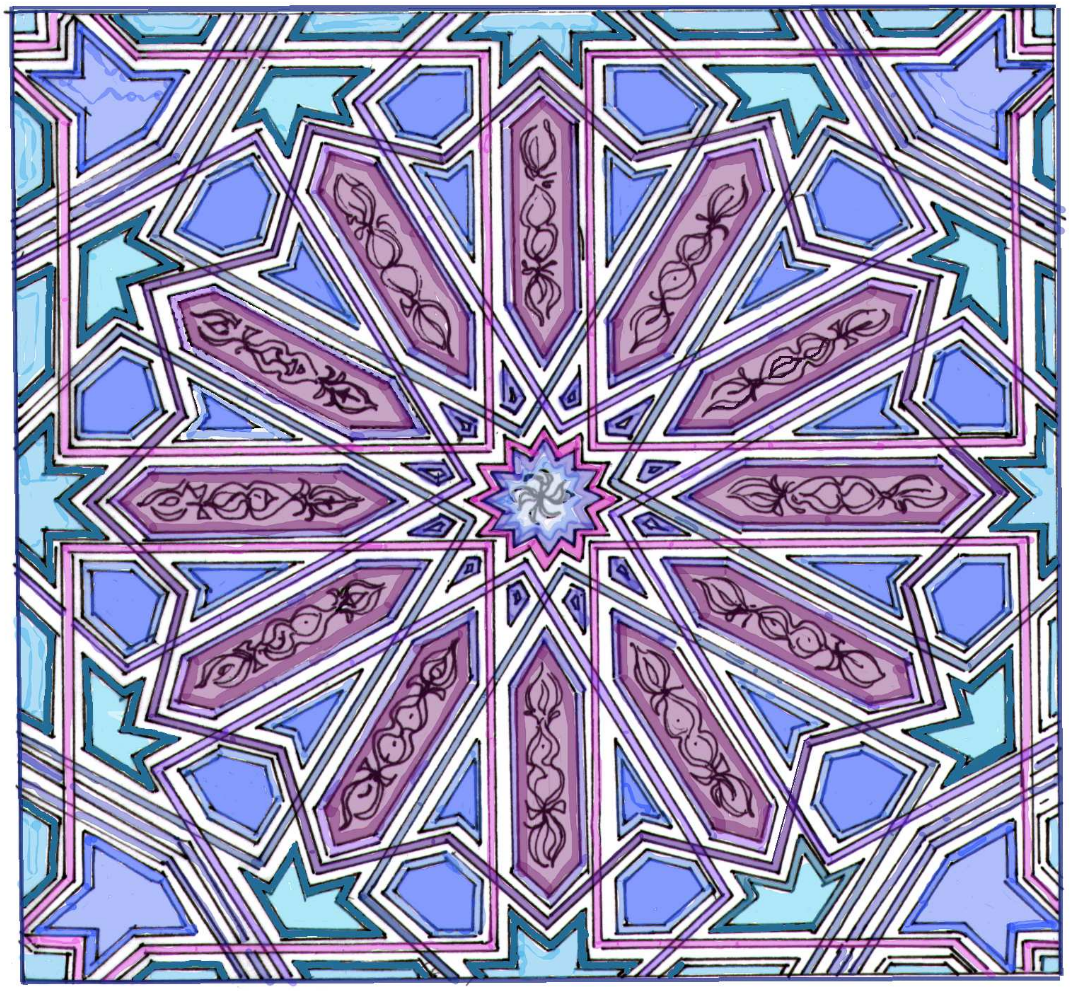
Solmu

Matematiikkalehti
1/2006

http://solmu.math.helsinki.fi/



Solmu 1/2006

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)
ISSN 1459-0395 (Painettu)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)
00014 Helsingin yliopisto

http://solmu.math.helsinki.fi/

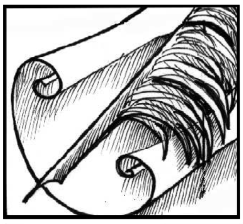
Numeroon 2/2006 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään huhtikuun 2006 loppuun mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa sekä Suomen Kulttuurirahastoa (sanakirjaprojekti).

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.

Kansi: Kattokoristekuvio Alhambrasta, Persiasta.

Sisällys



Sudoku ja matematiikka

Viime kuukausina sanomalehtien lukijat eivät ole voineet välttyä huomaamasta ilmiötä nimeltä *sudoku*. Joulun kirjamarkkinoillekin oli ehtinyt varmaan kymmenkunta sudokuaiheista kirjaa. Tavallisimmassa muodossaan sudoku on 81 ruudun yhdeksäksi yhdeksänruutuiseksi neliöksi jaettu kuvio, johon ratkaisija pyrkii sijoittamaan numeroita yhdestä yhdeksään niin, että kaikki numerot esiintyvät tasan kerran joka vaaka- ja pystyrivillä ja lisäksi jokaisessa rajatussa pikkuneliössä. Kuvioon on tehtävän laatija sijoittanut yleensä kolmattakymmentä valmista numeroa, tavallisesti jollakin tavalla symmetrisille paikoille.

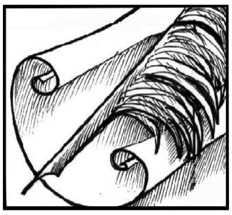
Sudokukirjallisuus pyrkii korostamaan sitä, että numeerisesta ulkoasustaan huolimatta sudoku ei ole matemaattinen ongelma, vaan älykkyystehtävä. Tämä ei ole aivan totta. En tarkoita nyt sitä, että sudokun historiallinen tausta johtaa erääseen kaikkien aikojen merkittävimpään matematiikkoon, 1700-luvulla eläneeseen sveitsiläiseen matematiikan suurmieheen *Leonhard Euleriin*, jonka jäljiltä matematiikkaan on syntynyt käsite *latinalainen neliö*, josta sudokukin on erikoistapaus. Tarkoitan sitä, että sudokun ratkaisuprosessi on usein malliesimerkki yhdestä matematiikan keskeisimmästä työkalusta, *epäsuorasta todistuksesta*. Jos sijoitan tuohon ruutuun numeron 2, niin joudun laittamaan noihin ruutuihin 7 ja 9, mutta se ei ole mahdollista, koska..., siis minun onkin laitettava ruutuun numero 4 ... Tällä tapaahan sudokun ratkaisussa tavallisesti edetään.

Juuri näin tekee matemaatikkokin, monesti. Halutessaan varmistua siitä, että alkulukujen määrä on ääretön, hän ajattelee, mitä seuraisi siitä, että niitä olisikin vain jokin äärellinen määrä, esimerkiksi a, b, ..., x. Silloin $ab \cdots x + 1$ olisi luku, jolla olisi jokin muu alkutekijä kuin kaikiksi alkuluvuiksi oletetut a, b, ..., x, eivätkä nämä a, b, ..., x siis olisikaan kaikki alkuluvut. Ristiriita osoittaa, että matemaatikon tekemä oletus oli välttämättä väärin, joten sen vastakohta on totuus. Viime vuosisadalla elänyt englantilainen matemaatikko *G. F. Hardy* vertasi tunnetussa pikku kirjasessaan *Matemaatikon apologia* (suomeksi julkaissut Terra Cognita vuonna 1997) matemaatikkoa šakinpelaajaan: šhakinpelaajan kannattaa joskus uhrata sotilas tai upseeri paremman peliaseman saavuttamiseksi. Matemaatikko menee pitemmälle: hän tarjoaa ikään kuin koko pelinsä pois, mutta voittaakin sen takaisin, kun päättelyketju johtaa ristiriitaan.

Matematiikka on vaikeasti määriteltävä ja rajattava ihmisen henkisen toiminnan alue. Sen kovaa ydintä on kuitenkin todistaminen, varman totuuden hankkiminen. Matematiikan opetuksessa ovat nykyään monesti esillä matematiikan muut puolet: laskeminen, havainnollistaminen, ymmärtäminen. Sudokujen suosio osoittaa, että ei päätteleminen ja todistaminen niin vierasta ihmisille ole, kuin mitä usein näytetään pelkäävän. Matematiikka koko rikkaudessaan on valtavasti mielenkiintoisempi kenttä harjoittaa loogista päättelyä kuin kiinnostavat, mutta lopulta yhdentekevät ajanvietetehtävät.

Matti Lehtinen

Pääkirjoitus



Symbolista matematiikkaa Maximalla

Symbolisen laskennan ohjelmistot, joista suosituimpia ovat Maple, Mathcad, Mathematica ja MuPAD, kuuluvat nykyään matemaatikon perustyökaluihin. Monet perinteisen koulumatematiikkan laskuharjoitukset, kuten derivointi- ja integrointitehtävät, ratkeavat näillä ohjelmistoilla helposti.

Vaikka tietokoneen käyttötaito ei korvaa asioiden ymmärtämistä, on mielestäni selvää, että symbolisen laskennan ohjelmistot ovat jo nyt suuresti muuttaneet matematiikan tekemistä. Tämän muutoksen pitäisi vaikuttaa matematiikan opetukseen, mutta tällä hetkellä symbolisen matematiikan ohjelmistoja käyttävät yleensä vain matematiikan ammattilaiset.

Käyttöä harrastajien ja kouluopetuksen osalta rajoittaa ohjelmistojen korkea hinta. Maxima on vapaa avoimen lähdekoodin symbolisen laskennan ohjelmisto. Se tukee Linux, MacOS X ja MS Windows -käyttöjärjestelmiä. Itse ohjelmiston lisäksi kannattaa ladata myös graafinen wxMaxima-käyttöliittymä.

Maxima perustuu MIT:ssä vuosina 1968–1982 kehiteltyyn Macsyma-järjestelmään. MIT luovutti lähdekoodin 1982 Yhdysvaltain energiaministeriölle (Department of Energy), joka jatkoi ohjelmiston kehittelyä nimellä DOE Macsyma. DOE Macsyman lähdekoodia ylläpiti professori William F. Schelter Texasin yliopistosta.

Vuonna 1998 Schelter sai oikeuden julkaista DOE Macsyman lähdekoodin suositun GNU GPL -lisenssin ehtojen mukaisesti, ja 2000 ohjelmiston vapaan version nimi muutettiin Maximaksi. Schelterin kuoleman jälkeen vuodesta 2001 ohjelmiston kehitys on jatkunut avoimen lähdekoodin projektina.

Maximan lisäksi on olemassa myös MIT:n alkuperäiseen lähdekoodiin perustuva kaupallinen ohjelmisto Macsyma, jolla oli 1980-luvulla 70 % markkinaosuus symbolisen laskennan ohjelmistoissa, mutta joka sittemmin on jäänyt tunnetumpien Maplen ja Mathematican varjoon. Ohjelmiston kaupallisesta versiosta on viimeksi tullut uusia versioita 90-luvun puolella.

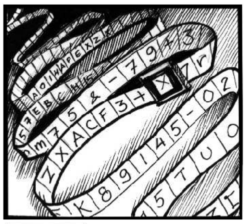
Useimpia käyttötarkoituksia varten Maxima on riittävä nykyiselläänkin, ja oletan siirtymisen avoimen lähdekoodin malliin tulevaisuudessa nopeuttavan kehitystä. Maxima täyttää merkittävän puutteen vapaiden ohjelmistojen tarjonnassa ja antaa harrastajille mahdollisuuden tutustua symbolisen laskennan mahdollisuuksiin. Verkko-opetuksesta kiinnostuneiden kannattaa tutustua myös Maxima-pohjaiseen matematiikan verkko-opetusympäristöön STACK.

Linkkejä

Maximan kotisivu: `http://maxima.sourceforge.net/`
wxMaxima: `http://wxmaxima.sourceforge.net/`
STACK: `http://www.stack.bham.ac.uk/`

Antti Rasila

Toimitussihteerin palsta



Lukujonon raja-arvo

Markku Halmetoja
Mäntän lukio

Lukujonon raja-arvo on matemaattisen analyysin tärkeimpiä käsitteitä, sillä sen avulla voidaan määritellä suurin osa analyysin muista käsitteistä. Raja-arvon määritelmän avulla on myös helpointa oppia analyysin keskeisimmän työvälineen, ε-tekniikan, käyttö. Raja-arvon tarkka määritelmä ja siihen liittyvä ε-tekniikka eivät ole koskaan kuuluneet lukion oppimäärään, mutta kokemus on osoittanut, että matematiikasta todella kiinnostuneella lukiolaisella ei ole mitään ikään liittyvää kehityspsykologista estettä niiden omaksumiseen. Tämä kirjoitelma pyrkii täydentämään lukioissa käytettyjä oppimateriaaleja mainituilta osin ja näin johdattamaan asiasta kiinnostuneen lukijan matemaattisen analyysin perusteiden syvempään ymmärtämiseen.

