



Matematiikan opetusta käsitteleviä puheenvuoroja Pariisissa

Koonnut *Marjatta Näätänen*

Matematiikan kouluopetuksen muuttumisesta

Keskustelussa *Jean-Michel Bismut*, eräs akateemikojen manifestin (ks. Solmun erikoisnumero 1/2005–2006) kirjoittajista, kertoi omasta kouluajastaan n. 50 vuotta sitten. Hän sai opettajiltaan pyrkimyksen tarkkuuteen ja älyllisen vapauden aatteen. Tarkkuutta opetettiin erityisesti alkeisgeometrian todistuksilla, tekemällä täydellisiä loogisia päättelyitä yksikertaisessa tilanteessa. Eukleideen aksioomat todella esitettiin aksioomina. Ongelman ratkaisu tarkoitti täsmällisen, selkeän, mahdollisimman elegantin todistuksen kirjoittamista. Bismut oppi, että ratkaisusta voi kunnioittavasti väitellä opettajan kanssa ja ehdottaa muita ratkaisuja säilyttäen uskon omaan päättelykykyynsä. Oppikirjat olivat yksinkertaisia, värittömiä, mutta sisällöltään asianmukaisia. Ympäröivään maailmaan tutustuttiin silloin myös tutkimalla yksinkertaisia laitteita, kuten radioita ja puhelimia.

Kielten ja kirjallisuuden opetus perustui monenlaisten, myös kovin vaikeiden tekstien lukemiselle. Hän muistaa valtavan ilonsa huomattuaan, että romaanista tai näytelmästä voi väitellä samalla älyllisellä tasolla, joskin eri termein kuin tieteen opiskelussa opittiin. Opiskeltiin myös englantia, latinaa, kreikkaa, historiaa, filosofiaa, fysiikkaa, biologiaa. Tarkoituksena oli kehittää

tasapainoinen ja rikas persoonallisuus. Bismut oppi todennäköisyyslaskentaa lukemalla Pascalin kirjoituksen, jossa uskoa Jumalaan perustellaan peliteorian alkeilla. Samoin Pascalin kirjoitus geometrian hengestä ja hienovaraisuuden tajusta antoi hänelle aiheen ajatella jonkinasteista geometrian osaamistaan ja täydellistä kykenemättömyyttään jälkimmäisen suhteen. Kenellekään ei tullut mieleen kysyä: Mitä hyötyä tästä kaikesta on? Koulun tarkoitus oli tehdä moraalisesti ja älyllisesti tasapainoisia yksilöitä. Bismut ei väitä, että hänen saamansa koulutus olisi ihanteellinen, mutta se tarjosi valtavia mahdollisuuksia kehittyä yksilönä.

Nykymaailma on erilainen. Nuoruus ei sinänsä ole kovin toisenlaista kuin ennen, mutta heijastelee luonnollisesti ympäröivän yhteiskunnan käsityksiä ja arvoja. Kysymys ”Miksi tämä on hyödyllistä?” on koko ajan läsnä ja kaiken tiedon on perusteltava hyödyllisyytensä, jopa yhteiskunnan kannalta. Markkina-arvo näyttää olevan kaiken lopullinen testi. Jossain jopa kerrotaan, että koulutuksen tarkoitus on opettaa valitsemaan kännykkä tai mielikanavasi TV:ssä. Eräs Euroopan valtio on keskittänyt koulutuksensa tavoitteet: Internet, tietotekniikka, bisnes, joskus lisäten Wordin käytön ja arkienglannin hallinnan.

Tekniikan muutos tarjoaa jokaiselle merkittäviä mahdollisuuksia, mutta ikäänkuin mustan laatikon muodossa.

Voidaanko matematiikkaa yhä opettaa? Ranska pystyy yhä tuottamaan ensiluokkaisia nuoria matemaatikkoja pitkällisen traditionsa ja opettajien ponnistelijien avulla. Kuitenkin hyötynäkökohtien vallitsema yleinen ilmapiiri tekee tehokkaan opetuksen mahdottomaksi. Todistuksen idea hämärtyy ja sekaantuu ”ominaisuuteen”. Jos matematiikan merkitys on vain sen hyödyllisyys tavallisen kansalaisen kannalta, niin se merkitsee matematiikan loppua tieteenä. Matematiikan opetuksen tarkoituksiin kuuluu myös tarjota yksilölle älyllisiä virikkeitä ja avata pääsy älylliseen vapauteen.

