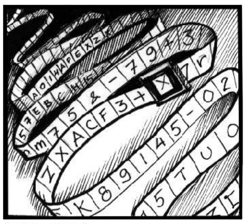

Moniarvoiset kompleksifunktiot ja laskentaohjelmat

Simo K. Kivelä
Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Matti Lehtisen artikkeli *Kaikki tarpeellinen kompleksiluvuista* sisälsi tiiviin yhteenvedon kompleksiluvuista, mutta kaikkea laskentaohjelman käyttäjälle tarpeellista ei ehkä kuitenkaan tullut sanotuksi.

Jos nimittäin yrittää laskea luvun -1 kuutiojuurta melkeinpä millä tahansa modernilla laskentaohjelmalla tai kompleksiluvut tuntevalla laskimella, tulokseksi tulee

$$\sqrt[3]{-1} = \tfrac{1}{2} + i\,\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Eikö tämä siis olekaan -1?

Olkoon $z_1 = -1 + i$ ja $z_2 = -1 + 2i$, jolloin $z_1 z_2 = -1 + 3i$. Tällöin laskentaohjelma antaa

$$\log(z_1) + \log(z_2) - \log(z_1 z_2) = 2\pi i,$$

missä log tarkoittaa luonnollista logaritmia, kuten kompleksifunktioiden yhteydessä on tapana merkitä. Eikö tavallinen logaritmien laskusääntö siis pädekään kompleksialueella?

Ilman laskentaohjelmaakin voidaan ajautua kummallisiin laskuihin:

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Koska 1 ja -1 tunnetusti ovat eri asioita, jonkin yhtäläisyysmerkin täytyy olla väärä, ehkä useammankin. Mutta mikä niistä on väärä?

Selityksenä on, että kompleksifunktiot ovat hieman mutkikkaampia olioita kuin vastaavat funktiot reaalialueella. Voidaan ajatella, että neliöjuurella on kaksi arvoa: esimerkiksi $\sqrt{4} = \pm 2$; $\sqrt{-3+4i} = 1 + 2i$ tai $= -1 - 2i$. Kuutiojuurella on vastaavasti kolme arvoa, kuten Matti Lehtisen artikkelista ilmenee. Logaritmilla arvoja on äärettömän paljon: $\log z = \log|z| + i \arg z + 2n\pi i$, missä n on mikä tahansa kokonaisluku.

Tällaiset kompleksifunktiot eivät oikeastaan ole funktioita lainkaan nykyään käytetyn määritelmän mielessä. Funktiolta $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nimittäin vaaditaan, että se liittää jokaiseen lähtöjoukon pisteeseen *yksikäsitteisen* maalijoukon pisteen. (Lähtöjoukko voi toki olla koko kompleksitasoa suppeampikin joukko, kuten logaritmin tapauksessa onkin: origo ei kuulu joukkoon.)

Aiemmin kompleksifunktiot on yleensä mielletty moniarvoisina funktioina ja silloin mikään edellä mainituista esimerkeistä ei ole ongelmallinen: On vain ajateltava, että kun monista mahdollisista arvoista valitaan yksi oikealla tavalla, niin kaavat toteutuvat.

Nykyään kuitenkin yleensä pitäydytään funktion määritelmän yksikäsitteisyysvaatimukseen ja laskentaohjelmien tapauksessa tämä on välttämätöntäkin.

Tällöin joudutaan uuden ongelman eteen: Miten useista mahdollisista arvoista kiinnitetään se, joka määritellään funktion arvoksi? Ongelma koskee neliöjuurta jo reaalialueellakin, ja tällöin arvoksi tunnetusti kiinnitetään kahdesta vaihtoehdosta positiivinen: $\sqrt{4} = +2$ tai yleisemmin $\sqrt{x^2} = |x|$.

Kompleksialueella yhtä yksinkertaista ratkaisua ei ole. Lähtökohtana on kompleksiluvun *napakulman* eli *argumentin* arvojen kiinnittäminen. Tämäkin on nimittäin moniarvoinen funktio: Jos luvun z argumentti on $\arg z = \varphi$, jokainen luku $\varphi + 2n\pi$, missä n on kokonaisluku, kelpaa argumentiksi aivan yhtä hyvin. Argumentti kiinnitetään yleensä välille $-\pi < \arg z \leq \pi$. (Tämä johtaa laskennallisesti yksinkertaisempiin lausekkeisiin kuin jossakin mielessä luontevampi ja varsinkin aikaisemmin lähes yksinomaan käytetty valinta $0 \leq \arg z < 2\pi$.)

Argumentin kiinnittäminen ratkaisee arvojen valinnan sekä juurten että logaritmin tapauksessa. Juuren $\sqrt[n]{z}$ arvoksi valitaan se, jonka argumentti on $\arg z/n$. Logaritmin tapauksessa monikäsitteisyys johtuu argumentin monikäsitteisyydestä, jolloin argumentin kiinnittäminen antaa määritelmän suoraan: $\log z = \log |z| + i \arg z$. Tällä tavoin yksikäsitteisesti määriteltyjä funktioita kutsutaan usein moniarvoisen funktion *päähaaraksi*. Jos arvon kiinnittäminen on tehty jollakin muulla tavalla, puhutaan *sivuhaarasta*.

Esimerkiksi luvun $\sqrt[3]{-1}$ arvo määräytyy siitä, että luvun -1 napakulma eli argumentti kompleksitasossa on π, ja kuutiojuuri on siis kolmesta vaihtoehdosta se kompleksiluku, jonka napakulma on $\pi/3$.

Kaikkea ei kuitenkaan voi saada. Kiinnittämällä monista mahdollisista arvoista yksi menetetään monet tottutut laskusäännöt. Esimerkiksi $\sqrt{z_1 z_2} = \sqrt{z_1}\sqrt{z_2}$ ei yleisesti päde, sama koskee tulon logaritmin laskusääntöä. Säännöt ovat kuitenkin 'melkein' voimassa: Syntyvät erot voidaan luonnehtia siten, että on tapahtunut siirtyminen saman funktion jollekin sivuhaaralle.

Monihaaraisten funktioiden ongelma ei rajoitu juuritai logaritmifunktioihin. Esimerkiksi trigonometristen funktioiden käänteisfunktiot, ns. arcus-funktiot ovat moniarvoisia jo reaalialueella. Näidenkin arvot kiinnitetään nykyään yksikäsitteisellä tavalla. Esimerkiksi $\tan(\pi/4 + n\pi) = 1$ kaikilla kokonaisluvuilla n, mutta käänteisfunktiolle arctan asetetaan $\arctan(1) = \pi/4$.

Harjoitustehtävä

Lukija saakoon lopuksi harjoitustehtävän: Kompleksitason yksikköympyrän parametriesitys on $z = \cos(t) + i\sin(t)$, $-\pi < t \leq \pi$, ts. kaikki yksikkömpyrän pisteet saadaan antamalla parametrille t kaikki arvot kyseiseltä väliltä. Yksikköympyrä kuvataan kompleksitasoon (tason kopioon, voidaan ajatella) kuvauksella

$$w = \left(z^p + \frac{1}{2z^p}\right)^{1/p},$$

missä p on luonnollinen luku. Millainen käyrä tällöin syntyy, kun vaaditaan, että p:nnen juuren arvot on valittava funktion sopivilta haaroilta siten, että käyrästä tulee jatkuva?

Helpointa on ehkä kirjoittaa ohjelmakoodi, joka piirtää tällaisia käyriä. Malliksi käyrä arvolla $p = 3$. Piparkakkukäyristä on yleisestikin kyse.