Määrittelemme raja-arvon aluksi havainnollisesti ja tarkennamme määritelmää asteittain, kunnes saamme sen matemaattisesti moitteettomaksi. Havainnollistamme ε-tekniikkaa muutamalla esimerkillä ja lopuksi annamme sarjan harjoitustehtäviä, joiden huolellinen suorittaminen varmistaa asian ymmärtämisen.

Lukujono (a_n) suppenee kohti raja-arvoa a, jos jonon termit a_n lähestyvät rajattomasti lukua a eli tulevat mielivaltaisen lähelle lukua a, kun n kasvaa rajattomasti.

Mitä tarkoitetaan rajattomalla lähestymisellä eli mielivaltaisen lähelle tulemisella ja luvun n rajattomalla kasvamisella? Merkitsemme niitä nuolilla $a_n \to a$ ja $n \to \infty$, mutta merkintätapa ei ole vastaus kysymykseen. Koska lukujen a ja a_n välinen etäisyys on niiden erotuksen itseisarvo $|a - a_n|$, voimme joka tapauksessa sanoa, että

$$a_n \to a \textit{ jos ja vain jos } |a - a_n| \to 0, \textit{ kun } n \to \infty.$$

Sekä rajaton lähestyminen että kasvaminen ovat kuvailevia käsitteitä, jotka eivät sellaisenaan kelpaa matemaattiseen määritelmään. Ne on voitava määritellä yksinomaan reaalilukujen ominaisuuksia käyttäen. Tarkastelemme aluksi n:n kasvamista. Kuinka suureksi sen pitää tulla, jotta raja-arvo saavutettaisiin? Välttämättä mikään äärellinen arvo ei riitä, sillä esimerkiksi jonon (a_n), $a_n = 1/n$, termit lähestyvät nollaa n:n kasvaessa, mutta raja-arvoa 0 ei saavuteta millään n:n arvolla. Luku n on siis valittava *suuremmaksi kuin mikä tahansa ennalta asetettu äärellinen rajakohta* $N \in \mathbb{Z}_+$. Tätä merkitsemme lyhyesti $n \to \infty$ ja sanomme n:n lähestyvän ääretöntä.

Etäisyys $|a - a_n|$ on n:stä riippuva ei-negatiivinen reaaliluku. Jos se *voidaan n:ää kasvattamalla tehdä pienemmäksi kuin mikä tahansa ennalta valittu positiivinen reaaliluku*, niin sanomme sen tulevan mielivaltaisen lähelle nollaa. Näin myös rajaton nollaa lähestyminen tulee määritellyksi reaalilukujen ominaisuuksien avulla ja voimme nyt muotoilla raja-arvon tarkan määritelmän.

Teemme sen aluksi *Ernst Lindelöfin* (1870 − 1946) mainion teoksen "*Johdatus korkeampaan analyysiin*", [2], tekstiä myötäillen.

Lukujonolla (a_n) *sanotaan olevan luku a raja-arvona, eli lukujonon sanotaan suppenevan kohti raja-arvoa a, jos jokaista positiivilukua* ε *kohden, valittakoon tämä miten pieni hyvänsä, aina voidaan määrätä sellainen kokonaisluku* N_ε*, että*

$$\left|a - a_n\right| < \varepsilon \quad \textit{niin pian kuin} \quad n > N_\varepsilon.$$

Edelleen Lindelöfiä lainaten: *Nämä epäyhtälöt sisältävät sen, että kaikki jonon* (a_n) *luvut, joille* $n > N_\varepsilon$*, joutuvat välille* $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$*. Jos valitaan pienempi* ε*, niin lukua* N_ε *täytyy yleensä suurentaa, jotta tämä ehto olisi täytetty.*

Lindelöfin "Johdatuksen", samoin kuin hänen muitakin teoksiaan, saattaa löytää suurimpien kaupunkien kirjastoista ja hyvällä onnella myös antikvariaateista. Se on yksi merkittävimmistä Suomessa ilmestyneistä matematiikan oppikirjoista, sillä sen avulla suomalaisen matematiikan maailmanmaineeseen kohottaneet funktioteoreetikot opiskelivat analyysin alkeet 1900-luvun alkupuolella. *Rolf Nevanlinna* (1895 − 1980) on sanonut teoksen vaikuttaneen ratkaisevasti hänen uravalintaansa. Hän oli harkinnut klassisten kielten opiskelua, mutta ylioppilaskesänä luettu "Johdatus" herätti hänessä peruuttamattoman kiinnostuksen matematiikkaan. Myös akateemikko *Olli Lehto* [1] on kertonut lukeneensa teoksen ylioppilaskesänään samoin seurauksin.

Vanhahtavasta kieliasustaan huolimatta Lindelöfin antama määritelmä on vieläkin pedagogisesti ylittämätön, sillä se on matemaattisesti tarkka ja samalla siinä selitetään asia ytimekkäästi. Samaan tarkkuuteen ja selittävyyteen pyritään teoksessa [3], jossa annettu raja-arvon määritelmä on oikeastaan vain Lindelöfin määritelmän käännös nykysuomeksi.

Lukujono (a_n) *suppenee kohti raja-arvoa a, jos jokaista positiivista lukua* ε *vastaa sellainen positiivinen kokonaisluku* n_ε*, että*

$$\left|a - a_n\right| < \varepsilon \quad \text{aina, kun} \quad n \geq n_\varepsilon.$$

Kun $\varepsilon > 0$ *on kiinnitetty, olipa se kuinka pieni tahansa, täytyy siis löytyä tällainen (tavallisesti* ε*:sta riippuva) luku* n_ε*.*

Luentomaisessa esityksessä, jossa selitykset voidaan tehdä suullisesti, määritelmä on tapana tiivistää logiikan käsitteitä hyödyntäen. Näin saadaan itse asiassa kielimuurit ylittävä raja-arvon määritelmä.

Lukujonon (a_n) *raja-arvo on a, jos*

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+\colon\ \exists n_\varepsilon \in \mathrm{Z}_+\colon\ n > n_\varepsilon \Rightarrow \left|a - a_n\right| < \varepsilon.$$

Määritelmän avulla emme voi laskea annetun jonon raja-arvoa. Sen avulla voimme ainoastaan todistaa, että annettu luku joko on tai ei ole annetun jonon raja-arvo. Esimerkit selventävät asiaa.

Esim. 1. Todistamme, että $\lim a_n = 2$, kun $a_n = (2n+1)/(n-1)$.

Olkoon ε mielivaltaisesti valittu positiivinen luku. Tällöin

$$\left|2 - a_n\right| = \left|2 - \frac{2n+1}{n-1}\right| = \frac{3}{n-1} < \varepsilon,$$

jos $n > 1 + 3/\varepsilon$. Jos siis kokonaisluku n_ε on vähintään yhtäsuuri kuin reaaliluku $1 + 3/\varepsilon$ ja n suurempi kuin n_ε, niin $\left|2 - a_n\right| < \varepsilon$ olipa positiivinen ε kuinka pieni tahansa. Siis $a_n \to 2$, kun $n \to \infty$.

Esim. 2. Osoitamme, että $\lim a_n \neq 2$, kun $a_n = (3n-1)/(n-1)$.

Tutkimalla erotusta $\left|2 - a_n\right|$ näemme, että

$$\left|2 - a_n\right| = \left|2 - \frac{3n-1}{n-1}\right| = \frac{n+1}{n-1} > 1,$$

kun $n \geq 2$, joten epäyhtälö $\left|2 - a_n\right| < \varepsilon$ ei voi toteutua jos esimerkiksi $0 < \varepsilon < 1$. Täten $\lim a_n \neq 2$.

Se, että (esimerkissä 1) reaalilukua $1 + 3/\varepsilon$ suurempia kokonaislukuja on olemassa, seuraa reaalilukujen perusominaisuuksista, joihin emme puutu tässä yhteydessä. Kiinnostunut lukija voi perehtyä reaalilukujen aksiomaattiseen esitykseen, samoin kuin jatkuvan funktion ominaisuuksien todistamiseen, teoksen [3] avulla. Siinä selvitetään myös ε-todistusten laatiminen erittäin yksityiskohtaisesti.

Määritelmän avulla voimme todistaa myös jonoja koskevia yleisiä lauseita.

Esim. 3. Jos (a_n) ja (b_n) ovat suppenevia jonoja, niin myös niiden termien summista muodostuva jono $(a_n + b_n)$ on suppeneva ja

$$\lim\,(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n.$$

Todistus. Olkoot $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ ja ε mielivaltaisesti valittu positiivinen reaaliluku. Raja-arvon määritelmän perusteella on olemassa kokonaisluvut n_1 ja n_2 siten, että $|a - a_n| < \varepsilon/2$, jos $n > n_1$, ja $|b - b_n| < \varepsilon/2$, jos $n > n_2$. Jos nyt $n > \max\,(n_1, n_2)$, niin kolmioepäyhtälöä soveltaen saamme

$$\begin{aligned}\left|(a+b) - (a_n + b_n)\right| &= \left|(a - a_n) + (b - b_n)\right| \\ &\leq \left|a - a_n\right| + \left|b - b_n\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,\end{aligned}$$

mistä väitös seuraa.

Voisimme valita luvut n_1 ja n_2 myös siten, että $|a - a_n| < \varepsilon$, jos $n > n_1$, ja $|b - b_n| < \varepsilon$, jos $n > n_2$. Tällöin, jos $n > \max(n_1, n_2)$, niin saamme kolmioepäyhtälön avulla

$$\begin{aligned}\big|(a+b) - (a_n + b_n)\big| &= \big|(a - a_n) + (b - b_n)\big| \\ &\le \big|a - a_n\big| + \big|b - b_n\big| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,\end{aligned}$$

mistä väitös myös seuraa, sillä 2ε on yhtälailla mielivaltainen positiivinen reaaliluku kuin ε.

Harjoitustehtäviä

1. Osoita, että esimerkissä n:o 2 annetun jonon raja-arvo on 3.

2. Olkoon c reaalinen vakio ja (a_n) suppeneva jono. Osoita, että
$$\lim (c\, a_n) = c\, \lim a_n.$$

3. Jono (a_n) on *rajoitettu*, jos on olemassa $M \in \mathbb{R}_+$ siten, että kaikilla n:n arvoilla on $\big|a_n\big| \le M$. Osoita, että suppenevat jonot ovat rajoitettuja.

4. Osoita: Jos $\lim a_n = a$ ja $\lim b_n = b$, niin $\lim (a_n b_n) = ab$.

5. Osoita: Jos $\lim a_n = a$ ja $\lim a_n = b$, niin $a = b$.

6. Osoita: Jonon (a_n) raja-arvo on a jos ja vain jos jokaisen välin
$$]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\quad (\varepsilon \in \mathbb{R}_+)$$
ulkopuolella on korkeintaan äärellinen määrä jonon termejä.

7. Muotoile pelkästään reaalilukujen ominaisuuksiin tukeutuva määritelmä sille, että $\lim a_n = \infty$.

Kirjallisuutta

1. Olli Lehto: Korkeat maailmat, Rolf Nevanlinnan elämä, Otava 2001.

2. Ernst Lindelöf: Johdatus korkeampaan analyysiin, 5. painoksen muuttamaton lisäpainos, WSOY 1967.

3. Jorma Merikoski, Markku Halmetoja, Timo Tossavainen: Johdatus matemaattisen analyysin teoriaan, WSOY 2004.

Parempaan ymmärtämiseen opetusohjelmien avulla

Heikki Miettinen
Linnanpellon koulu, Kuopio
heikki.miettinen@kuopio.fi

Oppimisen avainsanoja ovat ymmärtäminen, muistaminen ja soveltaminen. Ymmärtäminen auttaa muistamaan, ymmärtäminen ja muistaminen edelleen soveltamaan. Kokemukset soveltamisesta puolestaan edistävät ymmärtämistä ja muistamista. Ihminen oppii sitä mitä tekee automaattisesti ilman tarvetta tietoiseen päättämiseen, että tämä minun on opittava ja muistettava. Mitä aktiivisemmin, useammin ja useammasta näkökulmasta asiaa prosessoi, sen parempaa oppimista syntyy. Tämä kaikki on vanhaa kokemusviisautta.