Bismutin mielestä pitäisi ajatella esimerkiksi seuraavia kysymyksiä: Miten voi tuoda tietokoneet matematiikan opetukseen, ottaen huomioon laskinten massiivisen käytön aiheuttaman tuhon? Tämä koskee myös yliopistoja. Mistä löytää hyviä matematiikan koulukirjoja tai hyviä verkko-osoitteita? Miten tehdä pieniä kokeita, joissa voisi kokeilla opetusmenetelmien muutosten vaikutuksia tai vertailla menetelmiä? Miten sellittää suurelle yleisölle ja muille tutkijoille, millainen rooli matematiikalla on heidän kaikissa työväliseissään ja ympäristössään?

Kansainvälinen matemaattinen unioni kirjoitti matematiikan opetuksen komissiolle ”Aikaisemmin oltiin huolestuneita siitä, että tarpeeton formalismi peitti yksinkertaisimmatkin käsitteet. Nykyisin on huolena, että todistuksen käsite on kadonnut joistain matematiikan kursseista ja että peruskurssien sisältöjä on karstittu huomattavasti. Asiaa mutkistaa myös se, että monien maiden opetusviranomaiset ovat alkaneet kysellä, eikö matemaattisten ohjelmistojen hallinta voisi korvata monia nykyisin vaadittuja matematiikan tietoja ja taitoja.”

Uskon, että matematiikan opetuksessa on kyse paljon enemmän kuin oman alamme puolustuksesta. Tärkeä osa sisäistä vapauttamme on kyseessä, tämän koskiessa aivan samalla tavalla myös luonnontieteiden ja humanististen tieteiden opetusta.

Matematiikan opetus 20. vuosisadalla

Professori *George Malaty* käsitteli matematiikan opetusta 20:nneellä vuosisadalla. Teknologian kehitys on saanut monet uskomaan, että matematiikan opetus-kulttuuri on jäänyt jälkeen teknologian kehittyessä ja että nämä tulisi kytkeä yhteen. Professori Malaty on eri mieltä. Matemaattisesti maailma ympärillämme ei ole muuttunut, eikä tule muuttumaan. Matematiikan opetus liittyy aina erilaisiin joukkoihin, muotoihin, lukuihin. Matematiikan kehitys perustuu deduktiivisen päättelyn voiman keksimiseen ainakin 2600 vuotta sitten. Matematiikan opetuksessa euklidinen geometria on ollut tärkein työkalumme aina 1950-luvulle asti.

Oppisisältöuudistukset poistivat euklidisen geometrian kouluista, painopistealueeksi tuli ongelmanratkaisu,

erityisesti jokapäiväiseen elämään liittyvä. Euklidisen geometrian pitäminen vanhanaikaisena näyttää syyllä tähän, mutta todellinen syy sen katoamiseen on opetustradition katkeaminen, ja sen seuraamus: sen opetuksen taitojen häviäminen.

Euklidista geometriaa tarvitaan muiden geometrioiden, kuten analyyttisen geometrian oppimiseen. Myös trigonometrian ja analyysin sekä jopa aritmetiikan oppimiseen se on tarpeellinen. Euklidinen geometria on erikoisasemassa ajattelutaidon kehittämisessä ja monet matemaatikot muistelevat lämmöllä sen opiskelua 11–12-vuotiaasta alkaen. Einstein vihasi koulua, mutta euklidinen geometria teki hänestä tuntemamme Einsteinin. Psykologian tutkimus vahvistaa, että vain 30 % aikuisista on saavuttanut formaalin ajattelun tason. Piaget’n mukaan lopullinen vaihe ajattelun kehittymisessä tapahtuu noin 12–14- tai 15-vuotiaana. Saamansa kritiikin takia hän kohotti ylärajaa 20 vuoteen joidenkin ihmisten hitaamman kehityksen takia. Älykkyysosamäärätestit on jo kauan ajoitettu 16-vuotiaisiin. Matematiikan historia osoittaa, että monet suuret matemaatikot aloittivat luovan työnsä 16-vuotiaana ja euklidinen geometria on ihanteellinen ympäristö jokaisen ihmisen formaalin ajattelun kehittämiseksi, mm. tälle geometrialle on myös yksinkertainen visuaalinen malli.

