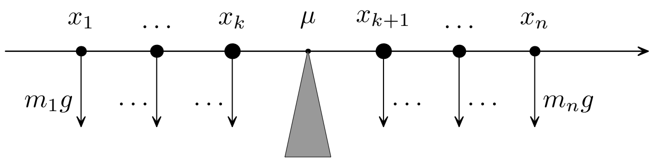
Painopiste

Markku Halmetoja
Mäntän lukio

Sanomme tasa-aineiseksi kappaletta, jonka materiaalissa ei ole sisäisiä tiheyden vaihteluja. Tällaisen kappaleen painopisteen sijainti voidaan joskus päätellä kappaleen muodon perusteella. Esimerkiksi tasa-aineisen pallon painopiste on selvästi pallon keskipiste. Jos tasa-aineisella kappaleella on symmetria-akseli, niin painopiste on akselilla ja jos kappaleella on useampia symmetria-akseleita, niin painopiste on niiden leikkauspiste. Tutkimme painopisteen laskemista siinä tapauksessa, että kappaleella on yksi symmetria-akseli. Ongelma johtaa integraalilaskentaan ja tarjoaa mainioita mahdollisuuksia soveltaa lukiossa opittua laskutekniikkaa. Tarvittavan perusfysiikan kertaamiseksi tutkimme aluksi suoralla sijaitsevaa diskreettiä massajakaumaa.

Pistemäiset massat $m_1, \ldots, m_n$, joiden summa on m, sijaitkoot x-akselin pisteissä $x_1, \ldots, x_n$. Painopiste μ sijaitsee jossakin väleistä $[x_k, x_{k+1}[$. Jakauma on μ:n suhteen tasapainossa, jos pisteisiin x_i vaikuttavien voimien μ:n suhteen laskettujen momenttien summa on nolla. Koska massat ovat suoralla, voimme merkitä μ:n molemmin puolin laskettujen momenttien itseisarvot keskenään yhtäsuuriksi.



Kuva 1.

Saamme yhtälön

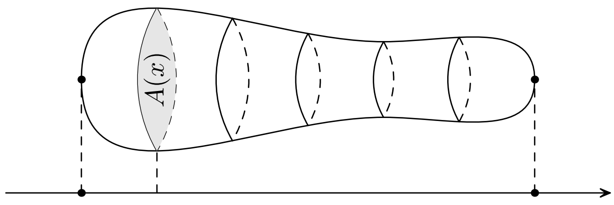
$$\sum_{i=1}^{k}(\mu - x_i)m_i g = \sum_{i=k+1}^{n}(x_i - \mu)m_i g,$$

josta edelleen

$$\mu = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} x_i m_i. \tag{1}$$

Perehdymme seuraavaksi kappaleisiin, joiden massajakauma on jatkuva. Integraalilaskennan perusidean kertaamiseksi katsomme aluksi, miten kappaleen tilavuus lasketaan.

Olkoot a ja b kappaleen ääripäiden projektiot x-akselilla. Jos kappaletta leikataan x-akselia vastaan kohtisuorilla tasoilla ja tunnetaan leikkauskuvion pinta-ala $A(x)$ jokaisessa pisteessä $x \in [a, b]$, niin kappaleen tilavuus voidaan laskea.

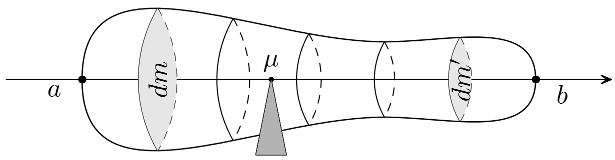


Kuva 2.

Kohdassa x oleva *tilavuusalkio* on $dV = A(x)\,dx$ ja kappaleen tilavuus saadaan summaamalla välillä $[a, b]$ olevat tilavuusalkiot:

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b A(x)\,dx.$$

Oletamme nyt, että kiinteällä kappaleella on yksi symmetria-akseli, jonka valitsemme x-akseliksi. Kappaleen ääripäät sijaitkoot pisteissä a ja b. Määritämme kappaleen painopisteen momenttiehtoa soveltamalla. Jaetaan kappale x-akselia vastaan kohtisuorilla tasoilla levymäisiksi massa-alkioiksi kuvan osoittamalla tavalla.



Kuva 3.

Pisteissä x ja x' oleviin massa-alkioihin dm ja dm' vaikuttavien voimien momenttialkiot (niiden itseisarvot) μ:n suhteen ovat $(\mu - x)g\,dm$ ja $(x' - \mu)g\,dm$. Summaamalla ne μ:n molemmin puolin saamme yhtälön

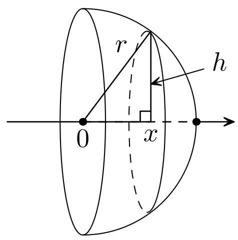
$$\int_a^\mu (\mu - x)g\,dm = \int_\mu^b (x' - \mu)g\,dm',$$

josta, merkitsemällä $m = \int_a^b dm$, edelleen

$$\mu = \frac{1}{m}\int_a^b x\,dm. \tag{2}$$

Yhtälöt (1) ja (2) näyttävät samanlaisilta, mutta niillä on eräs selkeä eroavaisuus: yhtälö (1) on valmis laskukaava, jonka avulla voidaan laskea diskreetin massajakauman painopiste sijoittamalla kaavaan massat ja niiden koordinaatit kun taas yhtälö (2) on pikemminkin toimintaohje laskun suorittamiseksi, sillä massa-alkio dm on muodostettava aina tapauskohtaisesti. Kaava (2) toimii myös silloin, kun kappaleen tiheys (massa pituusyksikköä kohti) vaihtelee. Tiheys on tällöin tunnettava jokaisessa kohdassa x eli on tunnettava *tiheysfunktio* f, jonka arvo ilmoittaa kappaleen tiheyden leikkauskohdassa x. Jos $y = f(x)$ on tällainen funktio, niin $\frac{dm}{dx} = f(x)$ ja siis kohdassa x oleva massa-alkio on $dm = f(x)\,dx$.

