt todellisuudessa edellyttäisivät. Asettavatko nuoret tavoitteensa liian korkealle ja jos näihin ei yllätä, antavat periksi liian helpolla? Eikö ”hyvä keskitaso” kelpaa? Monien asenteet matematiikkaa kohtaan ovat aika hirveät.

Oppikirjat

Ovatko oppikirjat tulleet liian yksityiskohtaisiksi? Matematiikan oppikirjoissa on niin paljon valmiiksi laskettuja esimerkkejä, että luulisi itseopiskelun olevan kohtuullisen helppoa. Vuonna 1962 käytettyjen matematiikan oppikirjojen sivumäärä oli noin 300. Tällä hetkellä uskoisin sivuja olevan noin 1 000! Lisäksi nykyisten taulukkirjojen kaavakokoelma piti osata ulkoa.

Fysiikka

Syynä matematiikan tason putoamiseen on oppimiskäsitys, jossa pohdiskellaan loputtomasti eikä tehdä lapsille selväksi mitä pitää muistaa ulkoa. En tiedä ”kuka Perkele” on saanut ensimmäisenä päähänsä, että murtolukujen yhteenlasku on helpointa siten, että keksitään säännöt joka ainoa kerta piirtelemällä uudestaan kokonaisia ja osia sen sijaan, että vaadittaisiin säännön osaaminen ulkoa!

Voiman komponentti on aina $F \sin \alpha$ tai $F \cos \alpha$. Lukion toisluokkalaisista ei juuri kukaan osaa sanoa kumpi on kumpi. No minähän opetan asian viimeinkin ”kunnolla”: piirrän suorakulmaisen kolmion ja ilmoitan sopimukset. Sanon vielä, että teidän kannattaisi käyttää muutama minuutti kotona siihen, että muistatte: sini vastainen . . . tai te sotkette tätä koko lukio-aikanne (omasta mielestäni hyvin toimittu). Vuosi toisensa perään sama lopputulos: lähes kaikki valitsevat sotkemisen!

On anteeksiantamatonta, että samat ihmiset, jotka ovat valmiita opettelemaan vieraiden kielten tuhansia sanoja on totutettu siihen, että he eivät voi opetella matematiikasta pariakymmentä sääntöä, joilla pärjäisi jo aika pitkälle.

Toinen asia, joka on mennyt ”ongelmanratkaisun” mukana metsään on laskurutiinien huono hallinta. Matemaattisen ajattelun kielenä ovat rutiinit. Jos ei ole niitä, ei ole kieltäkään. Jos ei ole ajattelun välineitä, ei ole ajatteluakaan.

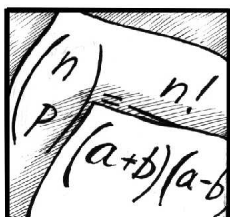
Omissa testeissäni suunta huonompaan alkoi 1990-luvun puolivälissä. Matematiikan heikko osaaminen näkyy fysiikan laskuissa esiintyvänä alkeellisina virheinä ja siinä, että asioiden perustelu on puutteellista. Johdonmukainen ajattelu puuttuu. On melko työlästä saada oppilas ajattelemaan ja pyrkimään kohti asioiden ymmärtämistä, ei ulkolukua.

Osaamistason seurantatutkimus

Tuohi, Helenius, Hyvänen: Tietoa vai luuloa – insinööriopiskelijan matemaattiset lähtövalmiudet. Turun ammattikorkeakoulu, 2004, 110 s + 12 liitettä (Turun ammattikorkeakoulun raportteja; 29)

Tekijät ovat seuranneet aloittavien opiskelijoiden matematiikan osaamistasoa testillä, jota on toistettu vuodesta 1999 lähtien. Tuloksista havaitaan, että matematiikan osaamisen taso on heikentynyt.

Tutkimuksessa todetaan, että lukion oppimäärän suorittaneet osaavat matematiikkaa huomattavasti paremmin kuin ammatillista reittiä opiskelemaan tulleet. Eri koulutusohjelmien insinööriopiskelijoiden lähtötasovalmiuksissa on merkitseviä eroja. Samaa testiä tehtiin myös Teknillisessä korkeakoulussa, nämä opiskelijat menestyivät kokeessa merkitsevästi paremmin kuin ammattikorkeakoulussa aloittavat opiskelijat. Tutkimuksessa selvitettiin myös opiskelijan oman osaamisen arviointia. Monet opiskelijat uskoivat ratkaisunsa varmasti oikeaksi, vaikka se olikin virheellinen.



Kaksi askelta taaksepäin

Seppo Visti

Lehtori

Nikkarin lukio, Kerava

Viime vuosien oppimiskäsitys on korostanut tiedon hakemisen osaamista ja asioiden hallitsemista mahdollisimman yleisellä tasolla sen sijaan, että päähän pöntätään ”nippelitietoa”. Nykyään ihmisten ei tarvitse tuntea koivua ja leppää erilleen, kunhan he hallitsevat asian yleisellä tasolla: Suomessa on monia erilaisia puita. Goethea ei tarvitse tietää saksalaiseksi kirjailijaksi. Riittää, kun osaa hakea tietosanakirjasta C:n, G:n tai K:n kohdalta.

Se joka suosittelee laajoja kokonaisuuksia sirpaletiedon sijaan ja ajattelua mekaanisen harjoittelun tilalle saa ymmärtävää hyminää osakseen. Itse odotan kuitenkin hartaasti uutta guraa, joka kertoisi meille, että tieto on maailmalla pieninä palasina kuin leipä Tapsa Rautavaaran vanhassa laulussa. Todellinen suurguru kertoisi, että kaikki tieto on nippelitietoa, josta vasta voi muodostua suurempia kokonaisuuksia.

Matematiikassa uusi ajattelu merkitsi ennen kaikkea ongelmakeskeistä lähestymistapaa, jossa ongelman ratkaiseminen vaatii tietyt matemaattiset rutiinit. Kyseiset laskurutiinit sitten opitaan ikään kuin huomaamatta kaupanpäällisiksi. Vähemmän vaativissakin ”ongelmissa” tehtävä muotoillaan mahdollisimman usein johonkin käytännön tilanteeseen sopivaksi sanalliseksi kysymykseksi. Mekaanista harjoittelua vähennettiin oleellisesti ja ainakin lausumattomana toiveena oli, että kaikenlaisten sääntöjen entisenlainen

päähän pönttääminen ei ollut samassa määrin tarpeen, koska oppimisprosessi oli nyt sellainen, että sääntö nousi siitä itsestäänselvytyksenä ilman erityistä ulkoluokaa.

Matematiikan osaamistason romahtamiseen (näin voi varmasti sanoa) syytä on ilmeisesti muitakin, mutta olen vakuuttunut, että edellä kuvattu lähestymistapa vie metsään ja yritän selvittää, miksi. Lukiotulokkaisuista huomattava osa ei osaa laskea murtoluvuilla. Siis esimerkiksi $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ on mitä milloinkin. Näin ei ollut viisitoista vuotta sitten.