Nykyisin yritetään Suomessa korostaa ongelmanratkaisun ohella myös matematiikan struktuurin systemaattista opiskelua erityisesti yrittäen opettaa todistamista euklidisen geometrian avulla. Lapsia johdatellaan keksimään todistus tai jopa oma todistuksensa. Elegantin todistuksen tarjoaminen ei riitä kehittämään oppilaiden ajattelua, vaan tarvittava prosessi on tärkeä. Eriyttäminen on tällaisessa opetuksessa tärkeä haaste. Kaikkien, erityisesti 13–18-vuotiaiden, tulisi pystyä antamaan ainakin jokin todistus, joka ratkaisee jonkin hänen tasolleen sopivan ongelman.

Tietokoneiden käytöstä matematiikan opetuksessa on professori Malatyn mielestä muistettava, että ne ovat eräs väline, mutta on monta muutakin välinettä, kuten taulu, kalvot – valinta on tehtävä opetusryhmän mukaan. Jossain tilanteessa apuvälineet ja työskentely käsiä käyttäen voisi olla paras valinta. Tietokoneet eivät pysty syrjäyttämään paperin ja kynän käyttöä ongelmanratkaisussa. Koulut ja opettajat eivät tule katoamaan, sillä koulutus on ihmisten välistä toimintaa.

Tietokoneiden käyttö matematiikan opetuksessa on siihen kohdistuvasta mielenkiinnosta huolimatta vielä vähäistä. Tähän on monia, myös käytännön syitä. Lasten deduktiivisen ajattelun kehittämisessä tietokoneet eivät ole olleet menestys. Esimerkiksi Cabri-Geometrian luultiin motivoivan oppilaat todistusten etsimiseen, mutta kävi päinvastoin. Cabri-Geometria on vahva väline erilaisten tapausten tutkimiseen, mutta yleinen seuraus tästä oli, että oppilaiden motivaatio todistusten etsimiseen hävisi, koska tarkastelta-

vat suhteet näyttivät selviltä. Cabri-Geometrian kaltaiset ohjelmistot tarjoavat voimakkaan välineen induktiolle, pienessä ajassa oppilas voi tutkia kovin monia tapauksia – mitä ei voida tehdä kynää ja paperia käyttämällä. Tärkeitä kysymyksiä ovat: Miten tietokoneita voidaan tulevaisuudessa käyttää parantamaan matematiikan ymmärtämistä? Miten niillä voidaan auttaa keksimistä?

Pahin ongelma Suomen matematiikan opetuksessa on tuntimäärien vähyys, UNESCO:n tutkimus 1986 paljasti, että viikkotuntien määrä oli pienin koko Euroopassa; vain 2,6, eikä tilanne ole siitä paljoa parantunut. On valittava, mitä tässä vähässä ajassa pystytään tekemään. Professori Malatyn mielestä deduktiivisen ajattelun kehittäminen on tärkein päämäärä.

Matematiikka tarjoaa mielihyvää

Jean-Pierre Kahane kertoi matematiikan tarjoamasta mielihyväästä. Hänen mielestään matematiikan ilo on perin moninaista ja henkilökohtaista. Aiheesta voi puhua sekä harrastelijana että ammattilaisena. Hän muisteli ensimmäistä matematiikkakokemustaan: isä kysyi häneltä lyhintä etäisyyttä kahden pisteen välillä (talosta toiselle) kulkien suoran (joen, joka ei erota taloja) kautta. Kahane ei keksinyt vastausta, vaan isä antoi sen. Hän ei muistanut enää ikäänsä, mutta muisti elävästi silloisen tunnereaktion. Matematiikka herätti siis hänessä voimakkaan tunteen, joka saattaa tiettyssä tilanteessa olla myös hyvin tuottoisa.

Kahane arvioi, että hänen intuitionsa, myös analyysin ja kombinatoriikan suhteen, on ennen kaikkea geometrista. Sokeat matemaattiot kertovat myös, että he katsovat ja yrittävät nähdä; heidän sisäiset kuvansa ovat geometrisia. Toisinaan Kahane antaa liikkeen kuljettaa mielikuvitustaan, seuraa prosessin vivahteita tai laskun rullaamista. Hän lisää mielellään liikkeen idean geometriseen intuiioon: Peanon käyrä ilman liikettä on vain tasonpintaa. Kun käyrä saa juosta pienissä erissä, saadaan ihastuttava kuva turbulenssista.

