



# Ajatuksia matematiikasta, sen soveltamisesta ja opettamisesta

*Lassi Päivärinta*, professori, ja *Marjatta Näätänen*, dosentti  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Helsingin yliopisto

Aina silloin tällöin tulee esiin kysymys siitä, missä ja kenen toimesta matematiikan opettajien koulutus ammattiinsa tulisi järjestää. Yhtenäiseen peruskouluun siirtyminen on taas tuonut esiin vanhan ongelman siitä, onko opettajan parempi olla yleiskasvattaja vai opettamansa aineen asiantuntija.

Muutama vuosi sitten järjestettiin LUMA-projektiin kuuluva kolmen maan yliopisto-opetuksen arviointi. Hankkeeseen osallistuivat Suomi, Ruotsi ja Unkari, tarkoituksena oli arvioida opettajankoulutusta.

Unkari on perinteisesti tunnettu erinomaisena matematiikkamaana. Matematiikan opettajilla – ja heidän kouluttajillaan – on ollut vahva matematiikan pohja. Matematiikan didaktiikka on ollut oma arvostettu tieteenhaaransa, jolla on matematiikan erikoisesta luonteesta johtuvat erityispiirteensä. Kansainväliset vertailut ovat viime aikoina kuitenkin osoittaneet matematiikan osaamistason selvää laskua Unkarissa. Vielä vuonna 1991 IAEP-vertailussa Unkari ja Sveitsi olivat Euroopan parhaat maat, jotka eivät jääneet paljoa jälkeen Etelä-Koreasta ja Taiwanista. Viime vuosina on matematiikan oppitunteja Unkarissa vähennetty huomattavasti eikä matematiikan opettajiksi enää ole yhtä paljon hakukkaita opiskelijoita. Pisa-tutkimuksessa kerätyn taus-

tainformaation mukaan Unkari on maa, jossa yhteiskunnallisista, taloudellisista ja kulttuuritekijöistä johtuva hajonta eri koulujen välillä on suurimpia. Hajonta on kasvanut viime vuosina. Samanlainen koulutusjärjestelmän tason repeäminen on näkyvissä myös muissa ns. Itä-Euroopan maissa. Syynä ovat ensi sijassa resurssien leikkaukset.

Unkarilaisten perinteiselle matematiikan käyttö- ja soveltamistaidolla on arvostusta. Esimerkiksi Nokia, Ericsson ja General Electric ovat perustaneet tutkimuskeskuksia Unkariin. Suomessakin on satoja unkarilaisia Nokialla töissä. Unkarin koulutusjärjestelmä on myös onnistunut, jos yhtenä pyrkimyksenä on, että ainakin joku sen kasvateista saa korkeita tunnustuksia; Nobelin palkintoja on kahdeksan matemaattista pohjaa vaativissa luonnon- ja taloustieteissä.

Unkarin nykysuuntaus tarjoaa varottavan esimerkin Suomelle siitä, miten helppoa ja nopeaa on päästä eroon korkeasta tasosta.

Suomessa matematiikan aineenopettajankoulutuksesta vastaavat yliopistojen ainelaitokset, käytännössä matematiikan laitokset, kun taas Ruotsissa opettajankoulutuslaitokset. *Lassi Päivärinta* kirjoitti opetusministeri-

**Pääkirjoitus**

ölle toimittamassaan Lundin yliopistoa koskevassa arvioinnissa, että hän pitää Ruotsin käytäntöä ongelmallisena. Ruotsin mallissa opettajaksi opiskelevan yhteys matematiikan nykypäivän tilaan ja erityisesti sen uusiin merkittäviin sovelluksiin katkeaa kokonaan.

## Matematiikan sovellusten merkitys

Matematiikan sovellusten kirjo on viimeisten parin vuosikymmenen aikana räjähdysmäisesti laajentunut. Vain uusimman tutkimuksen mukana pysyvät ainelaitokset voivat antaa opettajiksi valmistuville edes vihjauksen siitä, mihin kaikkiin ongelmiin matematiikkaa voidaan tänä päivänä soveltaa. Opettajat, joilla on tätä informaatiota, voivat välittää uutta tietoa oppilailleen ja samalla merkittävästi lisätä oppilaan motivaatiota opetella teoreettisia käsitteitä ja työkaluja. On selvää, että uusin kehitys erityisesti sovelletussa matematiikassa luo myös aivan uusia haasteita yliopistopetuksessa, pari esimerkkiä tästä Lassi Päivärinnan tutkimusalueelta:

## Mikrokosmos ja makrokosmos

Ihmisen ikiaikaisiin toiveisiin on kuulunut nähdä kauas ja syvälle – nähdä esineiden ja asioiden sisälle. Mikroskoopin ja kaukoputken keksiminen avasi ihmiselle kaksi uutta maailmaa – mikrokosmosen ja makrokosmosen. Tietokonetomografia, magneettikuvaus ovat mullistaneet lääketieteellisen diagnostiikan. Toisin kuin mikroskooppi ja kaukoputki nämä uudet laitteet eivät perustu enää suoraan havaintoon vaan mittauksiin ja matemaattisiin teorioihin; niissä kaikissa on kysymys ns. käänteisistä eli inversio-ongelmista.