Murtoluvut pitäisi opettaa niin, että kaavat toki perustellaan (kerran). Saadut säännöt vaaditaan ulkoa osattavaksi ja sitten lasketaan! Esimerkit eivät ole ”käytäntöön liittyviä ja ajattelua opettavia”, vaan paljailla luvuilla tapahtuvaa yksinkertaista harjoittelua, jota ei rasita ”sanallisuus”, ja niitä ehditään käydä läpi suuri määrä, jolloin oppilaat oppivat vähitellen käyttämään osaamistaan laskusääntöjä. Opettaja on tässä harjoittelussa parhaimmillaan: hän tietää tarkasti, mitä on opettamassa, kun taas ”ajattelua” opettaessaan hänellä ei ole aavistustakaan, mitä kunkin päässä liikkuu. Ja ennen kaikkea oppilas tietää, mitä häneltä vaaditaan: laventamisen, supistamisen ja kolmen laskusäännön hallinta. Yleinen harhaluulo on, että oppilaat kokevat toistuvan harjoittelun tylsänä. Oman kokemukseni mukaan oppilaat kokevat palkit-

sevana minkä tahansa laskemisen, joka heiltä sujuu.

Pyrkimys käytännönläheisyyteen on kaksiteräinen miekka: Se näyttää selkeästi, mihin kulloistakin opetettavaa laskurutiinia voidaan käyttää ja motivoi oppilaita jossain määrin – ei tosin niin paljon kuin opettajat luulevat. ”Pekka kulkee matkasta 1/3 jalan, 1/5 pyörällä ja loput mopolla...” Sana mopo villitsee vähemmän kuin luullaan. Toisaalta esimerkit ovat pakostakin liian yksinkertaisia. Oppilas vilkaisee kirjan pikku tehtävää, laskee samoin ja saa oikean tuloksen ilman, että hän oikeastaan tietää, mitä teki ja miksi. Väitän, että murtolukuja, yhtälöitä, potenssilausekkeita ja mitä tahansa algebrallisia struktuureja pitää harjoitella vaikeammilla lausekkeilla kuin ”käytännön tarve” vaatii. Laskurutiinien hyvä hallinta on nähtävä itseisarvona sen sijaan, että joka käänteessä mietitään, mihin tätä tarvitaan käytännössä.

Yhtälöiden ratkaisun opettamisessa pyritään siihen, että oppilaat eivät pelkästään ratkaise yhtälöitä, vaan tietävät joka hetki mitä tekevät. Päämäärä on kunnioitettava, mutta menetelmä ei toimi: oppilaat tietävät kenties paremmin kuin ennen, miksi tempu tehdään – tehdä he eivät osaa. Jos autokoulussa vaihteiden käyttöä opetettaisiin niin, että ajo-oppilaan pitäisi aina ennen vaihtamista selittää, mitä ”konehuoneessa” tapahtuu, kestäisi autokoulu vuosia.

Nykykäytännön mukaan yhtälöitä ratkaistaessa pyritään yhteys ns. vaakamalliin säilyttämään mahdollisimman pitkään, jotta laskija tietäisi, mitä tekee ja miksi. Tällöin termejä vähennetään ja niitä lisätään yhtälön molemmille puolille sen sijaan, että välittömästi tulkittaisiin toimenpiteiden merkitsevän termien siirtelyä ja etumerkkien vaihtamista tuttuun tapaan. Oppilaiden pitäisi heikoilla algebran taidoillaan pystyä tekemään murtolausekkeet samannimisiksi sen sijaan, että nimittäjät kerrotaisiin pois. Jos kokonaislukujen allekkain kertomisessa oltaisiin yhtä tunnollisia, pidettäisiin tarkkaa kirjaa, milloin kerto- ja kolmonen edustaa ykkösiä, milloin satoja. Asian ymmärtäminen olisi varmaan huippuluokkaa – kertolaskujen tulokset mitä sattuu.

Yhtälöitä pitäisi siis sieventää tehokkaimmilla mahdollisilla tavoilla: kertoa nimittäjät pois, siirrellä merkkiä vaihtaen tuntemattoman sisältävät termit vasemmalle ja vakiot oikealle. Oppilaille kerrotaan, missä järjestyksessä toimenpiteet suoritetaan ja sitten alkaa harjoittelu, jossa mennään niin hankaliin yhtälöihin kuin mahdollista. Miksi luokan heikoimpien pitäisi aina ponnistella kykyjensä ääri rajoilla ja parempien loistaa kirjan yksinkertaisia esimerkkejä matkien ilman, että he rasittaisivat itseään juuri lainkaan? Ei kannata murehtia sitä, missä hankalahkoja yhtälöitä tarvitaan – ei ehkä koskaan missään. Joka tapauksessa niiden ratkominen on oiva tapa kehittää oppilaiden vaatimattomia algebran taitoja.

Potenssioppia hallitaan niinikään toivottoman huonosti. Harva oppilas osaa kertoa kuhunkin tilanteeseen liittyvää selkeää sääntöä. Sen sijaan ajatellaan, että oppilaat johtavat (ilmeisesti joka kerta) kaavan $(a^m)^n = a^{mn}$ tiedosta $aaa = a^3$, jonka tyyppinen on ainoa (ja sinänsä arvokas) potenssiopin tieto, joka on jokseenkin kaikkien hallinnassa. Mainittu kaava ja muutkin vastaavat onkin yhtälöstä $aaa = a^3$ yleistettävissä ja se käy lukijoilta vaivatta. Valitettavasti vain useimmat 16-vuotiaat eivät näe yhtälöillä mitään sukulaisuutta. Oikea tapa opettaa asia on perustella kaavat (kuten nytkin) ja vaatia ne ulkoa. Harjoituksissa käytettäisiin runsaasti myös kirjainlausekkeita, jolloin oppilaiden olisi pakko sisäistää kaavat. Asia ei ole helppo, eivätkä läheskään kaikki opi potenssilausekkeita sujuvasti käsittelemään, kuten eivät oppineet ennenkään. Silti muutos nykyiseen olisi melkoinen, jos edes toinen puoli oppisi.

Mikä edellisessä sitten oli uutta? Ei yhtään mikään. Seuraavassa on koottu yhteen se, mitä kaksi askelta taaksepäin voisi merkitä:

1) Opettaja ottaa usein liian kunnianhimoisen tehtävän opettaessaan matemaattista ajattelua ongelmanratkaisun kautta. Menetelmä toimii tilanteissa, joissa tehtävä ratkeaa loogisin pohdinnoin ilman varsinaisia matematiikan taitoja (”Pisatehtävät!”). Sen sijaan on hölmöä idealismia uskoa, että oppilaat oppivat vaikkapa toisen asteen epäyhtälöiden hallinnan, kunhan heille esitetään pari ”ongelmaa” suorakulmion muotoisen vasikkahaan pinta-alasta tietyin ehdoin, jotka johtavat 2. asteen epäyhtälöön. Oppilaalla ei ole valitettavasti harmainta aavistusta siitä, mitä tämän mielenkiintoisen tehtävän oli määrä hänelle opettaa.