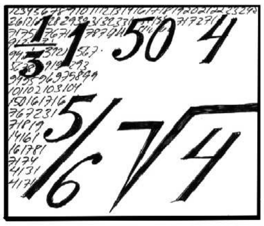
Suunnitellessani opetusohjelmistoa lineaarisen funktion opettamiseen (FRUITS, TAXI ja 5-TIE, kts. `http://www.edu.kuopio.fi/hemi/`), jouduin aluksi pohtimaan, mitä sisältyy siihen, että henkilö ymmärtää lineaarisen riippuvuuden olemusta ja mallintamista. Mitä ylipäätään tarkoitamme ymmärtämisellä? Mitä tarkoittaa, jos joku ymmärtää derivaatan tai tensorin käsitteen? Onko meillä ymmärtämisen teoriaa? Ymmärtämiseen liittyy varmastikin tieto siitä, mistä ja miten jokin asia seuraa (tästä seuraa, että). Ymmärtämiseen liittyy myös tieto aiheeseen liittyvien asioiden suhteista. Esimerkiksi miten sinifunktio liittyy ympyrään tai aaltoliikkeeseen. Ymmärtämisen käsitettä voitaisiin lähestyä toistakin kautta siten, että henkilön ajateltaisiin ymmärtävän asiaa, mikäli hän kykenee vastaamaan asiantuntijan asettamiin monipuolisiin kysymyksiin.

Edellä mainittujen ohjelmien kohderyhmä, peruskoulun yläluokkalaiset, ottavat vasta ensi askeleita ilmiöiden matemaattisessa mallintamisessa. Muuttujat, muuttujien arvot ja muuttujalausekkeet eivät ole vielä juurikaan olleet esillä. Tästä syystä mallintamisprosessi on ankkuroitava tukevasti nuorelle ymmärrettäviin konkreettisiin tapahtumiin kuten hintoihin, taksimaksuihin jne. Olen pitänyt välttämättömänä lähtökohtana, että oppija itse laskee useita hintoja päässä tai laskimella, jotta voisi kokea saman kaavamaisen laskutavan toistuvan. Tämä sitten antaa aiheen ottaa kullekin muuttuvalle suureelle edustajaksi kirjaimen ja näin päästään muodostamaan hintafunktiolle kirjainlauseke. Sen jälkeen on edetty käsittelemään muuttujien arvoja, laskulauseketta ja graafista kuvaajaa – niinpäin ja näinpäin – jotta näiden väliset yhteydet ja suhteet avautuvat. Tämä vankasti uskoen, että aiheen kimpussa vietetty laatuaika tuottaa oppijalle relevantteja ajatusrakenteita.

Ohjelmia on ajateltu käytettäväksi ensisijaisesti siten, että luokka tulee sopivalla oppitunnilla tietokoneluokkaan ja oppilaat työskentelevät pareittain tai yksin toiveensa mukaan. Ohjelmien käytössä opettajan on hyvä korostaa, että kyseessä ei ole läpiselailuohjelma, vaan että eteneminen vaatii kaiken aikaa pientä ajatusponnistelua, mikä on tarpeen oppimisen kannalta. Tilanneriippuvaiset ja eritasoiset ohjeet auttavat eteenpäin, jos oma ajatus ei aina osu. Opettajakin on lähellä avuksi suurimpiin hätiin. Nopeammin etenevät ehtivät aiheeseen syvemmälle.

Ohjelmien tarkoitus ei ole korvata luokkaopetusta vaan täydentää ja monipuolistaa sitä prosesseilla, jotka perinteisessä luokkaopetuksessa eivät ole mahdollisia. Käyttökokemukset oppilaiden kanssa ovat osoittaneet, että työskentely ohjelmien parissa on hyvin intensiivistä koko oppitunnin ajan. Koska eteenpäin ei pääse ellei itse selvitä asioita, perinteisessä luokkaopetuksessa helposti tapahtuvaa ”ohivirtausilmiötä” ei pääse syntymään.

Negatiivinen väite, että tietokoneilla ei olisi juuri mitään annettavaa matematiikan opetukselle tuntuu kovin omituiselta. Niinpä on hyvä lähteä päinvastaisesta ajatuksesta, että tietokoneilla on paljon merkitystä tulevaisuuden opetusvälineenä. Laitteistolliset ja ohjelmistolliset edellytykset laadukkaiden opetusohjelmien tuottamiseen ovat olleet jo ainakin puolentoista vuosikymmenen ajan hyvät. Siitä huolimatta alan kehitys on ollut vaatimatonta verrattuna esimerkiksi pelialan kehitykseen. Ajatus, että opetusohjelmatuotanto etenisi markkinavoimapohjaisesti on mielestäni väärä. Ovathan markkinat Suomessa pienet ja opetusohjelmien laatiminen aikaa vievää ja työlästä. Heittäisinkin tässä asiassa viehettä korkeakoulujen suuntaan, jotka aivan hyvin voisivat laajentaa toimenkuvaansa tuotekehittelyyn liittyvään organisointiin ja oppimistutkimukseen. Korkeakoulujen oman palkatun väen lisäksi uskoisin apua löytyvän sekä opiskelijoista että jo toimessa olevista opettajista. Näin järjestettynä opetusohjelmia voisi hioa aina vain paremmin toimiviksi, kun mukaan tulisi pedagoginen tutkimus. Johtavana PISA-maana meidän ei pitäisi jäädä vääntämään käännöksiä muun maailman opetusohjelmista, vaan astua asiassa eturiviin. Tekijöitä tarvitaan!



Neliöjuuri autiolla saarella

Matti Lehtinen
Maanpuolustuskorkeakoulu

Näppäillään luku laskimeen, painetaan $\sqrt{\ }$-näppäintä. Kirjoitetaan tietokoneohjelmaan komento SQRT. Jos kalenteria käännetään 40 vuotta taaksepäin, ollaan tilanteessa, jossa luku laskuviivaimen yläasteikolta ja katsotaan hiusviivan avulla samalla kohdalla oleva alemman asteikon luku tai etsitään taulukosta luvun logaritmi, jaetaan se kahdella ja katsotaan saatua neliöjuuren logaritmia vastaava luku, mantissa. Positiivisen luvun a neliöjuuren numeerinen määritys on tekniikan avulla yksinkertaista.

Entä jos apuvälineitä ei olisi? Jos olisimme haaksirikkoutuneet autiolle saarelle, laskimemme olisi tärveltynyt suolaisessa merivedessä ja – esimerkiksi Pythagoraan lausetta matkan mittaamiseen käyttääksemme – joutuisimme määrittämään neliöjuuria? Aina voi kokeilla. $14^2 = 196$ ja $15^2 = 225$. Siis $\sqrt{200} = 14,\ldots$. Edelleen $14{,}1^2 = 14^2 + 0{,}2 \cdot 14 + 0{,}1^2 = 198{,}81$ ja $14{,}2^2 = 14^2 + 0{,}4 \cdot 14 + 0{,}2^2 > 196 + 0{,}4 \cdot 10 = 200$. Siis $\sqrt{200} = 14{,}1\cdots$ jne. Newtonin likiarvomenettely on toimiva. Funktion $f(x)$ positiivinen nollakohta löytyy jostain umpimähkäisestä lähtöarvosta x_0 alkavan ja palautuskaavan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

määrittelemän lukujonon (x_n) raja-arvona. Kun funktioksi asetetaan $f(x) = x^2 - a$, palautuskaava saa muodon

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Huonostikin onnistuneen alkuarvauksen jälkeen algoritmi löytää oikeaan melko harvojen askelien jälkeen. Apuneuvoton saattaa kuitenkin tuskailla jakolaskujen kanssa: jakajissa voi olla paljon numeroita.

Vanhoissa, ennen elektroniikan läpimurtoaikoja kirjoitetuissa ja nykyisiä peruskoulun yläluokkia vastannutta keskikoulua varten tarkoitetuissa oppikirjoissa esitellään aivan yksinkertaiseen perusalgebraan nojautuva neliöjuurenottoalgoritmi. Pienoisgallup kertoi, että useimmat hiukan matematiikkaan suuntautuneetkaan aikuiset eivät sitä enää tunne. Koulun oppikirjoissa sitä ei enää ole. Algoritmi ei edelleenkään ole vailla mielenkiintoa, vaikkei neliöjuuren määrittäminen vain kynällä ja paperilla enää yleensä ole tarpeen. Katselemme nyt tätä algoritmia sekä kymmenjärjestelmän että binäärilukujen maailmassa. Jälkimmäiseen se näyttää sopivan erityisen hyvin.

Neliöjuuri kymmenjärjestelmässä

Algoritmin perusidea tulee esiin, jos mietimme, miten löydämme suurimman kokonaisluvun, jonka neliö on positiivista kokonaislukua a pienempi. Matemaattisin merkinnöin haemme lukua $\lfloor\sqrt{a}\rfloor$ eli luvun a, *juurrettavan*, neliöjuuren kokonaisosaa. Koska muistamme ulkoa kertotaulun, osaamme suoraan määrittää tämän luvun aina, kun a on pienempi kuin 100 eli kun a on enintään kaksinumeroinen luku. Oletetaan sitten, että $100 \leq a < 10000$, toisin sanoen että a on kolmi- tai nelinumeroinen. Silloin $10 \leq \sqrt{a} < 100$. Luku $\lfloor\sqrt{a}\rfloor$ on siis kaksinumeroinen. Voimme kirjoittaa $a = 100b + c$, missä b ja c ovat kaksinumeroisia, ja $\lfloor\sqrt{a}\rfloor = 10x + y$, missä $1 \leq x \leq 9$ ja $0 \leq y \leq 9$. Nyt

$$(10x + y)^2 = \lfloor\sqrt{a}\rfloor^2 \leq (\sqrt{a})^2 = a$$

eli

$$100x^2 + 20xy + y^2 \leq 100b + c.$$

Tehtäväksi tulee etsiä mahdollisimman suuret x ja y, joilla edellinen epäyhtälö toteutuu. Koska $c < 100$ ja $100(x+1)^2 > 100x^2 + 100$, mahdollisimman suuri x on mahdollisimman suuri ehdon $100x^2 \leq 100b$ eli $x^2 \leq b$ toteuttava luku. Kun nyt b on enintään kaksinumeroinen, x:n määrityksen ratkaisee kertotaulu. Jäljelle jää etsiä epäyhtälölle

$$20xy + y^2 \leq 100(b - x^2) + c$$

mahdollisimman suurta ratkaisua y. Epäyhtälön voi kirjoittaa muotoon

$$y(20x + y) \leq 100(b - x^2) + c.$$

Mitä oikeastaan etsitään? Etsitään numeroa y, joka liitettäisiin viimeiseksi numeroksi lukuun, jonka yksi tai kaksi ensimmäistä numeroa ovat muodostuneet siten, että yksinumeroinen luku x on kerrottu kahdella, niin että kun luku kerrottaisiin viimeisellä numerollaan, tulos ei ylittäisi kiinteätä enintään kolminumeroista lukua $100(b - x^2) + c$, joka puolestaan on muodostunut niin, että a:n ensimmäisestä tai ensimmäisistä numeroista on vähennetty x^2 ja erotuksen perään on kirjoitettu kahdeksi viimeiseksi numeroksi c. Etsitty y löytyy katsomalla tai tarvittaessa hiukan kokeilemalla.

Selvennetään tätä esimerkillä. Lasketaan luvun $\sqrt{1234}$ kokonaisosa. Tässä tapauksessa $b = 12$ ja $c = 34$. Suurin x, jolle $x^2 \leq 12$, on kertotaulun mukaan 3. Luku $100(b-x^2)$ on nyt $100(12-9) = 300$ ja $100(b-x^2)+c = 334$. Luku $20x = 10(x + x) = 60$. Haemme suurimman kymmentä pienemmän kokonaisluvun y, jolle $y \cdot (60 + y) \leq 334$. Ei ole vaikea nähdä, että 6 on liian suuri y:ksi, mutta 5 kelpaa. Suurin kokonaisluku $10x+y$, jonka neliö on pienempi kuin 1234, on siis 35. Kun suoritetaan vähennyslasku $334 - 6 \cdot 65 = 334 - 325 = 9$, saadaan luku, joka on sama kuin $1234 - 35^2 = 1234 - 1125$.

