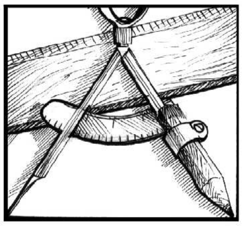


Johtosuora ja polttopiste: toisen asteen käyrät

Petteri Harjulehto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Johdanto

Toisen asteen käyriksi sanotaan kaikkia niitä tason käyriä, jotka ovat muotoa

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0.$$

Tässä a, b, c, d, e ja f ovat reaalilukuja. Tässä kirjoituksessa paneudumme paraabeliin, ellipsiin ja hyperbeliin. Ylöspäin aukeavan paraabelin, jonka huippu on origossa, yhtälö on

$$y = ax^2, \text{ missä } a > 0.$$

Origokeskisen ellipsin yhtälö on

$$ax^2 + by^2 = 1, \text{ missä } a, b > 0,$$

ja origokeskisen hyperbelin yhtälö on

$$ax^2 - by^2 = \pm 1, \text{ missä } a, b > 0.$$

Osoitamme, että paraabeli, ellipsi ja hyperbeli ovat hyvin samankaltaisia käyriä ja niille voidaan antaa yhteinen geometrinen määritelmä. Valitsemamme määritelmä perustuu annettuun suoraan,pisteeseen ja reaaliseen vakioon. Tämä ei ole ainut geometrinen määritelmä, vaan esimerkiksi ellipsi ja hyperbeli voidaan määritellä myös kahden polttopisteensä avulla.

Olkoot l annettu tason suora ja P annettu tason piste, joka ei ole suoralla l. Olkoon e positiivinen vakio. Tutkimme niiden pisteiden uraa, joiden etäisyys pisteestä P on vakio e kertaa etäisyys suorasta l. Uraan kuuluvat siis kaikki pisteet Q, jotka toteuttavat yhtälön

$$\operatorname{dist}(Q, P) = e \operatorname{dist}(Q, l). \tag{1}$$

Tässä dist tarkoittaa kahden pisteen tai pisteen ja suoran välistä (euklidista) etäisyyttä. Suoraa l sanotaan johtosuoraksi, pistettä P polttopisteeksi ja vakiota e eksentrisyydeksi. Jos $0 < e < 1$, sanomme, että ura on ellipsi, jos $e = 1$, niin paraabeli, ja jos $e > 1$, niin hyperbeli. Lisätietoja valitsemastamme määritelmästä löytyy kirjasta

D. A. Brannan, M. F. Esplen ja J. J. Gray: *Geometry*, Cambridge University Press, 1998.

Paraabeli

Tutkimme aluksi tapausta $e = 1$. Olkoon $a > 0$, l_a suora $y = -a$ ja P_a piste $(0, a)$. Etsimme pisteitä, jotka ovat yhtä kaukana johtosuorasta ja polttopisteestä.

Pisteen $Q = (x, y)$ etäisyyteen suorasta l_a ei vaikuta lainkaan x-koordinaatti, joten saamme etäisyydeksi $|y + a|$. Pisteiden Q ja P_a väliseksi etäisyydeksi saamme tutulla kaavalla $\sqrt{(x-0)^2 + (y-a)^2}$. Yhtälö (1) muuntuu siis muotoon

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-a)^2} = |y + a|.$$

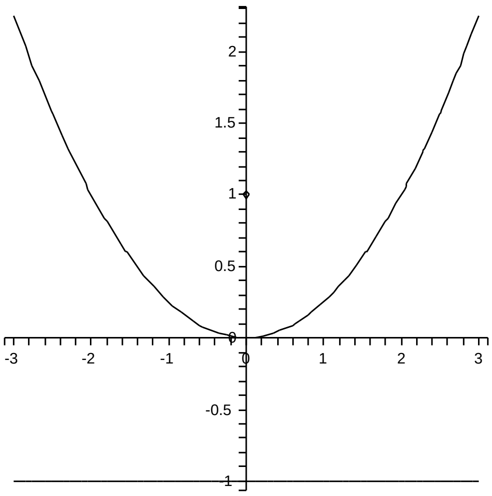
Korottamalla molemmat puolet toiseen potenssiin saamme

$$x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = y^2 + 2ay + a^2,$$

ja edelleen

$$x^2 = 4ay \text{ eli } y = \frac{x^2}{4a}.$$

Kyseessä on siis tuttu ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huippu on origossa. Kuvaan 1 on piirretty tapaus $a = 1$ sekä johtosuora ja polttopiste.