Opetuksessa on otettava nöyrempi asenne ja opetettava laskurutiinien hallintaa aikaisempaa enemmän sen sijaan, että pyrittäisiin suoraan huipulle ja korostettaisiin itse ajattelua ”tempujen” kustannuksella. Ei taidealan oppilaitoksissakaan opeteta ”taiteellisuutta”, vaan erilaisia tekniikoita; korkeintaan voidaan selittää, mitä ei ainakaan kannata tehdä. Käsittääkseni laskurutiinit ovat se kieli, jolla matemaattinen ajattelu tapahtuu. Ei kieltä – ei ajattelua.

2) Oppilaille on alakoulusta alkaen painotettava, että matematiikassa pitää tietyt asiat osata ulkoa. Ennen kaikkea asia pitää tehdä selväksi alakoulun opettajille, jotka kyllä arvostavat matematiikkaa, mutta ovat sen suhteen epävarmoja ja ulkopuolisista auktoriteeteista riippuvaisia.

3) Matematiikan konkretisointia on vähennettävä algebran opetuksessa! Vaatimus tuntuu järjettömältä, mutta kuinka oppilaan kyky abstraktiseen ajatteluun voi nousta, jos sitä ei yritetäkään nostaa? Op-

pilaiden algebrallinen osaaminen on usein pieniin kokonaislukuihin ankkuroitunutta vaistonvaraista toimintaa, joka voi sujuakin kohtalaisesti. Oppilas voi osata sieventää a^3a^4 , mutta, jos häneltä kysyy edellisen jatkona lausekkeesta $x^p x^q$, hänellä ei ole aavistustakaan, mitä siinä pitäisi tehdä. Hän osaa kertoa, että yhtälön $2x = 6$ ratkaisu on 3, mutta $ax = b$ ei enää hahmotukaan mitenkään!

- 4) Oppilaille tulee peruskoulussa opettaa esimerkkinä kaavasta ja sen soveltamisesta joku riittävän hankala esimerkki. Oma suosikkini on $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Se tarjoaa hyvän tavan kerrata potenssiopin laskusääntöjä ja ennen kaikkea riittävän abstraktin ympäristön opetella käsitteitä kaava ja kaavaan sijoittaminen. Luulisin, että vaikkapa toisen asteen

yhtälön ratkaisukaavan muistaminen ja siihen sijoittaminen ei lukiossa tunnu niin ylivoimaiselta, kun on jotain samankaltaista harjoitellut. Ennen binomin neliöstä jatkettiin Pascalin kolmion kautta vaikkapa binomin viidennen potenssiin ja tämä kahdeksantena kouluvuotena, joten aivan kohtuuttomasta vaatimuksesta ei pitäisi olla kysymys.

- 5) Algebran taidot ja aritmeettinen ei-soveltava osaaminen on nähtävä arvokkaampana matemaattisena pääomana kuin viime aikoina on totuttu. Oltiin ihanteellista, jos pystyisimme opettamaan nuorillemme hyvät laskennalliset valmiudet ja taidon soveltaa niitä. Jos mainittuja valmiuksia ei ole, ei voi olla jälkimmäistäkään. Juuri se on tilanne tällä hetkellä, joten, ”jotain tarttis tehdä”.



Perusmatematiikkako tarpeetonta?

Mai Allo

VTL, kansantaloustieteen st. tuntiopettaja

”Mitä varten koulussa pitäisi vielä nykyaikana opetella murtolukujen jako- ja kertolaskua, kun laskimet on keksitty kauan sitten?”

”Jos kerran grafiikkaohjelmilla voi yhdellä napin painalluksella piirtää mitä tahansa suorita tai käyriä, miksi niiden yhtälöt edelleen pitää pöntätä ja vielä piirtää lyijykynällä?”

”Onksun tarkoitus niinku palauttaa meiät takasin Kekosen aikaseen oppikouluun?”

Lauseet on otettu suoraan elävästä elämästä. Harmituksen purkauksia kuulee yliopiston käytävillä tai opiskelijain kahvitaulla, mutta vielä useammin koulujen vanhempainilloissa, kun innokkaat äidit ja isit ohjaavat pilttejään pienestä pitäen enemmän netin selailuun ja verkottumiseen kuin epämuodikkaisiin geometriaan tai aritmetiikkaan. Viimeksi mainitut kun eivät kuulosta dynaamisilta tietoyhteiskunnan osaamisalueilta.

Sato – tai paremminkin sen puute – korjataan yliopistoissa ja ammattikouluissa.

Kansantaloustieteen peruskurssilla luennoitsija ja laskuharjoitusten pitäjä käyttävät sitten lounastaukonsakin jälkien paikkaamiseen. Ei millään tahdota päästä itse asiaan, kuten talouskasvun perusteisiin, tieteenkriittisiin tai hyvinvoinnin indikaattoreihin. Ei, vaikka tämän tason opiskelijat ovat jo valmiiksi motivoituneita ja yrittävät parhaansa. Ei, vaikka sivuaineopiskelijoille suunnatuista taloustieteen kurssikirjoista on

enimmät kaavat karsittu pois ja pyritty intuitiiviseen, verbaaliin esitystapaan. Opintoja hidastavat juuri isot aukot perusmatematiikan osaamisessa.

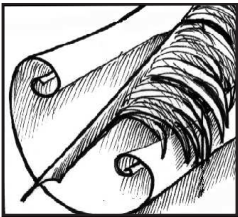
Kyllä, kansantaloustiede on yhteiskuntatiede. Kyllä, se käsittelee ihmisen luomaa järjestelmää ja inhimillistä toimintaa. Ei, matematiikka ei ole taloustieteessä pääasia. Mutta se on jokaisen ekonomistin tärkeä työkalu, tilastotieteen ohella. Ja kyllä, taloustieteilijät käyttävät pitkälle kehittyneitä matematiikkaohjelmia – mutta ohjelmaa käyttääkseen pitää tietää, mitä tekee.

Korjasin kesällä ison pinon sivuaineopiskelijain tenttejä. Olin kehottanut kaikkia kertaamaan ainakin suoran yhtälön. Yllätyksekseni monelle jo gradua tekeväälle opiskelijalle tuotti vaikeuksia muun muassa murtolukujen laskeminen. Tehtävän ymmärtämistä olisi selkeyttänyt tarkan arvon laskeminen, mutta moni turvautui koneeseensa ja käytti desimaaleja. Näin suoran piirtäminen tuli hankalaksi, mikä taas sotki itse asian ymmärtämistä. Niin ikään moni mielenkiintoinen asia – kuten suhteellisen edun teoria ja se, mitä se oikeasti sisältää – olisi auennut helpommin ja tarjonnut laajempia näköaloja, jos derivaatan käsite ja sen yhteys suoran kulmakertoimeen olisi ollut opiskelijan selkäytimessä.