Itse asiassa puhuminen nelinumeroisesta luvusta on epäolennaista. Jos tiedämme positiivisen kokonaisluvun luvun b neliöjuuren kokonaisosan, siis luvun x_1, jolle pätee

$$x_1^2 \leq b < b + 1 \leq (x_1 + 1)^2,$$

löydämme aina luvun $100b + c$, missä $0 \leq c \leq 99$ neliöjuuren kokonaisosan edellä kuvatulla tavalla. Etsimme lukua muodossa $10x + y$, missä $0 \leq y \leq 9$. Lukujen x ja y tulee olla mahdollisimma suuria ehdon $(10x + y)^2 \leq 100b + c$ toteuttavia positiivisia kokonaislukuja. Tiedämme, että $(10x_1)^2 \leq 100b \leq 100b + c$ ja $(10(x_1+1))^2 \geq 100(b+1) = 100b+100 > 100b+c$. Mahdollisimman suuri x on siis jo tietämämme x_1. Luvun y puolestaan on täytettävä ehto $(10x_1 + y)^2 \leq 100b + c$ eli $20x_1y + y^2 \leq 100(b - x_1^2) + c$ eli

$$y(20x_1 + y) \leq 100(b - x_1^2) + c.$$

$20x_1$ on nollaan päättyvä kokonaisluku. Tehtäväksi jää etsiä sille uusi viimeinen numero y niin, että tulo $y(20x_1 + y)$ jää pienemmäksi kuin tunnettu luku $100(b-x_1^2)+c$. Kun se on löydetty, niin luvun $\sqrt{100b + c}$ kokonaisosa on $10x_1 + y$. Luvun $100b + c$ ja sen neliöjuuren kokonaisosan neliön erotus on $100b+c-(10x_1+y)^2 = 100(b - x_1^2) + c - y(20x_1 + y)$. Tämä luku syntyy kymmenjärjestelmässä jo tunnetusta luvusta $b-x_1^2$ niin, että lausekkeen $b - x_1^2$ perään kirjoitetaan c:n numerot ja tästä luvusta vähennetään juuri määritetty $y(20x_1+y)$. Nyt olemme tilanteessa, jossa voimme jatkaa, esimerkiksi luvun $10000b + 100c + d$ neliöjuuren kokonaisosaan.

Katsotaan asiaa lukuesimerkin avulla. Lasketaan luvun $\sqrt{123456}$ kokonaisosa. Nyt $b = 12$, $c = 34$ ja $d = 56$. Aikaisemman perusteella 35 on luvun $\sqrt{1234}$ kokonaisosa. Siis $x = 3$ ja $y = 5$. Edelleen aikaisemman perusteella $100b + c - (10x + y)^2 = 1234 - 35^2 = 9$. Lisäksi $20x + 2y = 60 + 10 = 70$. Luvun z tulee olla suurin ehdon $z(10\cdot 70+z) < 10^2\cdot 9+d = 956$ eli $z(700+z) < 956$ toteuttava kokonaisluku. Selvästi on oltava $z = 1$. Neliöjuuren $\sqrt{123456}$ kokonaisosa on siis 351.

Koska $\sqrt{10^{2n}a} = 10^n\sqrt{a}$ ja $\sqrt{10^{-2n}a} = 10^{-n}\sqrt{a}$, ei sillä, että edellä on puhuttu kokonaisluvuista, tai muotoa $100b + c$, $0 \leq c \leq 99$, olevista luvuista, ole merkitystä: desimaalipilkkua voidaan aina siirtää juurrettavassa $2n$ paikkaa, kun sitä samalla siirretään juuressa n paikkaa, samaan suuntaan kummassakin tapauksessa. Olennaista on, että kun juurrettavan kokonaisosassa on $2n - 1$ tai $2n$ numeroa, juuren kokonaisosassa on n numeroa. Juuren ensimmäiseen numeroon vaikuttavat vain juurrettavan suurin tai kaksi suurinta numeroa, sen mukaan, onko juurrettavan kokonaisosassa pariton vai parillinen määrä numeroita. Kun neliöjuurta on rakennettu k:n numeron verran, otetaan juurrettavasta tarkasteluun seuraavat kaksi numeroa oikealta (eli siirrytään luvusta b lukuun $100b + c$), ja menetellään, niin kuin edellä kuvattiin. Prosessia voi jatkaa mielivaltaisen pitkään. Neliöjuuret ovatkin yleensä jaksottomia päättymättömiä desimaalilukuja.

Neliöjuurenottoalgoritmin laskutemput voi järjestää hiukan samassa hengessä kuin jakokulmassa jakamisen. Eräs tapa, Kalle Väisälän Algebran oppi- ja esimerkkikirjan ensimmäisestä osasta lainattu, on esitetty laskukaaviossa 1. Siinä lasketaan luvun $\sqrt{123456}$ alalikiarvo kahden desimaalin tarkkuudella. Juurrettavasta tarvitaan silloin neljä desimaalia, joten kirjoitamme sen muotoon 123456,0000. Kun juurrettavan käsitellään ikään kuin kaksi numeroa kerrallaan, on mukava erottaa juurrettavan numerot pystyviivoin kahden ryhmiin. Yksi erotteluviiva on desimaalipilkun kohdalla.

1 2|3 4 |56,00|00|	351,36
−9	+3
3 3 4	65
−3 2 5	+ 5
9 56	701
−7 01	+ 1
2 55 00	702 3
−2 10 69	+ 3
44 31 00	702 66
− 42 15 96	+ 6
2 15 04	702 72

Laskukaavio 1.

Algoritmin joka askeleen kohdalla on tarpeen tietää luku $20x_1$, missä x_1 on jo käsitellyn luvun osan neliöjuuren kokonaisosa. Kun etsitään neliöjuureen seuraavaa numeroa, edellä y:llä merkittyä, niin seuraava kaksinkertainen neliöjuuren kokonaisosan arvo, siis $2(10x_1 + y)$ saadaan lisäämällä $20x_1$:een $2y$. Kaaviossa tämä toteutetaan kirjoittamalla tunnetun $2x_1$:n perään y, jolloin saadaan $20x_1 + y$:n desimaaliesitys, ja laskemalla – allekkain – tämän luvun kanssa yhteen y. Toisaalta tarvitaan jo käsitellyn luvun osan ja sen neliöjuuren kokonaisosan erotus. Kuten edellä osoitettiin, se on $100(b-x_1^2)+c-y(20x_1+y)$. Kun $b-x_1^2$ on jo tunnettu, saadaan uusi erotus kymmenjärjestelmässä kirjoittamalla $(b-x_1^2)$:n numeroiden perään c:n numerot ja vähentämällä tästä luvusta kertolaskun $y(20x_1+y)$ tulos.

Laskukaavion mukaan $\sqrt{123456} \approx 351{,}36$. Menettelyä voi jatkaa miten pitkään tahansa. Seuraavan desimaalin y ehto olisi $y(702720 + y) \leq 2150400$. Tästä saataisiin $y = 3$. Tarkastamalla kaavion numeroita edellä esitetyn selostuksen mukaisesti huomaa logiikan melko pian.

Lukija kokeilkoon määrittää desimaaleja lukuihin $\sqrt{2}$, $\sqrt{\pi}$ ja laskekoon puhelinnumeronsa neliöjuuren! Sitten voikin ryhtyä iteroimaan algoritmia. Ensimmäinen haaste olisi vaikkapa $\sqrt[4]{2}$.

Neliöjuuri binäärijärjestelmässä

Kun siirrytään lukujen esityksessä kymmenjärjestelmästä kaksijärjestelmään, kertotaulun yksinkertaisuus tekee algoritmistamme olennaisesti helpomman. Positiivinen kokonaisluku, jonka binääriesitys on enintään kaksinumeroinen, on enintään 11 eli kymmenjärjestelmän 3. Enintään kaksinumeroisen binääriluvun neliöjuuren kokonaisosan binääriesitys on siis aina 1. Jokainen positiivinen kokonaisluku a voidaan esittää muodossa $4b + c$, missä $0 \leq c \leq 3$. Tässä $4b$ on ainakin kahteen nollaan päättyvä binääriluku ja c on enintään kaksinumeroinen binääriluku. Jos tiedämme luvun $\sqrt{b}$ kokonaisosan x, niin luvun a neliöjuuren kokonaisosa on $2x + y$, missä $y = 0$ tai $y = 1$. Luku y määräytyy ehdosta $(2x + y)^2 \leq 4b + c$. Se sievenee muotoon $y(2x + y) \leq 4(b - x^2) + c$. Luvun y valinta on nyt helppo: jos $2x + 1 > 4(b - x^2) + c$, niin $y = 0$, jos $2x+1 \leq 4(b-x^2)+c$, $y = 1$. Kun luvusta $4(b-x^2)+c$ vähennetään $y(2x+y)$, jää $4b+c-4x^2-2xy-y^2$ eli $4b+c-(2x+y)^2$. Tiedämme nyt aikaisemmasta kahdella binäärinumerolla pidennetyn kokonaisluvun neliöjuuren kokonaisosan binääriesityksen ja samalla luvun ja kokonaisosan neliön erotuksen. Tällä tavoin neliöjuuri saadaan rakennetuksi yksinkertaisesti bitti kerrallaan.

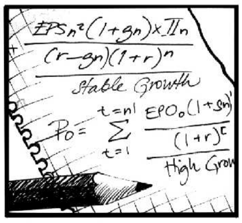
Havainnollistetaan asiaa laskemalla luvun $\sqrt{1234}$ kokonaisosan binääriesitys. Tätä varten tarvitsemme luvun 1234 binääriesityksen. Koska $1234 = 1024 + 210 = 1024 + 128 + 82 = 1024 + 128 + 64 + 18 = 1024 + 128 + 64 + 16 + 2$, esitys on 10011010010. Järjestetään laskukaaviossa 2 juuren kehittyminen samalla tavalla kuin kuin edellä kymmenjärjestelmää käytettäessä tehtiin. Jätetään yhteen- ja vähennyslaskujen merkit yksinkertaisuuden vuoksi pois. Lukija havaitsee, että vasemmanpuoleisen taulun toimitukset ovat vähennyksiä, oikeanpuoleisen lisäyksiä. Havainnollisuuden vuoksi ryhmitellään juurrettavan numerot jälleen pareihin pystyviivoin.

1|00|11|01|00|10	100011
1	1
0 00	100
0	0
0 11	1000
0	0
11 01	10000
0	0
11 01 00	100001
10 00 01	1
1 00 11 10	1000101
1 00 01 01	1
10 01	1000110

Laskukaavio 2.

Binäärilukujen neliöjuurialgoritmi on varsin yksinkertaisesti ohjelmoitavissa tietokoneelle. En tiedä, käytetäänkö algoritmia tällaisenaan. Se, että halvimmissakin nelilaskimissa on yleensä neliöjuuritoiminto panee uskomaan, että niin tapahtuu.

Autiolle saarelle itsensä kuvitteleva lukija voi seuraavaksi ryhtyä omin päin aikansa kuluksi selvittelemään neliöjuurialgoritmia muissa lukujärjestelmissä. Ja miten sujuisi kuutiojuuren ottaminen?



Normaalijakauman kertymäfunktiosta

Pekka Alestalo
Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Normaalijakauma

Normaalijakauma on tärkein jatkuva jakauma ja sitä käsitellään myös lukion matematiikassa. Jos jakauman odotusarvo on μ ja keskihajonta σ, niin kertymäfunktion lauseke on

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2}\,dt.$$

Käytännössä riittää tarkastella normitettua jakaumaa, jonka odotusarvo on 0 ja keskihajonta 1. Normitetun normaalijakauman kertymäfunktio on siis

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt.$$

Yksi luonnollinen kysymys jää kuitenkin kunnolla ratkaisematta, vaikka sen vastaus toki kirjoissa mainitaan: Mistä tulee kaavassa oleva kerroin? Tunnetusti kertymäfunktion ominaisuuksiin kuuluu ehto

$$\lim_{x\to\infty}\Phi(x) = 1, \quad \text{eli} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = 1, \tag{1}$$

ja kerroin $1/\sqrt{2\pi}$ on tietysti valittu tämän vaatimuksen perusteella. Sen sijaan eksponentissa oleva kerroin $1/2$ tarvitaan, jotta keskihajonta olisi 1, mutta tämä jääköön lukijan tutkittavaksi. Vaikka kertymäfunktion $\Phi(x)$ lauseketta ei voida ilmaista alkeisfunktioiden avulla (todistus on pitkä ja hankala), on kuitenkin yllättäen mahdollista – ja vielä lukiokurssin pohjalta – osoittaa ehdon (1) toteutuminen.