Kuva 1. Paraabeli.

Vastaavasti saamme alaspäin aukeavan paraabelin valitsemalla $y = a$ ja $(0, -a)$. Valinnoilla $x = -a$ ja $(a, 0)$ sekä $x = a$ ja $(-a, 0)$ saamme muotoa $x = \frac{y^2}{4a}$ ja $x = -\frac{y^2}{4a}$ olevat paraabelit.

Paraabelin muotoon vaikuttaa vain johtosuoran ja polttopisteen välinen etäisyys. Näin esimerkiksi Kuvan 1 paraabeli on yhtenevä kaikkien niiden paraabeli kanssa joiden johtosuora on $y = -1$ ja polttopiste on muotoa $(r, 1)$, missä r on reaaliluku. Näiden kaikkien paraabelien huiput sijaitsevat x-akselilla.

Valitsemalla suoran, joka ei ole kummankaan koordinaattiakselin kanssa yhdensuuntainen, saamme "vinossa" olevan paraabelin. Olkoon esimerkiksi $y = x + 1$ johtosuora ja $(-2, 2)$ polttopiste. Tällöin pisteen $Q = (x, y)$ etäisyys johtosuorasta on

$$\frac{|1 \cdot x + (-1) \cdot y + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$$

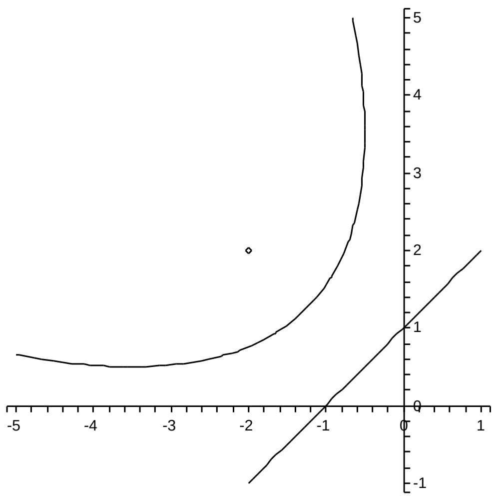
ja pisteen Q etäisyys polttopisteestä on $\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}$. Yhtälö (1) muuntuu siis muotoon

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = \frac{|x - y + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}.$$

Korottamalla molemmat puolet toiseen potenssiin ja muokkaamalla saatua tulostaa saamme

$$x^2 + y^2 + 2xy + 6x - 6y + 15 = 0.$$

Tämän paraabelin kuvaaja, yhdessä johtosuoran ja polttopisteen kanssa, on esitetty Kuvassa 2.



Kuva 2. Paraabeli.

Ellipsi

Tutkimme sitten tapausta $0 < e < 1$. Olkoon $a > 0$. Valitsemme johtosuoraksi $x = a/e^2$ ja polttopisteeksi $(a, 0)$. Tällöin yhtälö (1) muuntuu muotoon

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = e\left|x - \frac{a}{e^2}\right|.$$

Korottamalla molemmat puolet toiseen potenssiin ja muokkaamalla saatua lauseketta saamme

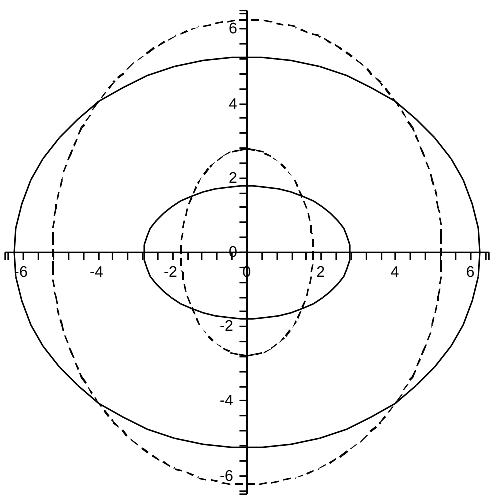
$$\frac{e^2}{a^2}x^2 + \frac{e^2}{a^2(1-e^2)}y^2 = 1. \tag{2}$$