Osa kurssini opiskelijoista on yrittänyt suorittaa kyseistä tenttiä useana vuotena, eri tentaattoreille, silti onnistumatta. Miten turhauttavaa opiskelijalle itsel-

leen, ja miten se viivyttääkään valmistumista – kurssi kun on esimerkiksi historian opettajiksi halajaville pakollinen. Nuorten älyssä ei ole mitään vikaa – he vain eivät ota uskoakseen, että ne tylsät, epämuodikkaat, vanhanaikaiset asiat pitäisi käydä pari kertaa läpi kynän ja paperin kanssa.

Kun kansantaloustieteen perustekniikka on hallussa, voi vapaasti siirtyä pohtimaan itse asiaa. Opituista matemaattisista metodeista voi aina sitäpaitsi luopua, jos ne eivät tunnu soveltuvan käsillä olevaan ongelmaan; kyllä ekonomistit käyttävät laadullisiakin menetelmiä. Mutta metodeita ei voi valita, kritisoida eikä hylätä, ellei ensin tiedä, mitä ne sisältävät.



Ranskalaisten akateemikkojen manifesti

Ranskassa on matematiikan kouluopetus noussut kii-vaan keskustelun aiheeksi. Akatemian jäsenet *Roger Balian*, *Jean-Michel Bismut*, *Alain Connes*, *Laurent Lafforgue*, *Pierre Lelong*, *Jean-Pierre Serre* ja Fourier-instituutin johtaja *Jean-Pierre Demailly* ovat kirjoittaneet kannanoton nimeltä *Perusosaaminen tieteen ja tekniikan tulevaisuuden pohjana* (*Les savoirs fondamentaux au service de l'avenir scientifique et technique*). Manifestin lyhyen yhteenvedon ovat koonneet ja kääntäneet *Marjatta Näätänen* ja *Tapani Kuusalo*.

Koulun merkitys, tie intellektuaaliseen toimintaan

Kirjoittajat ilmaisevat syvän huolestumisensa, he haluaisivat tarjota nuorille samat mahdollisuudet kuin mistä he itse ovat opiskeluaikoinaan nauttineet. On hyvin tärkeää, että kaikkia lapsia, heidän sosiaalisesta taustastaan riippumatta, opetetaan kärsivällisesti lukemaan, kirjoittamaan, laskemaan, olemaan tarkkaavaisia, tekemään omiakin huomioita, siten että he vähitellen tutustuvat kulttuuriin ja tieteen vuosisataisiin saavutuksiin. Kirjoittajat huomauttavat, ettei tie intellektuaaliseen toimintaan avaudu ilman ponnisteluja ja vaikeuksia. Opettajien on oltava sekä asialleen omistautuneita että samalla riittävän vaativia, niin että oppilaille koituisi tilaisuus kokea myös todellista älyllistä mielihyvää. Kirjoittajat käsittelevät myös maahanmuuttajien koulutuksen synnyttämiä haasteita ja toivovat, että tasa-arvoisesta koulutuksesta huolimatta Ranskan koulujen erittäin korkea taso voitaisiin säilyttää.

Huolestuttavat merkit kasaantuvat

Kirjoittajat toteavat huolestuttavien merkkien kasaantumisen. Heidän mielestään koulun ensimmäiset luokat luovat kaiken myöhemmän opiskelun perustan. Verratessaan nykyistä tilannetta aikaisempiin oppivaatimuksiin he toteavat oppimisen monilta osin myöhentyneen jopa vuosilla. Kirjoittajat toteavat, että yläasteelle tullessa osa oppilaista ei hallitse kunnolla äidinkieltään ja sen kielioppia, tai edes sen oikeinkirjoitusta. Äidinkielen heikko osaaminen heijastuu myös matematiikan ja luonnontieteiden opintoihin, sillä tarvittava päättely ei ole mahdollista ilman kielen kunnollista hallintaa. Äidinkielen opetuksen eri muotoja on karsittu, enää ei ääneenlukua harjoiteta yhtä paljon kuin ennen, runoutta ei opetella siinä määrin kuin ennen, sanavarastoa ei laajenneta, kielioppia ei opita kuten ennen, oikeinkirjoituksen harjoittelua on vähennetty. Oppilaiden oletetaan itse löytävän kieliopin säännöt tekstejä havainnoimalla. Oppilailla luettavat tekstit ovat niin banaaleja ja älyllisesti köyhiä, etteivät ne voi antaa heille tuntumaa oikeaan kirjallisuuteen. Peruslaskutoimitusten suhteen kirjoittajat ovat typertyneinä huomanneet, että niiden opetus on korvattu hiljalleen etenevällä prosessilla, jossa pelkkä yhteenlasku opetetaan ensin.

Desimaalilukujen jakolasku sekä kertolasku ovat hävinneet melkein kokonaan ala-asteen opetuksesta. Didaktisena ohjeena on, että ennenkuin itse laskutoimituksia opetellaan, tulisi oppilaille antaa tuntuma niiden merkityksestä. Kirjoittajien mielestä luvut ja niillä operointi saavat kuitenkin merkityksensä vain suhteessa toisiinsa. Esimerkiksi luku 342 on 3 kertaa 100 plus

4 kertaa 10 plus 2 (eli $342 = 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 2$). Kirjoittajat ovat huomanneet, että jos vertaa nykykoulua aikaisempien vuosien kouluun saa taantumuksellisen leiman. Kirjoittajien mielestä ongelmana eivät ole opettajat eivätkä lastensa parasta haluavat vanhemmat vaan se, että muutamat jopa vuosikymmeniä vallassa pysyneet henkilöt ovat soveltaneet totena pitämiänsä ideologioitaan eivätkä pysty myöntämään omia virheitään.

Kirjoittajat toivovat julkista väittelyä, he valittavat, että osa mediaa suhtautuu välinpitämättömästi tai jopa vähättelevästi niin oppimiseen kuin kulttuuriinkin samoin kuin opettajien rooliin sen välittäjänä. Kirjoittajat valittavat myös opetushallinnon organisoimaa reformitulua, jolla useimmiten ei ole mitään kosketusta ruohonjuuritasoon.