Kahane on ollut sekä tutkija että opettaja. Hänestä ammatti oli loistava sekä matematiikan tutkimiseen että sen opettamiseen. Matematiikka on kehittynyt valtavasti hänen aikanaan. Hän on nauttinut myös vanhojen kirjoitusten lukemisesta.

Matematiikan historian paikka on ihmiskunnan historiassa. Kahane on lukenut Platonia (alkukielellä), Eukleidesta, kiinalaisia kirjoituksia, Arkhimedesta, Gaussia, Laplace'n ja Fourier'n kirjoituksia. Näistä hän on saanut innoitusta sekä tutkimukseen että opetukseen. Matematiikan tekee kulttuurin osaksi mielikuvitus, tarkkuus, kauneus, sen historiallinen merkitys. Matematiikalla on ihmeellinen kestävyys, joka viittaa ihmiskunnan ulkopuoliseen matemaattiseen todellisuuteen: Eukleideen alkuluvut ovat edelleen alkulukujamme, Pythagoraan lause on aina yhtä ihmeellinen. Niihin suhtautuminen kuitenkin muuttuu, fysiikka ja kryptografia muuttivat alkulukujen jakautumisen esoteerisesta asiasta kaikkia kiinnostavaksi, yhdenmuotoisuus ja ortogonaaligeometria antaa keskeisen sijan Pythagoraan lauseelle ja siihen liittyvälle, kuten Brownin liikkeelle. Matematiikan arvoa ei vähennä, että se on ihmisen luomus. Voidaan ajatella katedraalin rakentamista tai harvinaisten kukkien kasvattamista sen puutarhan nurkassa. Kahane tuntee itsensä paremminkin puutarhuriksi kuin katedraalin rakentajaksi. Hän on osallistunut uusien avaruuksien teorioiden kehittämiseen, aluksi ne ovat tuntuneet oudoilta, sitten niihin on tutustuttu. Häntä johdattivat opettajien, työtovereiden tai sattuman esittämät avoimet kysymykset. Aina oli kehitettävä työkalut ja mielihyvä tuli, kuten kaikissa ammateissa, siitä, että työkalut toimivat hyvin. Tiedetään hyvin, ettei ole mielihyvää ilman tuskaa. Kärsimyksen aiheuttavat epäonnistuneet yritykset ja turha ponnistelu ennenkuin päästään tuloksiin, jotka lopulta tuottavat ilon. Vaikka muut saattoivat toisinaan ratkaista hänen esittämänsä ongelman, niin tämäkin ilahdutti Kahanea.

Nykyisin matemaatikot ponnistelevat tehdäkseen alansa tunnetuksi ja myös suuren yleisön arvostamaksi. Ennen tai myöhemmin median esteet murretaan. Kahaneen kokemus on, että vanhuudessa on matematiikasta paljon apua henkisten kykyjen säilyttämiselle. Matematiikan miettiminen, esimerkiksi kävellessä, ylläpitää fyysistäkin terveyttä. Kahaneen mielestä koulumatematiikka on opiskelua ja sääntöjen noudattamista. Se tehdään kuitenkin paremmin, jos matematiikka on hauskaa. Monet lapset nauttivat tavalla tai toisella matematiikasta; matemaattisista peleistä, kilpailuista, erilaisista aktiviteeteista. Matematiikkalaboratoriot olisivat ehkä keino yhdistää hauska ja luova toiminta luokahuoneessa tarpeelliseen määrätietoiseen ja hallittuun työskentelyyn. Jokaisen matemaatikon kokemus on, että matematiikka on sekä vaikeaa että hauskaa. Myös epäonnistuminen voi luoda yrittämisen halua ja onnistumista. Kahane ei tiedä, voiko tätä soveltaa kaikkiin lapsiin – ehkä se onkin testi kyvystä harjoittaa matemaatikon ammattia.