## Inversio-ongelmat

Ongelmaa nimitetään suoraksi, jos siinä edetään luonnonlakien mukaisesti syistä seurauksiin ja tehdään ennusteita, kun lähtökohta tunnetaan. Inversio-ongelmissa edetään toiseen suuntaan: inversio-ongelmassa tehdään mittauksia, joiden avulla pyritään selvittämään, ”näkemään”, tuntemattomat kohteet. Tämä vaatii aivan uudenlaisen matematiikan kehittämistä.

Ensimmäinen esimerkki on edellä mainittu tietokonetomografia. Siinä kohdetta valaistaan useista suunnasta tulevilla röntgensäteillä ja mitataan kohteen läpi tulleiden säteiden voimakkuudet. Tästä tiedosta tulee määrätä kohteen rakenne. Ongelma johtaa matemaattiseen kysymykseen, jonka itävaltalainen *Johann Radon* (1887–1956) ratkaisi jo vuonna 1917. Tämä on

yksi monista esimerkeistä siitä, miten hyödyttömältä näyttävä puhtaan matematiikan tutkimustyö johtaa myöhemmin välittömään käytännön hyötyyn.

## Impedanssitomografia

Keuhkoveritulppa on esimerkiksi leikkausten yhteydessä esiintyvä yleinen ja usein vaarallinen jälkiseuraus. Valitettavasti nykyinen diagnostinen menetelmä on monimutkainen ja perustuu siihen, että potilas ensin hengittää radioaktiivista kaasua. Sen jälkeen vereen ruiskutetaan vielä radioaktiivista nestettä. Tällä menetelmällä saadaan kuva niistä osista keuhkoja, joissa veri kiertää ja toisaalta hengitysilma kiertää. Alueet, joissa ilma kulkee, muttei veri, viittaavat veritulppaan.

Toinen tapa määrittää kaasun ja veren virtaus keuhkoissa on pyrkiä ulkoisin mittauksin määräämään (ajasta riippuva) keuhkojen sähköinen johtavuusjakuma. Ilma, veri ja lihaskudos eroavat merkittävästi sähkönjohtavuudeltaan. Veressä on mm. hemoglobiinia, jossa on rautaa ja se on siten hyvin sähköä johtavaa. Menetelmän tällaisen tilanteen tutkimiseen tarjoo sähköinen impedanssitomografia.

## Matematiikan opetuksesta

Länsimaissa on matematiikan opetuksessa tällä hetkellä voimakkaana suuntauksena ongelmanratkaisu. Tämän suuntauksen soveltamisessa on mielestämme suurena vaarana, etteivät ongelmat liity toisiinsa eikä näin siis konstruoida matematiikan rakennetta. Vaarana voi olla, että hypitään aiheesta toiseen. Yksittäinen ongelma voi olla sinänsä mielenkiintoinen ja sopia hyvin vaikka kilpailutehtäväksi. Tällöin oppilaalla on kyliksi aikaa miettiä ongelmaa.

Keskeisen näkökohdan matematiikan opetuksessa muodostavat matematiikan sisäiset ja muihin oppiaineisiin liittyvät yhteydet. Näiden, sekä matematiikan sovellusten tunteminen on opettajalle erittäin tärkeää, jotta hän voi perustella matematiikan merkitystä ja herättää oppilaiden mielenkiintoa ainetta kohtaan.

Miten voimme taata, että Suomi pysyy mukana kehityksessä ja kenties jollain alalla jopa tieteen eturintamassa? Koulutuksen tason säilyttäminen on välttämätön edellytys, opettajankoulutus ja koulujen toimintaedellytysten turvaaminen ovat avainasemassa. Emme näe matematiikan opettajan koulutuspaikaksi muuta vaihtoehtoa kuin matematiikan kehityksen ja tutkimuksen tasalla pysyttelemään pyrkivät ainelaitokset.

Pääkirjoitus