Oppisisältöjen väheneminen ja pirstominen, älyllisten arvojen halveksunta sekä kouluväkivalta eivät suinkaan ole yhteiskunnallisen kehityksen välttämättömiä seurauksia vaan ovat tietoisten koulutuspoliittisten valintojen seurauksia tilanteessa, jossa vakiintuneet sosiaaliset struktuurit ovat hajoamassa ja lapset jätetään usein oman onnensa nojaan. Kirjoittajien mielestä myös matemaatikkojen on kannettava vastuunsa tilanteessa, jossa pitkä, yli 30 vuotta kestänyt ”uudistusten” sarja on vavisuttanut koko julkisen koulutuksen perustaa. Ensimmäinen toteutettu uudistus oli siirtyminen ns. ”uuteen matematiikkaan”, jolla toki oli myönteisiäkin vaikutuksia. Samalla kuitenkin dogmaattinen formalismi valtasi matematiikan opetuksen ja kaikki aiemmin saavutettu pedagoginen kokemus hylättiin.

Ongelmalähiöiden äidinkielen opettajat ovat joutuneet toteamaan, etteivät lukion oppilaat enää hallitse kunnolla edes oikeinkirjoitusta tarkkaavaisuusongelmista nyt puhumattakaan. Tämä siitä huolimatta, että he ovat ennen lukiota käyneet koulua kolmisenkymmentä tuntia viikossa 10–12 vuoden ajan ja vaikka useimmilla heistä on ollut hyvät edellytykset myös omaksua koulussa saamansa opetus. Tällainen tulos on kirjoittajien mielestä kauhistuttavaa. Parempien asuinalueiden kouluissa tilanne on parempi, mutta sielläkin kaukana ilahduttavasta. Nuoret tietävät itsekin osaavansa vähemmän kuin vanhempansa. Heillä on tuskin mitään käsitystä kirjallisuuden historiasta, he eivät halua lukea säännöllisesti, ja selviytyminen 3–4 vuosittain luettavasta teoksesta tuottaa heille vaikeuksia. Monet maailmankirjallisuuden suuret kirjailijat, jotka olisivat voineet avartaa heidän maailmankuvaansa, jäävät tuntemattomiksi nykylukiolaisille. Oppilaat eivät enää opi juurikaan kirjoittamaan aineita ja esseitä, eivätkä oikein omaa kirjoittamisen taitoa. Historian suurten tapahtumien ajallinen järjestys on monille oppilaille tuntematonta, kuten edelsikö Napoleon Ludvig XIV:ttä, tai elikö Jeesus Ludvig XIV:n vai Rooman valtakunnan aikana. Sanotaan, että nykykielten opetus on parempaa kuin ennen, mutta kuinka usein tapaamme vierasta kieltä sujuvasti puhuvan ylioppilaan? Lisäksi Rans-

kassa muita kieliä kuin englantia (ehkä espanjaa lukuunottamatta) opetetaan yhä harvemmin. Toisaalta klasisten kielten latinan ja kreikan opetus, joka on suuresti rikastunut monen matemaatikonkin älyllistä koulutusta, on häviämässä Ranskan kouluista.

Myös matematiikan opetusta on lukiossa supistettu, niin että lukiossa ns. luonnontieteellisellä linjalla matematiikan tunneista on 30 vuoden takaiseen opetussuunnitelmaan verrattuna vähennetty puolentoista vuoden oppimäärän osuus. Oppilailta ei enää vaadita matemaattisten todistusten oppimista, eikä heille edes haluta näyttää, millainen kunnon todistus oikein on. He eivät opi täsmällisyyden ja tarkkuuden merkitystä edes määritelmässä, joita usein ollaan vain antavinaan. Asiat esitetään usein epäjohdonmukaisessa järjestyksessä. Lukion luonnontieteellisen linjan käyneiden valtava enemmistö tietää vain pienen joukon reseptejä ja toimintatapoja ilman, että niitä seuraa todellinen sisäistetty ja syventynyt ymmärrys. Nykyisin saattaa riittää, kun osaa laskimen avulla piirtää funktion kuvaajan ja löytää tästä joitain kvalitatiivisia piirteitä. Jos matematiikan ylioppilaskokeissa esitetään yllättävä kysymys geometriasta tai vaihdetaan koordinaattiakselit keskenään, seuraa kansallinen katastrofi, joka pääsee mediaan ja televisioon ja johon ministerin on puututtava. On suorastaan ihme, että vielä nykyäänkin jotkut opettajat onnistuvat innostamaan oppilaita matematiikkaan ja luonnontieteisiin. Tähän liittyy erittäin tärkeä luonnontieteellistä koulutusta vaativille aloille hakeutuvien määrän väheneminen, eikä tiedetä, kauanko tämä jatkuu, ellei nykytilanne parane.

Koulun antamien puutteellisten valmiuksien takia matematiikan ja fysiikan korkeakouluopinnot osoittautuvat monille aivan liian vaikeiksi, mikä on johtanut opiskelijamäärien selvään vähenemiseen kaikissa luonnontieteellisissä koulutusohjelmissa. Jopa ns. ”suuriin kouluihin” valmistavien erityisluokkien opettajat kertovat, etteivät heille tulevat oppilaat aina ymmärrä, mitä todistaminen oikeastaan tarkoittaa eivätkä aina tunne edes loogisen ajattelun peruseräiteitä. Valmistavilla luokilla nämä lukion jättämät aukot onnistutaan kuroma kokoon, tosin vain pääosin. Niinpä jopa École Normale Supérieureen ja École Polytechniqueen hyväksytyt ylioppilaiden tiedoissa saattaa olla hämmästyttäviä puutteita. Tilanne on tietysti vielä huonompi tavallisten yliopistojen osalta, joissa opintovaatimuksia on jouduttu laskemaan niin määrällisesti kuin laadullisestikin.

Kirjoittajat kiinnittävät huomiota kouluun myös sosiaalisen nousun väylänä ja toteavat, että erityisen vaikeita ongelmia syntyy maahanmuuttajien suhteen; heillä ei aina ole tarvittavia opiskelutraditiota ja -ambitioita eikä aina edes luottamusta opiskelun merkitykseen. Kirjoittajien mielestä niin opettajat kuin oppilaatkin ja samalla koko kansallinen koulutusjärjestelmä ovat harjoitetun politiikan uhreja. Opettajien auktori-

teetin heikentäminen kouluavustajien lukumäärän samalla pienentyessä on johtanut väkivallan ja kiusaamisen lisääntymiseen, tämän kohdistuessa monissa oppilaitoksissa sekä opettajiin että oppilaisiin, jotka haluaisivat tehdä työtä. Toisen asteen koulutuksen laajeneminen koko ikäluokan kattavaksi on johtanut tason laskuun paitsi kouluissa myös yliopistoissa. Suuria koulu-uudistuksia on tehty paljon ja suuria riskejä on otettu joka kerralla.