Esimerkki. Määritämme tasa-aineisen r-säteisen puolipallon painopisteen. Olkoon m kappaleen massa jolloin tiheys on $\rho = m/V$, missä $V = 2\pi r^3/3$. Puolipallon symmetria-akseli on halkaisijatasoa vastaan kohtisuora säde.



Kuva 4.

Kuvan mukaan kohdassa x oleva tilavuusalkio on $dV = \pi h^2\,dx = \pi(r^2 - x^2)\,dx$ ja sitä vastaava massa-alkio on

$$dm = \rho\,dV = \frac{3m}{2r^3}\left(r^2 - x^2\right)dx.$$

Saamme

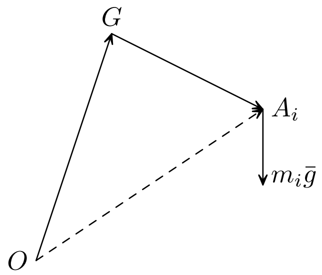
$$\mu = \frac{1}{m}\int_0^r x\,dm = \frac{3}{2r^3}\int_0^r \left(r^2 x - x^3\right)dx = \frac{3}{8}r.$$

Painopiste sijaitsee siis halkaisijatasoa vastaan kohtisuoralla säteellä etäisyydellä $3r/8$ halkaisijatasosta.

Tutkimme vielä diskreettiä massajakaumaa yleisemmin. Sijaitkoot pistemäiset massat $m_1, \ldots, m_n$ pisteissä $A_1, \ldots, A_n$ massattoman tukirakenteen kannattelemina ja olkoon m massojen summa. Olkoon edelleen O mielivaltaisesti valittu avaruuden piste. Yhtälöiden (1) ja (2) perusteella "arvaamme" painopisteen G sijainnin seuraavasti:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^n m_k \overrightarrow{OA_i}. \tag{3}$$

Näemme G:n massajakauman painopisteeksi osoittamalla, että pisteisiin A_i vaikuttavien voimien G:n suhteen laskettujen momenttien $\overrightarrow{GA_i} \times m_i\bar{g}$ summa on $\bar{0}$. Jätämme tämän harjoitustehtäväksi.



Kuva 5.

Pisteen G sijainti riippuu näennäisesti myös O:sta, mutta voidaan osoittaa, että jos

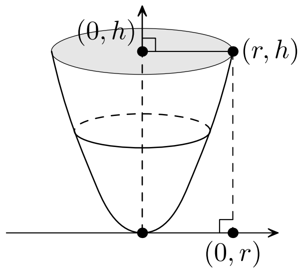
$$\overrightarrow{O'G'} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_k \overrightarrow{O'A_i}, \tag{4}$$

niin $G' = G$. Myös tämän yksityiskohtaisemman käsittelyn jätämme harjoitustehtäväksi ja toteamme, että yhtälö (3) määrittelee pisteen G yksikäsitteisesti.

Pohdittavaa

Seuraavassa muutamia asiaa valaisevia ajattelu- ja laskutehtäviä.

1. Hahmottele muutamia kolmiulotteisia kappaleita, joilla on vähintään kaksi symmetria-akselia.
2. Miksi tasa-aineisesta levystä leikatun tasokolmion painopiste on kolmion mediaanien leikkauspiste? Ohje: Ajattele kolmio viipaloiduksi jonkin sivun suuntaisin leikkauksin. Missä sijaitsevat viipaleiden painopisteet? Minkä janan painopisteet muodostavat?
3. Määritä tasa-aineisesta materiaalista tehdyn mielivaltaisen nelitahokkaan painopiste. Ohje: Voit hyödyntää edellisen tehtävän tulosta viipaloimalla tahokkaan sopivasti.
4. Suorita yksityiskohtaisesti yhtälöiden (1) ja (2) johtaminen tekstissä annetuista momenttiehdoista lähtien.
5. Tasa-aineisesta materiaalista valmistetun pyörähdysparaboloidin pohjan säde on r ja korkeus on h. Määritä kappaleen tilavuus ja painopiste.



6. Määritä tasa-aineisesta materiaalista valmistetun korkeusjananansa suhteen symmetrisen kartion painopiste. Mikä korkeusjanaa vastaan kohtisuora leikkaus puolittaa kartion massan?
7. Määritä tasa-aineisesta levystä tehdyn puoliympyrän painopiste.
8. Oletetaan, että x-akselin välillä $[0,\infty[$ on lanka, jonka massan tiheyden (massan pituusyksikköä kohti) pisteissä $x \in [0,\infty[$ ilmoittaa tiheysfunktio $f(x) = e^{-x}$. Laske langan massa sekä painopiste.
9. Osoita, että jos G on yhtälön (3) määräämä piste, niin
$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i} \times m_i\bar{g} = \bar{0}.$$
Osoita edelleen, että jos yhtälöt (3) ja (4) ovat voimassa, niin $G' = G$.

Kertomuksen kuvat on piirretty MetaPost-ohjelmalla, jonka alkeisiin perehdyttämisestä kiitokset Martti Nikuselle.