Integraalin laskeminen

Yllä mainittu integraali voidaan laskea melko helposti seuraavan idean perusteella. Lasketaan erään kolmiulotteisen kappaleen tilavuus kahdella eri tavalla: ensiksi viipaloimalla kappale yhdensuuntaisilla tasoilla ja integroimalla näiden poikkileikkausten pinta-alaa, ja toisaalta käyttämällä pyörähdyskappaleen tilavuuden lauseketta (joka vastaa viipalointia eri suunnassa!). Koska tulosten täytyy olla samat, saamme yllättäen laskettua tutkittavana olevan integraalin.

Aloitetaan pienellä sievennyksellä, joka perustuu määrätyn integraalin muuttujanvaihtokaavaan. Tehdään muuttujanvaihto $t = \sqrt{2}\,u$, jolloin $dt = \sqrt{2}\,du$, ja tehtäväksi jää osoittaa, että

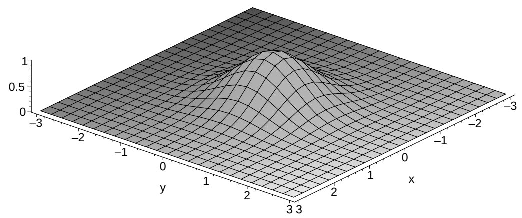
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}. \tag{2}$$

(Jos muuttujanvaihto ei ole lukijalle tuttu, hän voinee käydä alla olevat laskut läpi käyttämällä alkuperäistä muotoa.)

Kappale, jonka tilavuutta seuraavassa tutkitaan, sijaitsee xyz-avaruudessa pinnan $z = e^{-x^2-y^2}$ ja xy-tason välissä, eli se voidaan määritellä muodossa

$$\{(x, y, z) \mid 0 \le z \le e^{-x^2-y^2}, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}.$$

Kyseessä ei ole rajoitettu kappale, mikä liittyy siihen, että laskettava integraalikin on epäoleellinen, ts. integroimisrajoina ovat $\pm\infty$. Tilavuutta ja kyseistä integraalia pitäisi tämän vuoksi tarkastella sopivan rajaprosessin avulla, mutta sivuutan tämän pienen ongelman, jonka korjaaminen vaatii ainoastaan "teknistä näpertelyä".



Ensimmäinen tapa

Aloitetaan tilavuuden laskeminen viipaloimalla kappale pystysuorilla tasoilla $y = y_0, x, z \in \mathbf{R}$. Vastaava poikkileikkaus on yhtenevä xy-tason alueen

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R}, 0 \le y \le e^{-x^2-y_0^2}\}$$

kanssa, joten poikkileikkauksen pinta-ala on muotoa

$$A(y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y_0^2}\, dx$$

(käytetään tavallista funktion kuvaajan rajoittaman pinta-alan kaavaa). Koska $e^{-x^2-y_0^2} = e^{-x^2}e^{-y_0^2}$ eikä lauseke $e^{-y_0^2}$ riipu integroimismuuttujasta x, saadaan edelleen

$$A(y_0) = e^{-y_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = e^{-y_0^2} I.$$

Kappaleen tilavuus saadaan integroimalla poikkileikkausten pinta-aloja muuttujan y_0 suunnassa, joten tuloksena on

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y_0^2} I\, dy_0 = I \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y_0^2}\, dy_0 = I^2,$$

sillä integroimismuuttujan nimellä ei ole väliä ja integraalin arvo I on pelkkä luku!

Toinen tapa

Seuraavaksi tilavuus lasketaan viipaloimalla kappale xy-tason suuntaisilla tasoilla. Poikkileikkaukset ovat ympyröitä, sillä arvoilla $0 < z < 1$ yhtälöstä $z = e^{-x^2-y^2}$ ratkeaa $x^2 + y^2 = -\ln z > 0$, joten voimme käyttää pyörähdyskappaleen tilavuuden lauseketta. Tarkasteltava kappale syntyy, kun xz-tason käyrä $z = e^{-x^2}$, $x \ge 0$, pyörähtää z-akselin ympäri. Käyrän yhtälöstä täytyy siis ensin ratkaista x muuttujan z avulla lausuttuna:

$$z = e^{-x^2} \iff \ln z = -x^2 \iff x = \sqrt{-\ln z};$$

huomaa, että $x \ge 0 \iff 0 < z \le 1$, joten $\ln z \le 0$. Pyörähdyskappaleen tilavuudeksi saadaan näin ollen

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{-\ln z})^2\, dz = -\pi \int_0^1 \ln z\, dz.$$

Tämäkin on epäoleellinen integraali, joten lasketaan vaihteeksi huolellisesti. Funktion $\ln z$ integraalifunktio on $z \ln z - z$, mikä voidaan tarkistaa derivoimalla. Jos $a > 0$, niin saadaan

$$\int_a^1 \ln z\, dz = 1 \cdot \ln 1 - 1 - (a \ln a - a) = -1 - a - a \ln a.$$

Kun $a \to 0+$, tulee raja-arvoksi -1, sillä $a \ln a \to 0$ (voidaan esim. sijoittaa $a = e^{-t}$, jolloin $a \to 0+ \iff t \to \infty$, ja tunnetusti $a \ln a = -te^{-t} \to 0$, kun $t \to \infty$).

Tilavuudeksi saadaan siis $V = \pi$, joten täytyy olla $I^2 = \pi$, ja kaava (2) seuraa.

Kolmas tapa

Vaikka peli on jo selvä, lasketaan kysytty tilavuus vielä kolmannella tavalla. Tämäkin menetelmä perustuu siihen, että kyseessä on pyörähdyskappale. Nyt kuitenkin ajatellaan kappaleen muodostuvan sellaisista sylintereistä, joiden akseli on z-akselilla, ja sylinterin säteen ollessa $r \ge 0$ on sen korkeus puolestaan e^{-r^2}. Sijoittamalla $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ nähdään, että näistä sylintereistä muodostuu sama kappale kuin aikaisemmissa kohdissa. Tällaisen r-säteisen sylinterin pinta-ala on

$$\text{piiri} \cdot \text{korkeus} = 2\pi r e^{-r^2},$$

ja kappaleen tilavuus saadaan tällä kertaa kokoamalla sylintereiden pinta-alat yhteen muuttujan r suhteen. Tuloksena on integraali

$$V = \pi \int_0^\infty 2re^{-r^2}\ dr.$$

Tarvittava integraalifunktio on yksinkertaisesti $-e^{-r^2}$, joten sijoituksesta saadaan uudelleen

$$V = \pi(-\lim_{R\to\infty} e^{-R^2} + e^0) = \pi.$$

Pohdiskelua

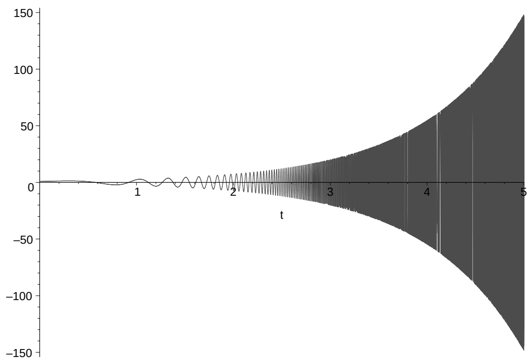
Ajatelkaamme laskun tulosta vielä uudelleen: saimme siis laskettua erään integraalin arvon, vaikka itse integraalifunktiosta ei ollut mitään tietoa. Lisäksi tulos oli suhteellisen yksinkertainen, eli $\sqrt{\pi}$. Vaikka asia voi tuntua hieman kummalliselta, useita epäoleellisia integraaleja voidaan laskea ilman tietoa integraalifunktiosta. Tällaisia esimerkkejä ovat mm.

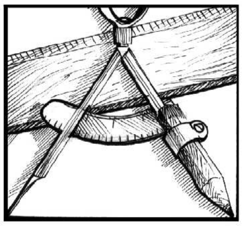
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\ dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{ja} \quad \int_0^\infty \sin(x^2)\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Jälkimmäinen integraali on siinä mielessä erityisen mielenkiintoinen, että integroitavalle funktiolle $\sin(x^2)$ **ei päde** $\lim_{x\to\infty}\sin(x^2) = 0$, mutta epäoleellinen integraali on kuitenkin suppeneva! En malta vielä lopuksi olla huomauttamatta, että kun tähän tehdään muuttujanvaihto $x = e^t$, saadaan suppeneva epäoleellinen integraali

$$\int_{-\infty}^\infty e^t \sin(e^{2t})\ dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}},$$

missä integroitava funktio heilahtelee hyvin voimakkaasti muuttujan t kasvaessa.





Kaikki tarpeellinen kompleksiluvuista

Matti Lehtinen
Maanpuolustuskorkeakoulu

Kompleksiluvut ovat poistumassa lukion matematiikan opetussunnitelmista. Ne ovat kuitenkin keskeinen osa matematiikan perustyökalustoa. Tässä artikkelissa kootaan tiiviiseen muotoon perustiedot kompleksiluvuista, johdatellaan eräiden kompleksisten funktioiden pariin, esitellään muutama kompleksilukujen geometrinen sovellus, analyyttisen geometrian perusobjektien ja geometristen peruskuvausten kompleksilukuversiot ja lopuksi hahmotellaan algebran peruslauseen todistus. Tämä lause on implisiittisesti mukana, kun esimerkiksi polynomien jaollisuutta tarkastellaan, mutta sen todistamista on pidetty liian haastellisena koulumatematiikkaan.

Artikkelin lopussa on muutama tehtävä. Niiden ratkaisut esitetään seuraavassa Solmun numerossa. Kirjoittajaa on paikoin inspiroinut Marian Dincăn ja Marcel Chiriţăn teos *Numere Complexe în Matematica de Liceu* (Bukarest 1996).

Perusteoriaa ja geometriaa

Kompleksilukujen algebraa

1. Lukuparien joukossa $\mathbb{R}^2 = \{(x,\, y) | x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\}$ määritellään

$$\begin{aligned}(x,\, y) + (x',\, y') &= (x + x',\, y + y'),\\ (x,\, y)(x',\, y') &= (xx' - yy',\, xy' + x'y).\end{aligned}$$

Näin $\mathbb{R}^2$:sta tulee algebrallinen *kunta* $\mathbb{C}$, jossa yhteenlaskun neutraalialkio on $(0,\, 0)$, alkion $(x,\, y)$ vasta-alkio on $(-x,\, -y)$; kertolaskun neutraalialkio on $(1,\, 0)$ ja alkion $(x,\, y) \neq (0,\, 0)$ käänteisalkio on

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2},\, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right).$$

$\mathbb{C}$:n alkiot ovat *kompleksilukuja*.

2. Kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = (x,\, 0)$, on laskutoimitukset säilyttävä bijektio. Näin ollen $\mathbb{R}' = f(\mathbb{R})$ on reaalilukujen joukon kanssa isomorfinen $\mathbb{C}$:n osajoukko. Merkitään $(x,\, 0) = x$ ja samastetaan $\mathbb{R}'$ ja $\mathbb{R}$. Täten $\mathbb{C}$ on $\mathbb{R}$:n laajennus.

3. Koska $(0,\, 1)(y,\, 0) = (0,\, y)$, on $(x,\, y) = (x,\, 0) + (0,\, 1)(y,\, 0) = x + (0,\, 1)y$. Merkitään $(0,\, 1) = i$. Silloin $(x,\, y) = x + yi$.

Jos $z = x + yi$, merkitään $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Kertolaskun määritelmän mukaan $i^2 = (0,\, 1)(0,\, 1) = (-1, 0) = -1$. Kompleksilukujen kertolasku voidaan suorittaa reaalilukujen laskutoimituksin lisäyksellä $i^2 = -1$. Kompleksilukua i sanotaan *imaginaariyksiköksi*.

4. Kompleksiluvun $z = x + yi$ *liittoluku* eli *konjugaatti* on $\overline{z} = x - yi$. Liittoluvun muodostus noudattaa sääntöjä $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$. Luvun $z = x + yi$ itseisarvo eli *moduli* on reaaliluku $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pätee $|z|^2 = z\overline{z}$, josta seuraa mm.