Parannusehdotuksia

Olisi myönnettävä, että koulun päärooli ja olemassaolon oikeutus ovat opetus, perustietojen siirto ja älyllisten kykyjen kehittäminen. Jotta koulu antaisi kaikille tasaveroisesti mahdollisuudet, tarvitaan avustajia ja koulun jälkeen apua niille, joiden perheet eivät voi auttaa lapsiaan tehtävissä. Koulun ei ole tarpeen juosta tekniikan tai tieteen viimeisimpien saavutusten, kuten ei muidenkaan muoti-ilmiöiden perässä. Koulun rooli on antaa perustietoja. Vasta perehtyminen humanismin vuosisatojen keskeisimpiin saavutuksiin mahdollistaa syventymisen myös tieteisiin ja tekniikkaan. Koulun tulee tietenkin seurata myös nykyaikaa, kuitenkin muotivirtauksia karttaen.

Oppiva lapsi ei vie muilta mitään pois. Siksi koulutusohjelmien vaatimustason laskemista ei voi perustella tasa-arvolla. On voitava luoda diversiteettiä jo yläasteelta lähtien, joillekin abstraktimpaa, toisille kädentaitoja, urheilua tai taidetta – kuitenkin niin, että saadulla koulutuksella on arvoa työmarkkinoilla. Tasa-arvon periaate ei saa myöskään estää oppilaiden arviointia, päinvastoin. Oppilasarvioinnissa tulee soveltaa selkeää periaatetta: hyviä arvosanoja saa, jos oppii hyvin, huonoja, jos huonosti. Kansallisten kouluviranomaisten tulisi alkaa soveltaa arviointia itseensä, erityisesti tekemiinsä uudistuksiin. Erilaisten opetusmenetelmien tuloksia pitäisi jatkuvasti verrata toisiinsa, kuten nykyisiä entisiin, ja myös muissa maissa käytettyihin opetusmenetelmiin. Tarvittaisiin riippumaton elin tätä varten. Opettajien tulisi olla vapaita opettamaan haluamallaan menetelmällä, heidän tuloksiaan tulisi tarkastella vain oppilaiden tulosten perusteella, ei sen perustella, miten hyvin tämä menetelmä soveltuu kansallisen opetushallinnon dogmeihin. Koululaitokselle pitäisi myös antaa tilaisuus saavuttaa vakaa tila eikä uudistuksia siten pitäisi tehdä liian tiheästi. Koska opetus on kehittynyt vuosisatojen, jopa tuhansien ajan, niin juuri lukemisen ja laskennan opetukseen on vaikeaa tehdä todellisia parannuksia tuovia uudistuksia. Koulu ei toimi, ellei opettajia arvosteta. Kaikissa perheissä lapsille tulisi selvittää, että koulun tarkoituksena on antaa juuri heille paremmat mahdollisuudet. Vanhempien tulisi valvoa, etteivät lapset joudu television ja videopelien valtaan, vaan että

heitä rohkaistaan lukemaan ja tekemään työtä. Kerhot, tieteellinen ja kulttuurinen harrastus voivat auttaa tässä. Luokat voivat toimia hyvin vain, jos oppilasaines ei ole liian heterogeenistä. Kun päätetään lapsen siirtämisestä seuraavalle luokalle, niin vanhempien mielipide ei, heidän hyvästä tahdostaan huolimatta, voi olla kuin neuvoa-antava, ei koskaan päättävä.

Kirjoittajat ovat kuulleet venäläisten yliopistotutkijoiden kauhistuksesta näiden todettua amerikkalaisen koulun tason. Venäläiset reagoivat tähän luomalla eräälle epäsuotuisalle asuinalueelle oman, tavanomaisesta amerikkalaisesta koulusta huomattavasti vaativamman koulunsa, käyttäen siellä venäjää ja muistakin kielistä käännettyä oppimateriaalia. Kansallisten oppivaatimusten tulisi Ranskassakin olla vain minimejä ja oppilaitoksilla tulisi olla mahdollisuus pitää vaatimustaso tätä korkeammalla.

Äidinkieli on kaiken perusta

Kirjoittajat käsittelevät pitkään ranskankielen osaamisen ongelmia. Ensiksikin tulisi hallita oikeinkirjoitus, kielioppi ja osata kirjoittaa eritasoisia tekstejä. Tieteellinenkin ajattelu muodostuu lopulta kirjoittamalla. Myös kaunokirjallisuutta tulisi lukea, sillä runouden kautta kauneuden taju kehittyy. Ajatuksen estetiikkaa löytyy myös matematiikasta, vaikkakin siellä ehkä vaikeammin lähestyttävissä.

Muu perusopetus

Lukemisen jälkeen perustietoa on luvut ja niillä opointi, neljä peruslaskutoimitusta. Tästä lähtee myös suuruuden ja tilan hahmottaminen; konkreettisten esineiden tutkiminen, looginen ajattelu, kommunikointi muiden oppilaiden kanssa, lukujen käyttö käytännön tilanteessa, kuviot, kirjoituksen käyttö havaintojen synteessissä, pienet piirroukset ja graafiset esitykset. Luonnontieto, maantieto, kielet (myös muut kuin englanti) ja historia ovat myös tärkeitä. Kädentaitoja tulisi harjoittaa, myös geometriassa, eikä vain käsitellä tietokoneita. Tämä lista ei tarkoita, että kirjoittajat haluaisivat lisätä oppisisältöjä. Näin ei ole.

Ala-asteella pitäisi keskittyä äidinkieleen, laskemiseen ja geometriaan, aloittaa luonnontieteelliset kokeet, ympäristöoppi, historia, maantiede, käden taidot, yksi vieras kieli. Myöhemminkin äidinkieli on tärkeä, eikä oppilaita, jotka eivät hallitse hyvin äidinkielen perustietoja, lukemista ja kirjoittamista, pitäisi päästää etenemään ylemmille luokille. Muut aineet olisivat matematiikka, historia ja maantiede, elävät kielet, fysiikka ja teknologia, luonnontieteet, käden taidot, valinnallisena latina tai kreikka. Linjajakoa käytettäisiin myös.

Todelliset kokeet ovat tärkeitä hankittujen tietojen selvittämiseksi.

Joka tapauksessa pitäisi antaa etusija oppimisen syvyydelle ja laadulle sekä tarkkuudelle, ne ovat tärkeämmät kuin ohjelmien täsmällinen sisältö. Matematiikasta tulisi hallita hyvin jokin osa, määritelmiseen, teoreemoineen, todistuksineen.