Kyseessä on origokeskeinen ellipsi. Valitsemalla johtosuoraksi $x = -a/e^2$ ja polttopisteeksi $(-a, 0)$ saamme saman ellipsin.

Valitsemme sitten johtosuoraksi $y = a/e^2$ ja polttopisteeksi $(0, a)$. Tällöin saamme

$$\frac{e^2}{a^2}y^2 + \frac{e^2}{a^2(1-e^2)}x^2 = 1. \tag{3}$$

Kuvassa 3 on esitetty ellipsien (2) kuvaajat tavallisella viivalla ja ellipsien (3) kuvaajat katkoviivalla arvoilla $e = \frac{3}{5}$ ja $e = \frac{2}{5}$ sekä $a = 1$. Saman eksentrisyyden omaavat ellipsit ovat samanmuotoisia, mutta ne ovat toisiinsa nähden 90 asteen kulmassa.

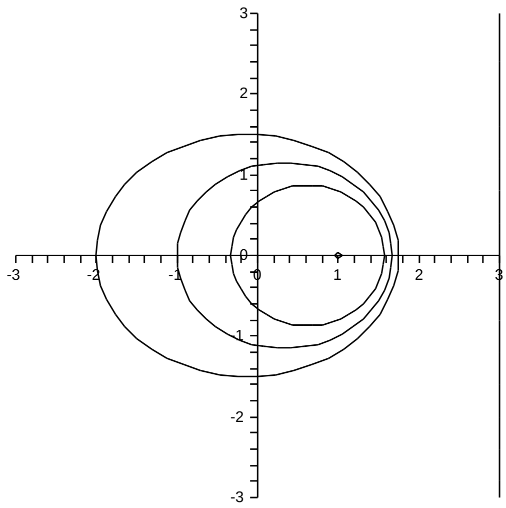


KUVA 3. Origokeskeisiä ellipsejä.

Miten eksentrisyys vaikuttaa ellipsin muotoon? Kiinnitämme johtosuoran ja polttopisteen, esimerkiksi $x = 3$ ja $(1, 0)$. Tällöin saamme ellipsit

$$(1-e^2)x^2 + y^2 + (6e^2-2)x + 1 - 9e^2 = 0.$$

Kuvassa 4 on esitetty johtosuora, polttopiste sekä ellipsit eksentrisyyden arvoilla $\frac{2}{5}$ (sisimmäinen), $\frac{1}{2}$ (keskimmäinen) ja $\frac{3}{5}$ (ulommainen).



KUVA 4. Ellipsejä eksentrisyyden eri arvoilla.

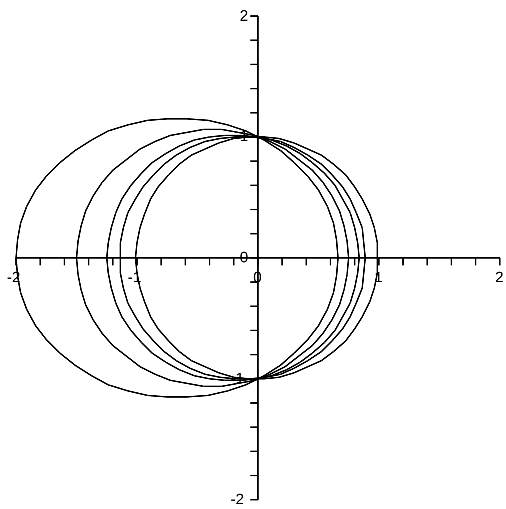
Käyttämämme määritelmä ei suoraan anna mahdollisuutta määritellä ympyrää. Ympyrä voidaan kuitenkin tulkita ellipsinä, jonka johtosuora on äärettömyydessä. Kiinnitämme polttopisteeksi origon ja johtosuoraksi $x = \frac{a}{e}$, $a > 0$. Tällöin saamme ellipsit

$$(1-e^2)x^2 + y^2 + 2eax = a^2.$$

Kun $e \to 0$, niin johtosuora etäisyys origosta kasvaa rajatta, ja saamme

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

joka on origokeskinen a säteinen ympyrä. Kuvassa 5 on esitetty ellipsit eksentrisyyden arvoilla $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$ ja $\frac{1}{100}$, kun $a = 1$.