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \quad \text{ja} \quad z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Kompleksilukujen geometrinen esitys

5. Koska (joukkoina) $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{C}$ ovat samat, kompleksiluku $z = (x, y) = x + iy$ voidaan samastaa tason koordinaattipisteen $P = (x, y)$ tai origon O tähän koordinaattipisteeseen yhdistävän vektorin $\overrightarrow{OP} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ kanssa. Kompleksilukujen yhteenlaskua vastaa vektorien yhteenlasku ja kertolaskua, jossa toinen tulon tekijä on reaaliluku, vektorin kertominen reaaliluvulla. Joukko $\mathbb{R}$ on tässä mallissa x-akseli. Selvästi $|\overrightarrow{OP}| = |z|$.

6. Positiivisen x-akselin ja vektorin $\overrightarrow{OP}$ välinen x-akselista positiiviseen kiertosuuntaan mitattu kulma on kompleksiluvun z *argumentti* $\arg z$. Koska $x = \operatorname{Re} z = |z|\cos(\arg z)$ ja $y = \operatorname{Im} z = |z|\sin(\arg z)$, on

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)) \\ &= |z|(\cos(\arg z + 2n\pi) + i\sin(\arg z + 2n\pi)). \end{aligned}$$

Nähdään heti, että $\arg(\overline{z}) = 2\pi - \arg z = -\arg z \pmod{2\pi}$.

7. Jos $z_1 = |z_1|(\cos t_1 + i\sin t_1)$ ja $z_2 = |z_2|(\cos t_2 + i\sin t_2)$, niin

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1||z_2|(\cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2 \\ &\quad + i(\cos t_1 \sin t_2 + \sin t_1 \cos t_2)) \\ &= |z_1||z_2|(\cos(t_1 + t_2) + i\sin(t_1 + t_2)) \end{aligned}$$

Tästä seuraa $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ ja $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}$. Tulos yleistyy induktiolla tuloon, jossa on mielivaltainen määrä tekijöitä. Tästä seuraa erityisesti, että jos $z = r(\cos t + i\sin t)$, niin $z^n = r^n(\cos nt + i\sin nt)$, kun $n \in \mathbb{N}$ (*de Moivren* kaava). Osamäärälle saadaan

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}.$$

Kompleksiset juuret sekä eksponentti- ja logaritmifunktio

8. Jos $\sqrt[n]{a}$ on luku, jolle $(\sqrt[n]{a})^n = z$, ja jos $a = r(\cos t + i\sin t)$ niin jokainen luvuista

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{t + 2k\pi}{n}\right), \tag{1}$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$, voi olla $\sqrt[n]{a}$. Luvut (1) ovat yhtälön $z^n = a$ ratkaisut.

Esimerkkejä. $\sqrt[3]{1}$ on joko 1, $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ tai $\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\sqrt{i}$ on joko $\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{i}{2}\sqrt{2}$ tai $\cos\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}\sqrt{2}$.

9. Koska

$$\begin{aligned} e^{it} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \\ &\qquad \cdots + i(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots) \\ &= \cos t + i\sin t, \end{aligned}$$

voidaan kirjoittaa $z = r(\cos t + i\sin t) = re^{it}$ (Eulerin kaava).

10. Edellisen perusteella $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$. Siis $|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}$ ja $\arg e^z = y = \operatorname{Im} z$. (Voidaan osoittaa, että sarjan avulla määritelty kompleksinen eksponenttifunktio toteuttaa samat laskusäännöt kuin reaalinen eksponenttifunktiokin.) Olkoon $w = |w|(\cos\phi + i\sin\phi)$ mielivaltainen kompleksiluku. Yhtälö $e^z = w$ merkitsee, että $e^x = |w|$ eli $x = \ln|w|$ ja $y = \arg w \pmod{2\pi}$. Kompleksiluvun w logaritmilla $\log w$ on siten äärettömän monta arvoa: $\log w = \ln|w| + i\arg w + 2n\pi i$. Arvoista yksi on aina valittavissa niin, että sen imaginaariosa on välillä $[0, 2\pi[$. Ne logaritmin ominaisuudet, jotka ovat seurausta eksponenttifunktion laskusäännöistä, periytyvät sellaisinaan kompleksisille logaritmeille. Siten mm.

$$\log(w_1 w_2) = \log w_1 + \log w_2.$$

Esimerkkejä. Koska $\arg(-1) = \pi$, $\log(-1) = i\pi + 2n\pi i$. $\log(ei) = 1 + \frac{i\pi}{2} + 2n\pi i$.

11. Yleinen potenssi z^w määritellään nyt lukuna $e^{w\log z}$. Potenssilla on yleensä äärettömän monta eri arvoa.

Esimerkki. $i^i = e^{i\log i} = e^{i(i\frac{\pi}{2} + 2n\pi)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2n\pi}$. Luvun i^i likiarvoja ovat siten esim. 0,00000000135 ($n = 3$), 0,20788 ($n = 0$) ja 17093171649 ($n = -4$).

Kompleksitason geometriaa

12. Jos $z = x + yi$ on kompleksitason piste, niin $\overline{z} = x - yi$ on z:n symmetriapiste x-akselin suhteen, $-z = -x - yi$ on z:n symmetriapiste origon suhteen ja $-\overline{z} = -x + yi$ on z:n symmetriapiste y-akselin suhteen.

13. Jos z_1 ja z_2 ovat kompleksitason pisteitä, niin z on samalla suoralla kuin z_1 ja z_2, jos ja vain jos jollain reaaliluvulla k on

$$\frac{z - z_2}{z - z_1} = k$$

eli

$$z = \frac{z_2 - kz_1}{1 - k}. \tag{2}$$

Jos $k < 0$, z on pisteiden z_1 ja z_2 välissä, jos $0 < k < 1$, z_2 on z:n ja z_1:n välissä, ja jos $1 < k$, z_1 on z:n ja z_2:n välissä. Yhtälön (2) kanssa yhtäpitäviä samalla suoralla olemisen ehtoja ovat

$$z = pz_1 + qz_2, \quad p,\, q \in \mathbb{R}, \quad p + q = 1$$

ja

$$az + bz_1 + cz_2 = 0, \quad a,\, b,\, c \in \mathbb{R}, \quad a + b + c = 0,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

Esimerkki. Janan $[z_1,\, z_2]$ keskipisteessä $k = -1$, joten keskipiste on $z_M = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$. Jos z_3 on kolmas piste, kolmion, jonka kärjet ovat z_1, z_2 ja z_3 painopiste on se piste, jossa jana $[z_3,\, z_M]$ jakautuu suhteessa $2:1$; tämä piste on ($k = -\dfrac{1}{2}$)

$$z_G = \frac{z_M + \frac{1}{2}z_3}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3)}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3).$$

14. Pisteet z_1, z_2, z_3 ja z_4 ovat samalla ympyrällä, jos ja vain jos joko $\arg\dfrac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1} = \arg\dfrac{z_4 - z_3}{z_2 - z_3}$ tai $\arg\dfrac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1} + \arg\dfrac{z_2 - z_3}{z_4 - z_3} = \pi$. Tämä merkitsee, että *kaksoissuhde*

$$\frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_4 - z_3} = \frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1} : \frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_3}$$

on reaalinen. Jos suhde on reaalinen, pisteet z_1, z_2, z_3 ja z_4 ovat samalla ympyrällä tai samalla suoralla. Jos pisteet eivät ole samalla suoralla ja kaksoissuhde on negatiivinen, nelikulmio $z_1z_2z_3z_4$ on kupera ja sen ympäri voidaan piirtää ympyrä.

15. Olkoon $z_1z_2\ldots z_n$ kupera positiivisesti suunnistettu monikulmio kompleksitasossa. Merkitään $z_{n+1} = z_1$. Osoitetaan, että monikulmion pinta-ala on

$$S = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} z_{k+1}\overline{z}_k\right).$$

Tämä nähdään seuraavasti: Ensinnäkin jokaiselle kompleksiluvulle z on

$$\overline{z\sum_{k=1}^{n}\overline{z}_k + \overline{z}\sum_{k=1}^{n} z_{k+1}} = \overline{z}\sum_{k=1}^{n} z_k + z\sum_{k=1}^{n}\overline{z}_{k+1},$$

joten edellisen yhtälön lauseke on aina reaalinen. Tästä seuraa

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}(z_{k+1} + z)(\overline{z}_k + \overline{z})\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} z_{k+1}\overline{z}_k\right) + \mathrm{Im}\left(z\sum_{k=1}^{n}\overline{z}_k + \overline{z}\sum_{k=1}^{n} z_{k+1}\right)\\
&\qquad + \mathrm{Im}(n|z|^2) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} z_{k+1}\overline{z}_k\right).
\end{aligned}$$

Koska pinta-alaksi väitetyn summan arvo ei muutu,kun jokaiseen z_k:hon lisätään z, voidaan monikulmio siirtää niin, että origo on sen sisäpuolella. Jos nyt $z_k = r_k(\cos t_k + i\sin t_k)$, on $\mathrm{Im}(z_{k+1}\overline{z}_k) = r_{k+1}r_k\sin(t_{k+1} - t_k)$ eli kaksi kertaa sen kolmion ala, jonka kärjet ovat O, z_k ja z_{k+1}. Koska koko monikulmion ala saadaan laskemalla yhteen kaikkien kolmioiden Oz_kz_{k+1} alat, väite seuraa.

16. Samoin suunnistetut kolmiot $A_1A_2A_3$ ja $B_1B_2B_3$ ovat yhdenmuotoiset, jos (esim.)

$$\frac{A_1A_2}{A_1A_3} = \frac{B_1B_2}{B_1B_3} \quad \text{ja} \quad \angle A_2A_1A_3 = \angle B_1B_2B_3.$$

Jos pistettä A_i (B_i) vastaa kompleksiluku a_i (b_i), niin yhdenmuotoisuusehdoista edellinen sanoo, että kompleksiluvuilla $\dfrac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}$ ja $\dfrac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}$ on sama moduli, jälkimmäinen, että niillä on sama argumentti. Yhdenmuotoisuus vallitsee siis, jos (ja elleivät kolmiot surkastu, vain jos)

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}. \tag{3}$$

Jos kolmiot ovat vastakkaisesti suunnistetut, saadaan pari samoin suunnistettuja kolmioita peilaamalla toinen kolmio x-akselin yli. Yhdenmuotoisuusehto on tässä tapauksessa

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{\overline{b}_2 - \overline{b}_1}{\overline{b}_3 - \overline{b}_1}.$$

Yhtälö (3) voidaan kirjoittaa symmetriseen muotoon

$$\det\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

[Oletamme kolmirivisten determinanttien perusominaisuudet tunnetuiksi; ne eivät riipu siitä, ovatko determinantin alkiot reaalisia vai kompleksisia.]

17. Jos kolmio $A_1A_2A_3$ on yhdenmuotoinen kolmion $A_2A_3A_1$ kanssa, se on tasasivuinen. Edellisin merkinnöin tämä toteutuu, kun

$$\det\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Edellinen yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$ kanssa ja edelleen yhtälön

$$(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2 = 0$$

kanssa.

Analyyttisen geometrian yhtälöiden kompleksimuotoja

18. Yhtälöparit

$$z = x + iy, \quad \overline{z} = x - iy$$

ja

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = -\frac{i}{2}(z - \overline{z})$$

ovat yhtäpitävät. Tätä tietoa hyväksi käyttäen relaatiot $f(x, y) = 0$ voidaan muuntaa relaatioiksi $\phi(z, \overline{z}) = 0$.