Matematiikan opetus ala-asteella

Luvut ja laskutoimitukset tulisi opettaa yhdessä, edeten helpoista vaikeampiin tapauksiin. Desimaalilukuihin ja murtolukuihin tulisi tutustua, käyttäen suhteen käsitettä. Päässälaskua tulisi harjoittaa. Nykyisin sattuu mediassa karkeitä virheitä, jotka aiheutuvat huonosta peruslaskutoimitusten tai suuruusluokkien ymmärtämisestä. Laskinten ei tule korvata peruslaskutoimitusten harjoittelua, päässälasku ja suuruuden arviointi on usein nopeampaa kuin laskimen esiinotto ja käyttö – jossa usein tulee virheitä. Pitäisi oppia välttämään sokeaa uskoa koneen näyttämään tulokseen. Lukujen ja suuruussuhteiden yhteys tulisi säilyttää ja aloittaa geometria ensi luokalta. Tilavuuden kaavoja voi kokeilla ontoilla muoteilla ja vedellä sekä yksinkertaisilla mittalaitteilla.

Matematiikan opetus yläasteella

Matematiikan opetus ei saisi olla pelkkiä reseptejä. Todistuksia ja deduktiivista päättelyä tulisi harjoittaa. Minimivaatimuksia tulisi olla: 1) lukujen hallinta, suuruusluokat ja suhteet, potenssi, eksponentti, n :s juuri, 2) tasogeometriaa todellisten todistusten avulla, trigonometrian alkeet, 3) aritmetiikkaa (alkuluvut, murtolukujen sieventäminen ja niillä laskeminen, Eukleideen algoritmi, irrationaaliluvut, ...), 4) algebrasta matalasteisten polynomien käsittely, tekijöihinjako ja sievennys, lineaariset yhtälöt ja epäyhtälöt, joissa on yksi tai kaksi tuntematonta, 5) vähän todennäköisyyslaskentaa ja nimityksiä kuten keskiarvo, frekvenssi, ...

Lisäksi suorakulmainen koordinaatisto, virheen arviointi, lineaaristen ja affiinien funktioiden kuvaajat, toisen asteen funktion kuvaaja, porrasfunktiot, ... Kyse on tässäkin ennemminkin laadusta kuin määrästä. Ohjelmien on oltava koherentteja ja hyvin rakennettuja, ylen heterogeenisiä ryhmiä on vältettävä, oli sitten kyse tasosta tai motivaatiosta.

Opetuksen henki

Opetuksen henki on melkein pä sisältöä tärkeämpi. Yksi matematiikan opetuksen päämääristä on päättelyn ja tarkkuuden oppiminen. Kurssin on oltava täsmällinen.

Uusia käsitteitä ja aksiomia on esitettävä mahdollisimman säästeliäästi, vain sellaisia, joita ei voida johtaa muista ja joita todella tarvitaan. Aina kun uusi käsite otetaan käyttöön, on se tehtävä hyvin selkeästi. Oppilaille on selvitettävä, milloin on kyse määritelmästä, milloin teoreemasta, milloin todistuksesta. Nämä tulisi oppilaiden myös oppia ja osata tehdä todistukset, aluksi helpot. Logiikan sääntöjä on korostettava, esimerkiksi, ettei implikaatio ole sama kuin ekvivalenssi, että on ero sanojen ”ja” ja ”tai” välillä, ristiriitaan päätyminen, vastaoletuksen käyttö.

Matematiikan – ja intellektuaalisen kasvatuksen – toinen päämäärä on, että oppilaiden tulisi hyväksyä vain se, minkä osaavat itse todistaa. On parempi käyttää vähän täysin todistettua kuin paljon valmiina otettua. Ellei jotain keskeistä tulosta todellakaan voida todistaa luokassa, tulisi se kuitenkin aina perustella mahdollisimman hyvin. Kolmas päämäärä on, että oppilaat oppivat abstraktion voiman. Merkintöjen suhteen on rajoitettava tarpeellisiin.

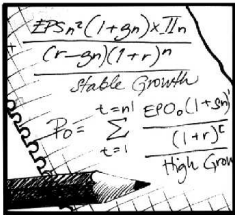
Laskenta ja uusi teknologia

Tieteelliset ja ohjelmoitavat laskimet ovat nykyisin helposti saatavana – mutta se ei oikeuta niiden käyttöä enenaikojaan luokassa. Jos laskinta aletaan käyttää liian aikaisin, ei oppilas opi päässälaskua ja peruslaskutoimitusten hallintaa. Näitä ei kuitenkaan mikään voi korvata, sillä ne valmentavat algebralliseen laskemiseen. Heikko laskutaito on nykyisin este monelle yliopistopiskelijoilta. Vain harvoin tarvitaan niin monimutkaisia laskuja, että laskin on välttämätön ala-asteella – tehtäköön laskutehtävät niin, että ne vastaavat oppilaiden tasoa. Myöhemmin, esimerkiksi kun laskuissa esiintyy luku π , voi käyttää likiarvoa $\frac{22}{7}$.

Jo yläasteelta alken tilanne on toinen, kokeellisissa tieteissä voidaan käyttää laskinta, oppilaat ovat jo silloin oppineet perusasiat. Tietokoneiden käyttö on nykyisin yleistä. Ala-asteellakin voidaan tutustua tietokoneen joihinkin käyttötapoihin, varsinkin sellaisina aikoina, jolloin oppilaiden tarkkaavaisuutta on vaikea kiinnittää. Yläluokilla tietokonetta voidaan käyttää tieteellisten kokeiden mallintamiseen, mutta käytön on oltava hyvin rajoitettua eikä sen tule mitätöidä perusoppimista. Koulun loppuvaiheessa voidaan opetella esimerkiksi ohjelmointikieltä.

Opettajankoulutus

Opettajankoulutus on kaikkein tärkein tekijä. Jatkokoulutus on tärkeää, sen avulla opettajat säilyttävät elävän suhteen opetusaineensa kehitykseen. Jatkokoulutus ei kuitenkaan saa olla veruke eikä oikeutus heikolle pohjakoulutukselle.



Matematiikan käytön räjähdysmäinen kasvu – matematiikan ja yhteiskunnan uudet yhteydet

L'explosion des mathématiques

Käännökset: *Paula Kuusalo*.

Verkkojulkaisun *L'explosion des mathématiques* käännökset julkaistaan Solmussa seuraavien yhdistysten luvalla: Société Mathématique de France ja Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles. Käännösten osoite on <http://solmu.math.helsinki.fi/2004/explo/>.

Osa artikkeleista on suomennettu, osasta on lyhyt kuvaus. Aiheiden monipuolisuudesta saa käsityksen siitä, miten matematiikkaa on kaikkialla.