Kiinnostuksen lisääminen matematiikkaa kohtaan

Keskusteluun osallistui myös *Alexei Sossinsky* Moskovasta. Hän kertoi kahdesta tavasta lisätä koululaisten kiinnostusta matematiikkaan. Ensimmäinen on matematiikan tajoama älyllinen haaste, jota saadaan esimerkiksi kilpailujen muodossa. Matematiikkakilpailuja Venäjällä onkin paljon, sekä paikallisella tasolla että kansainvälisiä. Toinen tapa on tutustuttaa oppilaat matematiikan aiheuttamaan mielihyvään koulu-

tuntien ulkopuolisella toiminnalla, jonka järjestävät joko matemaatikot tai korkeatasoiset opettajat. Kilpailuja järjestetään myös matematiikan opettajille ja parhaat palkitaan.

Matematiikan osuus tietotekniikan opiskelussa

Tietotekniikan professori *Roberto Di Cosmo* aloitti selvittämällä, miten olennaista yhteiskuntamme infrastruktuurille on hyvien ohjelmoiden ja systeemi-insinöörien saaminen. Hän jatkoi huomauttamalla, ettei ole yhtä hyvin tiedossa, kuinka vaikeaa tämä on, vaikkakin aina silloin tällöin jokin vakava ohjelmointivirhe muistuttaa tästä suurta yleisöä. Tämän jälkeen hän kertoi, miksi matematiikka on keskeinen osa tällaisten henkilöiden koulutuksessa.

Di Cosmo oli myös ehdottomasti sitä mieltä, että tietokoneiden tuominen peruskouluun ja erikoistuneiden teknisten aineiden ottaminen opinto-ohjelmaan ilman perusteiden opettamista on väärä lähestymistapa.

Di Cosmo kertoi myös omista koneellisen äänestämisen kokemuksistaan. Tietokonealan asiantuntijana häntä vaivaavat kysymykset siitä, miten hyvä äänestystapa tämä on: Äänestäjä painaa nappia tai jotain ruudun kohtaa, eikä hänellä ole mitään mahdollisuutta tarkistaa, mitä sen jälkeen tapahtuu. Onko kenelläkään mitään tarkistusmahdollisuutta? Hän oli kysellyt äänestysjonossa Pariisissa muiden mielipiteitä ja oli järkyttynyt siitä, ettei kenelläkään ollut mitään ongelmaa pelkän napin painamisen hyväksymisessä.

Matematiikan opetus tilastotieteilijän näkökulmasta

Tilastotieteilijä *Jean-Pierre Raoult* käsitteli matematiikan opetusta tilastotieteilijän näkökulmasta. Ranskan traditio matematiikan opetuksessa on ollut hyvin voimakas pyrkimys abstraktiin. Noin 25 vuotta sitten todettiin, että pitäisi päästä eroon iluusioista koskien lasten abstraktiokykyjä. Valitettavasti ei kuitenkaan saatu aikaan yhtenäistä ja tasapainoista uutta käsitystä matematiikan perussisällöstä koulua varten, vaan seurasi tiheitä, matematiikalle epäsuotuisia muutoksia sekä oppisisällöissä että koulutusjärjestelmässä. Raoult ehdottaa, että satunnaisen käsite tulisi saada osaksi kaikkien kulttuuria. Matematiikan kauneutta voisi perustella sen universaaliudella, ehkä tämä viehättäisi nuoria. Oppisisällöissä voitaisiin tuoda esiin tätä näkökohtaa ja tilastotiede voisi olla eräs esimerkkiala. Tästä syystä tilastotiedettä tulisi opettaa nimenomaan matematiikan yhteydessä, ei erikseen taloustieteessä, maantieteessä, tieteissä, jotka tekevät havaintoja, koska niissä ei tilastotieteestä tulisi yhtenäistä käsitystä, vaikkakin yhteistyö eri aineiden opettajien välillä olisi suositeltavaa. Teoreettinen tilastotiede ei ole helppoa ja opettajien tulisi saada tukea esimerkiksi hyvien esimerkkien ja tutkimusaiheiden muodossa, niitä voisi kerätä verkkosivuille.

Jean-Pierre Ferrier puolestaan oli eri mieltä, vedoten *Adrian Smithin* tutkimukseen Englannissa hän esitti, että suuri osa tilastotieteen ja aineiston käsittelyn opetusta yli 14-vuotiaille voitaisiin siirtää matematiikasta muihin aineisiin, kuten biologiaan ja maantieteeseen. Matematiikassa tulisi löytää ydinsisällöt, joiden parempaan oppimiseen säästynyt aika tarvittaisiin.