19. Suoran yhtälö $ax + by + c = 0$ muuntuu muotoon

$$\frac{a}{2}(z+\overline{z}) - \frac{bi}{2}(z-\overline{z}) + c = \frac{1}{2}((a-bi)z + (a+ib)\overline{z}) + c = 0$$

eli

$$\alpha z + \overline{\alpha z} + c = 0, \tag{4}$$

missä c on reaaliluku. Jos suora kulkee pisteen z_0 kautta, on oltava $c = -\alpha z_0 - \overline{\alpha z_0}$. Suoran yhtälö on siis

$$\alpha(z - z_0) + \overline{\alpha}(\overline{z} - \overline{z}_0) = 0.$$

Jos z, z_1 ja z_2 eivät ole samalla suoralla, ne muodostavat kolmion, joka ei ole (suoraan) yhdenmuotoinen sen kolmion kanssa, jonka kärjet ovat $\overline{z}$, $\overline{z}_1$ ja $\overline{z}_2$. Edellä kolmioiden yhdenmuotoisuudesta tehty tarkastelu merkitsee, että pisteet ovat samalla suoralla, jos ja vain jos

$$\det\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & z_1 & z_2 \\ \overline{z} & \overline{z}_1 & \overline{z}_2 \end{vmatrix} = 0.$$

20. Suoran $\alpha z + \overline{\alpha z} + c = 0$ eli $(\alpha + \overline{\alpha})x + i(\alpha - \overline{\alpha})y + c = 0$ kulmakerroin on

$$k = -\frac{\alpha + \overline{\alpha}}{i(\alpha - \overline{\alpha})} = i\frac{\alpha + \overline{\alpha}}{\alpha - \overline{\alpha}}. \tag{5}$$

Jos suoran ja x akselin välinen kulma on ϕ, niin $k = \tan\phi = \dfrac{\sin\phi}{\cos\phi}$. Yhtälöstä (5) voidaan ratkaista

$$-\frac{\alpha}{\overline{\alpha}} = \frac{\cos\phi + i\sin\phi}{\cos\phi - i\sin\phi} = \frac{e^{i\phi}}{e^{-i\phi}} = e^{2\phi i},$$

ja edelleen

$$\phi = \frac{i}{2}\log\left(-\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}\right).$$

Kahden eri suoran $\alpha z + \overline{\alpha z} + a = 0$ ja $\beta z + \overline{\beta}\overline{z} + b = 0$ väliseksi kulmaksi saadaan

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{i}{2}\log\left(-\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}\right) - \frac{i}{2}\log\left(-\frac{\overline{\beta}}{\beta}\right) = \frac{i}{2}\log\left(\frac{\overline{\alpha}\beta}{\alpha\overline{\beta}}\right).$$

Tästä saadaan suorien yhdensuuntaisuudelle ehto $\overline{\alpha}\beta = \alpha\overline{\beta}$ eli

$$\frac{\alpha}{\overline{\alpha}} - \frac{\beta}{\overline{\beta}} = 0$$

ja kohtisuoruudelle $\overline{\alpha}\beta = -\alpha\overline{\beta}$ eli

$$\frac{\alpha}{\overline{\alpha}} + \frac{\beta}{\overline{\beta}} = 0.$$

Ehto toteutuu esim. jos $\beta = i\alpha$.

21. Pisteen z_0 kautta kulkevan ja suoraa (4) vastaan kohtisuoran suoran yhtälöksi saadaan edellisestä

$$\alpha(z - z_0) - \overline{\alpha}(\overline{z} - \overline{z}_0) = 0.$$

Yhtälöparista

$$\begin{cases} \alpha z - \overline{\alpha z} &= \alpha z_0 - \overline{\alpha z_0}, \\ \alpha z + \overline{\alpha z} &= -c \end{cases}$$

saadaan pisteen z_0 kohtisuoraksi projektioksi suoralla (4)

$$z_1 = \frac{\alpha z_0 - \overline{\alpha z_0} - c}{2\alpha}.$$

Pisteen z_0 etäisyys suorasta (4) on

$$|z_0 - z_1| = \left|\frac{2\alpha z_0 - \alpha z_0 + \overline{\alpha z_0} + c}{2\alpha}\right| = \frac{|\alpha z_0 + \overline{\alpha z_0} + c|}{2|\alpha|}.$$

22. Pisteen z_0 kautta kulkeva kompleksiluvun w esittämän vektorin suuntaisen suoran pisteissä z on $z - z_0 = tw$, missä t on reaaliluku. Tämä merkitsee, että pisteissä toteutuu yhtälö

$$\frac{z - z_0}{w} = \frac{\overline{z} - \overline{z}_0}{\overline{w}}$$

eli

$$\overline{w}z - w\overline{z} + w\overline{z}_0 - \overline{w}z_0 = 0.$$

Kun tätä verrataan yhtälöön (4) (jossa c on reaalinen!), saadaan $\alpha = i\overline{w}$.

23. Ympyrän $x^2+y^2+ax+by+c = 0$ yhtälöksi saadaan kuten kohdassa 19

$$z\overline{z} + \alpha z + \overline{\alpha z} + c = 0, \qquad (6)$$

missä $\alpha = \dfrac{1}{2}(a - ib)$. Jos ympyrän keskipiste on μ ja säde r, niin ympyrän yhtälö on myös

$$(z - \mu)(\overline{z} - \overline{\mu}) = r^2.$$

Siis $\alpha = -\overline{\mu}$ ja $c = |\mu|^2 - r^2$. Pisteen z_0 potenssi ympyrän (6) suhteen on

$$|z_0 - \mu|^2 - r^2 = z_0\overline{z}_0 + \alpha z_0 + \overline{\alpha z}_0 + c.$$

Tavalliset geometriset transformaatiot kompleksitasossa

24. Jos $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on jokin kompleksitason transformaatio, niin merkitään $T(z) = z'$, $T(z_k) = z'_k$ jne.

Tason *siirto* on kuvaus $T(z) = z + w$.

25. Tason *kierto* origon ympäri kulman ϕ verran vastapäivään on $T(z) = e^{i\phi}z$. Kierto pisteen w ympäri on $T(z) = w + e^{i\phi}(z - w) = e^{i\phi}z + w(e^{i\phi} - 1)$.

Olkoon $|a| = 1$, $a \neq 1$ ja $T(z) = az + b$. Silloin

$$T(z) = az + \frac{b}{a-1}(a - 1),$$

joten T on kierto pisteen $\dfrac{b}{a-1}$ ympäri. Kahden kierron yhdistäminen on kierto tai siirto: jos $T_1(z) = a_1z + b_1$, $T_2(z) = a_2z + b_2$ ovat kiertoja, niin $T_2(T_1(z)) = (a_2a_1)z + a_2b_1 + b_2$, missä $|a_1a_2| = 1$.

26. Kuvaus $T(z) = \overline{z}$ on *peilaus* x-akselin yli. Origon kautta kulkeva suora ℓ: $\alpha z + \overline{\alpha z} = 0$, on kohdan 22 mukaan vektorin $w = \dfrac{i\overline{\alpha}}{|\alpha|}$ suuntainen. Transformaatio

$$T(z) = w(\overline{\overline{w}z}) = w^2\overline{z} = -\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}\overline{z}$$

koostuu kierrosta, jolla suora ℓ kääntyy x-akseliksi, peilauksesta x-akselin yli ja kierrosta, jolla x-akseli palautuu suoraksi ℓ. Transformaatio on siis peilaus suorassa ℓ. Yleinen suora $\alpha z + \overline{\alpha z} + c = 0$ leikkaa x-akselin pisteessä $-\dfrac{c}{\alpha + \overline{\alpha}}$. Näin ollen peilaus tässä suorassa on

$$T(z) = -\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}\left(\overline{z} + \frac{c}{\alpha + \overline{\alpha}}\right) - \frac{c}{\alpha + \overline{\alpha}}.$$

27. Origokeskinen *homotetia*, jossa homotetiasuhde on $k \in \mathbb{R}$, on $T(z) = kz$. Homotetia, jonka homotetiakeskus on w, on $T(z) = w + k(z - w) = kz + (1 - k)w$.

28. Olkoon $a = |a|e^{i\phi} \in \mathbb{C}$ mielivaltainen. Kuvaus

$$T(z) = az + b = a\left(z + \frac{b}{a}\right) = |a|\left(e^{i\phi}\left(z + \frac{b}{a}\right)\right)$$

on translaatiosta, kierrosta ja homotetiasta yhdistetty. Koska kukin näistä kuvaustyypeistä säilyttää kuvioiden yhdenmuotoisuuden, T on *yhdenmuotoisuuskuvaus*. Numeron 16 tarkasteluista seuraa, että jokainen yhdenmuotoisuuskuvaus on joko muotoa $T(z) = az + b$ tai $T(z) = a\overline{z} + b$.

29. *Inversio* origokeskisessä 1-säteisessä ympyrässä on kuvaus $T(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$. Inversio z_0-keskisessä ja r-säteisessä ympyrässä määrittyy kaavalla

$$T(z) = z_0 + \frac{r^2}{\overline{z} - \overline{z}_0}.$$

Algebran peruslause

30. Todistetaan *algebran peruslause*. Sen mukaan jokaisella polynomilla

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0,$$

missä kertoimet a_j ovat kompleksilukuja, on ainakin yksi nollakohta, ts. yhtälöllä $P(z) = 0$ on ainakin yksi ratkaisu. Todistus vaatii hiukan analyysin käsitteitä ja tietoja.

31. Kompleksilukujonolla z_j, $j = 1, 2, \ldots$, eli (z_j) on *raja-arvo* z, jos $|z_n - z|$ on mielivaltaisen pieni kaikilla tarpeeksi suurilla n:n arvoilla. (Tämä voidaan lausua täsmällisemminkin, mutta tarpeisiimme riittää tämä.) Jos P on polynomi, $w_j = P(z_j)$ ja jonolla (z_j) on raja-arvo z, niin jonolla (w_j) on raja-arvo $w = P(z)$. Tämä seuraa siitä, että

$$\begin{aligned}
&|w_j - w| = |P(z_j) - P(z)| \\
&= |z_j^n - z^n + a_{n-1}(z_j^{n-1} - z^{n-1}) + \cdots + a_1(z_j - z)| \\
&\qquad = |z_j - z|Q(z_j, z).
\end{aligned}$$

Kun j on tarpeeksi suuri, $|z_j - z|$ on pieni; tällöin lauseke $Q(z_j, z)$ on kiinteän ylärajan alapuolella, ja tulo $|z_j - z|Q(z_j, z)$ tulee sekin mielivaltaisen pieneksi.

32. Tarkastellaan kaikkien niiden reaalilukujen joukkoa E, jotka jollain z:n arvolla ovat muotoa $|P(z)|$. Luku x on E:n *alaraja*, jos jokainen E:n alkio on $\geq x$. Jokainen ei-positiivinen luku on E:n alaraja. Reaalilukujen perusominaisuuksia on, että E:n alarajojen joukossa on *suurin alaraja*. (Sitä kutsutaan myös E:n *infimumiksi* ja merkitään $\inf E$.) Olkoon tämä suurin alaraja a. Havaitaan, että jos $|P(z)| \neq a$, on olemassa $z' \neq z$ siten, että $|P(z')| < |P(z)|$. Jos nimittäin kaikilla $z' \in \mathbb{C}$ olisi $|P(z)| \leq |P(z')|$, olisi $|P(z)|$ a:ta suurempi E:n alaraja.

33. Osoitetaan, että jollain z_0 pätee yhtälö $|P(z_0)| = a$. Tehdään vastaoletus: $P(z) > a$ kaikilla z. Jos näin on, voidaan löytää luku z_1, jolle $|P(z_1)| < a + 1$ ja päättymätön lukujono (z_j), jolla on esim. ominaisuus $|P(z_{j+1})| - a < \frac{1}{2}(|P(z_j)| - a)$ ja siis myös $|P(z_j)| < a + \frac{1}{2^j}$. Koska

$$|P(z)| = |z|^n \left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right|$$

ja koska termit, joissa z on nimittäjässä, tulevat pieniksi, kun $|z|$ on suuri, niin $|P(z)|$ tulee suureksi, kun z on tarpeeksi suuri. Tästä seuraa, että kaikki jonon (z_j) luvut ovat jossain neliössä $Q = \{z \in C | -R < \operatorname{Re} z < R, -R < \operatorname{Im} z < R\}$. Jaetaan Q neljään yhtä suureen neliöön. Koska jonossa (z_j) on äärettömän monta lukua, jossain näistä neljästä neliöstä, esim. neliössä Q_1, on äärettömän monta luvuista z_j. Prosessia voidaan jatkaa: jos Q_1 jaetaan neljäksi neliöksi, jossain näistä, esim neliössä Q_2, on äärettömän monta luvuista z_j jne. Neliöt (Q_m) ovat sisäkkäin ja niiden sivujen pituudet ovat $\frac{1}{2^m}R$. Tästä seuraa, että neliöiden kärkipisteet muodostavat kompleksilukujonot, joilla on sama raja-arvo z_0. Lukujonosta (z_j) voidaan poimia ääretön osajono (z_{j_k}), jonka raja-arvo on myös z_0. Jonon $|P(z_{j_k})|$ raja-arvo on $P(z_0)$. Jos olisi $|P(z_0)| > a$, jouduttaisiin ristiriitaan ominaisuuden $|P(z_{j_k})| < a + \frac{1}{2^{j_k}}$ kanssa. Siis $|P(z_0)| = a$.