Claude Basdevant: *Sää*

Sään ennustaminen vaatii hyvin monenlaisten tapahtumien mallintamista useilla eri tieteenaloilla: matematiikasta tietotekniikan kautta fysiikkaan ja kemiaan, jopa aina biologiaan asti. (Tässä tarvittavaa matematiikkaa: numeerinen analyysi, dynaaminen ohjelmointi, variaationaaliset menetelmät, neuroverkot, väreet)

Daniel Krob: *Kännykän sisus*

Kännykkä on nykyisin arkipäiväinen, kenelläpä ei olisi sitä taskussaan. Mutta vain harvat meistä ymmärtävät miten haastavia tieteellis-teknisiä läpimurtoja on tarvittu kännykän toteuttamiseksi. (algoritmit, digitaalinen tiedonsiirto, verkkoteoria)

Jean-Louis Nicolas: *Salaus ja sen avaaminen: tiedonsiirron turvallisuus*

Kryptografia on pääosassa tämän päivän telekommunikaatioyhteiskunnassa. Siitä onkin tullut oma tieteenalansa, joka kuitenkin vaatii korkean tason matemaattikoita kehittyäkseen edelleen. (lukuteoria ja algebralinen geometria)

Pierre Perrier: *Kuinka kompleksia maailmaa voi kontrolloida*

Pelkästään tekniset innovaatiot eivät takaa lentokoneen ohjattavuutta, ison sillan turvallisuutta tai liikennevirran hallintaa. Tähän tarvitaan myös abstraktia tutkimusta kuten matemaattista säätöteoriaa. (säätöteoria, differentiaaliyhtälöt)

Étienne Ghys: *Paljelause*

Cauchy todisti 1800-luvun alussa, että kaikki kuiperat monitahokkaat ovat jäykkiä. Mutta vasta 1970-luvulla Robert Connelly huomasi, että epäkuperat monitahokkaat saattavat todellakin olla taipuisia. Palkeiksi taipuisat monitahokkaat eivät kuitenkaan kelpaa... (paljelause, kuperat ja epäkuperat monitahokkaat)

Bernard Prum: *Löytyykö syöpägeeni?*

Biologia, erityisesti molekyyli-genetiikka, tarvitsee uusia matemaattisia työkaluja. Esimerkkinä tilastotie-

teen merkitys erästä rintasyöpägeeniä etsittäessä. (tilastotiede)

Stéphane Mallat: *Väreet ja kuvatiedostojen tiivistäminen*

Kuvat ovat tärkeitä nykyajan viestinnässä kulkevatpa ne sitten internetissä tai ovat säilöttyinä tiedostoina tietokoneen muistissa. Kuvatiedostoja on mahdollista tiivistää niiden laatua juurikaan heikentämättä. (aalot ja väreet, signaalinkäsittely)

Daniel Bouche: *Miten välttää aaltojen kumu?*

Kuinka voi välttää tutkahavainnon? Mikä on paras muoto meluaidalle? Voiko kaikuluotainkuvia parantaa? Ongelman ratkaisu perustuu syvällisiin teorioihin. (osittaisdifferentiaaliyhtälöt, erityisesti lineaarit ja epälineaarit aaltoyhtälöt)

Francine Delmar: *Kuinka taide ja matematiikka liittyvät toisiinsa?*

Matematiikka ei inspiroi vain tutkijoita. Useat taiteilijat ovat ”kutoneet” matematiikkaa teoksiinsa, ja myös päinvastoin: taide on antanut sysäyksiä geometrisille teorioille.

Nguyen Cam Chi ja Hoang Ngoc Minh: *DNA:sta solmuteoriaan*

DNA-molekyylin asento ja kierteisyys geenin sisällä. (solmuteoria)

Pierre Cassou-Noguès: *Filosofia ja matematiikka*

Koko kehityshistoriansa ajan filosofia ja matematiikka ovat liittyneet läheisesti mutta ehkä arvoituksellisestikin toisiinsa, mistä vaikkapa Platon ja Descartes ovat esimerkkeinä. Tässä tarkastellaan kahta 20. vuosisadan suurta tutkijaa, David Hilbertiä ja Edmund Husserliä. (formalismi ja fenomenologia)

Jean-Jacques Laffont: *Huutokaupan rationaalinen järjestäminen*

Huutokauppatapahtuman matemaattinen mallintaminen auttaa sääntöjen ja optimaalisen strategian valinnassa. (ekonometria, Nashin tasapaino)

Philippe Février ja Michael Visser: *Huippuviinien ja obligaatioiden ekonometria*

Niin huippuviinejä kuin arvopapereitakin myydään huutokaupalla. Parhaan huutokaupattavan määrittelymiseksi tarvitaan mallinnuksen ohella myös ekonometriaa. (tilastotiede ja ekonometria)

Jean-Cristophe Culioli: *Lentoyhtiön toiminnan optimointi*

Laajan organisaation hallinta on vaikeaa. Tällaisissa tehtävissä työskentelee maailmanlaajuisesti kymmeniätuhansia matemaatikkoita ja insinöörejä. (operaatio-tutkimus, lineaarinen optimointi)

Maurice Mashaal: *Maailman synty: yksitoistaulotteista geometriaa*

Fyysikot ovat kauan etsineet alkeihiukkasten ja niiden vuorovaikutusten yleistä teoriaa. Tässä onkin viimeisten 15 vuoden aikana merkittävästi edistytty päätyen samalla niin abstrakteihin avaruuksiin, etteivät matemaatikotkaan sellaisia ole aiemmin tutkineet. (jänneteoriaa, kvanttikenttiä ja supersäikeitä)

François Baccelli: *Internetin mallintaminen*

Verkkosuunnittelijat yrkivät ymmärtämään paremmin tietoliikenteen tilastollisia ominaisuuksia. Tämä on tärkeitä tietoliikenneverkkojen hallinnan ja vastaisen kehityksen kannalta. (tietoliikennevirran itsesimilaarisuus)

Elyès Jouini: *Optioiden hinnat*

Finanssimaailman käyttämät optioiden hinnannmääritykset perustuvat itse asiassa melko tuoreisiin matemaattisiin tuloksiin. Ja parhaiden kaavojen etsiminen jatkuu yhä... (stokastiikka, Black-Scholesin malli)

Gilles Lachaud: *Virheenkorjaavat koodit*

Koodausteorian tutkijat soveltavat algebraan ja geometriaan perustuvia menetelmiä tiedonsiirron virheiden havaitsemiseen ja korjaamiseen. (informaatioteoria, äärelliset kunnat)

Jean-Daniel Boissonnat: *Kolmiulotteisten kappaleiden mallintaminen*

Esimerkiksi arkeologiassa samoin kuin lääketieteessä tai teollisuudessa joudutaan usein rekonstruoimaan kappale, kun vain muutamia sen pinnan pisteistä tunnetaan. (laskennallinen geometria)

Jean-Pierre Bourignon: *Matemaatikot Ranskassa ja maailmalla*

1800-luvun lopulle saakka matemaatikot tai ”geometrit”, kuten heitä myös kutsuttiin, olivat melko harvakuksia. Tänäpäin he joutuvat kohtaamaan oppiaineensa syvälliset muutokset.

Maurice Mashaal: *Kuinka matemaatikoksi tullaan?*

Pitkät oppivuodet ja luontainen taipumus ovat alan tutkijan edellytykset. Ranskassa matemaatikoksi haaluvalle on tarjolla moninaisia opintoväyliä.