KUVA 5. Ellipsejä, kun johtosuora lähestyy ääretöntä.

Hyperbeli

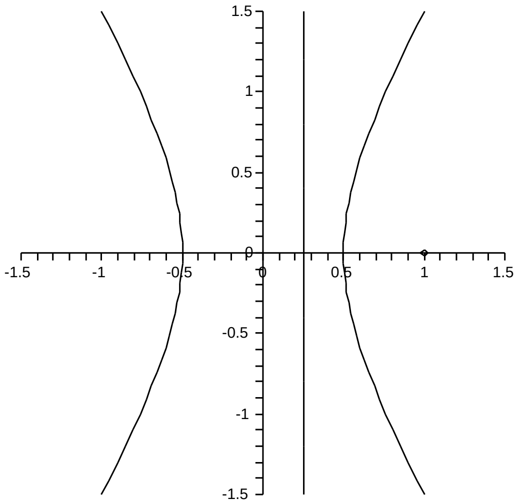
Viimeiseksi tutkimme tapausta $e > 1$ eli hyperbeliä. Valitsemme saman johtosuoran ja polttopisteen kuin orikokeskisen ellipsin tapauksessa eli $x = a/e^2$ ja $(a, 0)$, $a > 0$. Tällöin yhtälö (1) muuntuu muotoon

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = e\left|x - \frac{a}{e^2}\right|.$$

Saamme tämän muokattua muotoon

$$\frac{e^2}{a^2}x^2 - \frac{e^2}{a^2(e^2-1)}y^2 = 1.$$

Kyseessä on origokeskinen hyperbeli. Valitsemalla johtosuoraksi $x = -a/e^2$ ja polttopisteeksi $(-a, 0)$ saamme saman hyperbelin. Kuvassa 6 on ensiksi mainittu hyperbeli, johtosuora ja polttopiste, kun $e = 2$ ja $a = 1$.



Kuva 6. Hyperbeli.

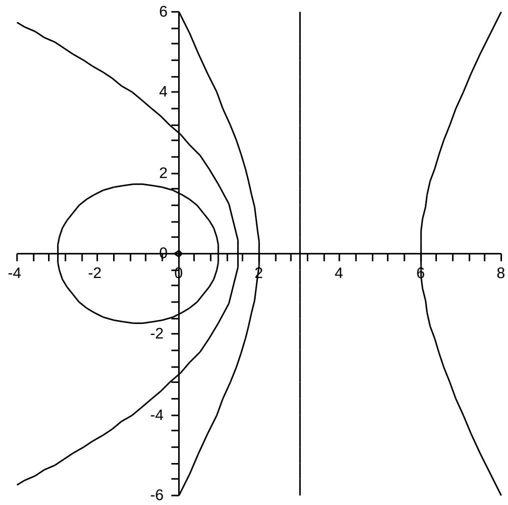
Piirrämme lopuksi samaan kuvaan paraabelin, ellipsin ja hyperbelin. Tätä varten kiinnitämme johtosuoraksi $x = 3$ ja polttopisteeksi origon. Tällöin yhtälö (1) muuntuu muotoon

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e\,|x - 3|\,,$$

mistä saamme

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 + 6e^2x - 9e^2 = 0.$$

Kuvasta 7 on esitetty kuvaajat eksentrisyyden arvoilla $\frac{1}{2}, 1, 2$, sekä johtosuora ja polttopiste.



Kuva 7. Paraabeli, ellipsi ja hyperbeli.