34. Osoitetaan vielä, että $a = 0$. Oletetaan, että näin ei ole, että $a > 0$ ja $P(z_0) = w_0 = a(\cos\phi_0 + i\sin\phi_0) = ae^{i\phi_0}$. Nyt voidaan kirjoittaa

$$P(z) = (z-z_0)^n + b_{n-1}(z-z_0)^{n-1} + \cdots + b_1(z-z_0) + w_0.$$

Olkoon k pienin indeksi, jolla $b_k \neq 0$. Silloin

$$P(z) = w_0 + b_k(z - z_0)^k(1 + Q(z)),$$

missä $Q(z)$ on polynomi, jonka arvot ovat pieniä, kun z on lähellä z_0:aa. Voidaan esimerkiksi valita niin pieni r, että kun $z = z_0 + re^{i\phi}$, niin $|Q(z)| < \frac{1}{2}$ ja samalla $2r^k|b_k| < a$. Näillä z:n arvoilla

$$P(z) = ae^{i\phi_0} + r^k|b_k||1 + Q(z)|e^{i(k\phi+\alpha+\beta(z))},$$

missä $\alpha = \arg b_k$ ja $\beta(z) = \arg(1 + Q(z))$. Tehdystä oletuksesta seuraa, että $|\beta(z)| < \frac{\pi}{4}$ ja $|1 + Q(z)| < 2$. Edelleen löytyy ϕ niin, että $k\phi + \alpha + \beta(z) = \phi_0 + \pi$. Mutta tällä ϕ:n arvolla

$$P(z) = P(z_0 + re^{i\phi}) = (a - r^k|b_k||1 + Q(z)|)e^{i\phi_0}$$

ja $|P(z)| < a$. Tultiin ristiriitaan sen kanssa, että a on $|P(z)|$:n arvojen alaraja. Siis vastaoletus onkin väärä, ja $P(z_0) = 0$. Algebran peruslause on todistettu.

Tehtäviä

35. Johda $\sin 6x$:n ja $\cos 6x$:n lausekkeet $\sin x$:n ja $\cos x$:n polynomeina.

36. Laske

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k.$$

37. Jos a ja b ovat kokonaislukuja, niin $z = a + ib$ on *kompleksinen kokonaisluku*. Jos kompleksista kokonaislukua z ei voida kirjoittaa muotoon $z = z_1 z_2$, missä z_1 ja z_2 ovat kompleksisia kokonaislukuja $\neq 1$, niin z on *kompleksinen alkuluku*. Selvitä, mitkä joukon $\{3, 5, 7\}$ luvut ovat kompleksisia alkulukuja.

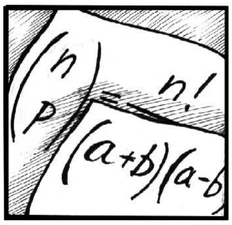
38. Selvitä, mitä tapahtuu suoralle ja ympyrälle inversiokuvauksessa.

39. Olkoon $\varepsilon \neq 1$ yhtälön $z^3 = 1$ jokin ratkaisu. Osoita, että pisteet z_1, z_2 ja z_3 ovat tasasivuisen kolmion kärjet jos ja vain jos

$$z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0.$$

40. Kuperan nelikulmion $ABCD$ sivuille piirretään (ulkopuolisesti) tasasivuiset kolmiot ABM, BCN, CDP ja DAQ. Osoita, että nelikulmioilla $ABCD$ ja $MNPQ$ on sama painopiste.

41. Selvitä, miten säännöllinen 5-kulmio voidaan konstruoida lähtemällä yhtälön $z^5 = 1$ ratkaisusta.



Tuomaksen tehtäviä

Tuomas Korppi
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Eräässä yhdistyksessä 31 henkilöä äänestää yhdistyksen puheenjohtajan. Ehdokkaita on 3: A, B ja C. Vaali järjestetään kaksikierroksisena, samalla järjestelmällä kuin Suomen presidentinvaalit. Ensimmäisellä kierroksella jokainen äänestää haluamaansa ehdokasta.

- Jos joku ehdokkaista saa yli 50 prosenttia äänistä, hän voittaa.
- Muutoin 2 eniten ääniä saanutta pääsee toiselle kierrokselle. Tällöin vaalin voittaa toisella kierroksella eniten ääniä saanut.

(Mahdolliset tasatilanteet ratkaistaan arvalla.)

Äänestäjien mielipidejakauma tarkoittaa taulukkoa, jossa kunkin äänestäjän kohdalla on mainittu hänen mielensä mukainen kaikkien ehdokkaiden paremmuusjärjestys. Tässä tehtäväsarjassa oletamme, että kukaan ei pidä ketään kahta ehdokasta täsmälleen yhtä hyvinä. Oletamme tässä tehtäväsarjassa myös, että jokainen äänestää tarjolla olevista ehdokkaista parhaana pitämäänsä kaikissa äänestyksissä.

Tehtävä 1. *Mukana äänestämässä ovat myös M ja P. Etsi mielipidejakauma (31-2=29 äänestäjälle), joka toteuttaa kaikki seuraavat ehdot:*

- *Jos M ja P äänestävät 1. ja 2. kierroksilla A:ta, A ei tule valituksi.*
- *Jos M ja P äänestävät 1. kierroksella B:tä ja 2. kierroksella A:ta, A tulee valituksi.*
- *Kummassakaan edellisessä tilanteessa ei jouduta arpomaan.*

Ehdokas X on Condorcet-voittaja, jos kaikille muille ehdokkaille Y pätee seuraava:

> Yli puolet äänestäjistä pitää X:ää parempana kuin Y:tä. (Eli yli puolella äänestäjistä X on Y:tä korkeammalla ehdokkaiden paremmuusjärjestyslistassa.)

Oletetaan edelleen 31 äänestäjää ja kolme ehdokasta.

Tehtävä 2. *Anna esimerkki mielipidejakaumasta, jossa ei ole Condorcet-voittajaa.*

Tehtävä 3. *Anna esimerkki mielipidejakaumasta, jossa on Condorcet-voittaja, mutta hän ei tule valituksi tehtäväsarjan alussa esitetyssä kaksikierroksisessa vaalissa.*

Oletetaan edelleen 31 äänestäjää ja 3 ehdokasta A, B ja C.

Yhdistys päättääkin muuttaa vaalitapaa seuraavasti: Ensin yhdistyksen ex-puheenjohtaja valitsee ensimmäiselle kierrokselle haluamansa kaksi ehdokkaiden A,B

ja C joukosta. Ensimmäisellä kierroksella äänestetään, kumpi näistä kahdesta pääsee toiselle kierrokselle. Toisella kierroksella valitaan yhdistyksen puheenjohtaja, ja ehdokkaina ovat 1. kierroksen voittaja sekä se ehdokas, joka ei ollut ensimmäisellä kierroksella.

Tehtävä 4. *Ex-puheenjohtaja yrittää taktikoida niin, että hän päästää suosikkinsa suoraan toiselle kierrokselle. Missä seuraavista tilanteista ex-puheenjohtajan juoni toimii?*

1. *Ex-puheenjohtajan suosikki on Condorcet-voittaja.*
2. *Condorcet-voittaja on joku muu ehdokas kuin ex-puheenjohtajan suosikki.*
3. *Condorcet-voittajaa ei ole.*

Lisätietoa vaalijärjestelmistä löytyy osoitteista `http://en.wikipedia.org/wiki/Condorcet_method` ja `http://en.wikipedia.org/wiki/Instant_runoff_voting`

Ratkaisut

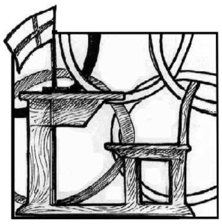
Tehtävien 1-3 ratkaisut ovat esimerkkejä toimivista ratkaisuista, eivät ainoita oikeita.

(1) 12 äänestäjän mielestä paremmuusjärjestys on ABC, 8 mielestä BCA ja 9 mielestä CAB.

(2) 11 äänestäjän mielestä paremmuusjärjestys on ABC, 10 mielestä BCA ja 10 mielestä CAB.

(3) 4 äänestäjän mielestä paremmuusjärjestys on ABC, 14 mielestä BAC ja 13 mielestä CAB.

(4) Kohdat 1 ja 2: Koska Condorcet-voittaja voittaa kaikki kahden ehdokkaan väliset äänestykset, joissa hän on mukana, hän tulee valituksi. Kohta 3: Nyt ex-puheenjohtajan juoni toimii. Jos 1. kierroksen voittaja voittaisi myös 2. kierroksen, hän olisi Condorcet-voittaja. Koska oletimme, että Condorcet-voittajaa ei ole, on 1. kierroksen voittajan pakko hävitä 2. kierros, ja siis ex-puheenjohtajan suosikki voittaa 2. kierroksen ja tulee valituksi.



Matematiikan Suomen mestaruus ratkaistiin

Matemaattisten aineiden opettajien liiton MAOL:in jokavuotinen lukion matematiikkakilpailu ratkesi Helsingissä, Ressun lukiossa pidetyssä loppukilpailussa 3 helmikuuta 2006. Kilpailu oli kymmenes kaksiportaisen lukion matematiikkakilpailun loppukilpailu. Ennen vuotta 1997 matematiikkamestaruus ratkaistiin yksiportaisessa samaan aikaan eri kouluissa pidetyssä kilpailussa. Loppukilpailu järjestetään osana MAOL:in Neljän tieteen kisoihin kuuluvien lukion fysiikka- ja kemiakilpailujen sekä peruskoulun matematiikkakilpailun kanssa. Kilpailujen yhteisessä palkintojenjakotilaisuudessa 4.2. kuultiin myös kilpailuja rahoittavan Opetushallituksen tervehdys opetusneuvos Jari Koiviston välittämänä.

Loppukilpailun 20 osallistujaa karsittiin 4.10.2005 kouluissa pidetyssä kolmisarjaisessa alkukilpailussa. Alkukilpailu käytiin ikäporrastuksen mukaan kolmessa sarjassa. Avoimesta sarjasta loppukilpailuun pääsi 15, välisarjasta neljä ja perussarjasta voittaja. Kaikki 20 valittua olivat läsnä loppukilpailussa. Kilpailussa oli viisi tehtävää ja niiden ratkaisemiseen aikaa kolme tuntia.

Loppukilpailun tehtävät löytyvät linkistä
`http://solmu.math.helsinki.fi/2006/1/lopp06.pdf`
ja tehtävien ratkaisut linkistä
`http://solmu.math.helsinki.fi/2006/1/ratk06.pdf`.
Tehtävät osoittautuivat vähän liian helpoiksi, kilpailijoille, joiden joukossa oli mm. viisi Suomea jo Kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa edustanutta, sillä peräti kuusi kilpailijaa jätti kaikkiin tehtäviin jokseenkin oikeat ratkaisut. Kilpailun tuomaristo, Kerkko Luosto, Hilkka Taavitsainen, Pekka Norlamo ja Matti Lehtinen, joutuikin ratkaisemaan kärkitilat katsomalla parhaita vastauksia tavallista tarkemmalla silmällä. Yksiselitteistä voittajaa ei kuitenkaan löytynyt, vaan kärkitila jaettiin Päivölän Opiston Janne Kokkalan ja Someron lukion Ville Petterssonin kesken. Tulosluettelo oli kaikkiaan seuraava:

```
1.  Kokkala, Janne (Päivölän opisto, Valkeakoski) 30
    Pettersson, Ville (Someron lukio) 30
3.  Blåsten, Eemeli (Helsingin matematiikkalukio) 29
4.  Dumitrescu, Sebastian (Tampereen lyseo) 28
    Sireni, Jukka (Lahden yhteiskoulu) 28
    Vesalainen, Esa (Helsingin matematiikkalukio) 28
7.  Tanttu, Tuomo (Olarin lukio, Espoo) 25
8.  Hämäläinen, Simo (Kuopion lyseo) 22
9.  Chukarev, Konstantin (Hervannan lukio, Tampere) 21
10. Kettunen, Markus (Helsingin matematiikkalukio) 20
    Laaksonen, Antti (Ressun lukio, Helsinki) 20
12. Tilli, Juha-Matti (Olarin lukio) 18
13. Waenerberg, Ossi (Joensuun normaalikoulu) 17
14. Kaipiainen, Arttu (Joensuun normaalikoulu) 15
15. Ahti, Ville (Tampereen klassilinen lukio) 14
16. Rantanen, Paula (Padasjoen lukio) 12
17. Sun, Xiaxouan (Tikkurilan lukio, Vantaa) 12
18. Kaasinen, Joel (Päivölän opisto) 11
19. Poranen, Simo (Päivölän opisto) 4
20. Solala, Elis (Päivölän opisto) 3
```