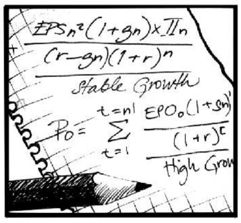


Yleistetyt funktiot eli distribuutiot

Jukka Liukkonen
Helsingin ammattikorkeakoulu Stadia

Johdanto

Matematiikan välineillä reaalimaailman ilmiöt pyritään pelkistämään niin, että jäljelle jää oleellinen informaatio ja vain se. Esimerkiksi taivaankappaleiden liikeratoja tarkasteltaessa on useimmiten yhdentekevää, mikä on kappaleen tarkka muoto tai tiheysjakauma; sen sijaan tähti ajatellaan sen painopisteeseen sijoitettuna pistemassana vailla ulottuvuuksia. Tiheysjakauman ja muun turhan informaation ottaminen mukaan malliin tekisi sen vaikeammin käsiteltäväksi ilman, että monimutkaisesta mallista suurella vaivalla laskettu liikerata olisi oleellisesti tarkempi kuin yksinkertaisesta mallista helposti ratkaistava rata. Samalla tavoin seinän läpi kulkevaa ääniaaltoa laskettaessa seinän ajatellaan koostuvan yhdestä tai useammasta tasapaksusta kerroksesta, joilla ei ole hienorakennetta. Matemaattisen sileät pystysuorat tasot erottavat kerrokset terävästi toisistaan ja ympäröivästä homogeenisesta ilmasta.

Tässä kirjoituksessa suhtaudutaan kriittisesti funktion käsitteeseen ja yleistetään se distribuution käsitteeksi. Jälkimmäinen auttaa karsimaan mallista epäolennaisuuksia. Sen avulla differentiaalilaskennan valtava voima ulotetaan sinnekin, missä derivointia ei klassisessa mielessä voida tehdä. Distribuutiot tekevät mahdolliseksi kaikenulotteisten tiheysjakaumien (pistemassat, pistemäiset dipolit, pintavaraukset jne.) täsmällisen käsittelyn. Distribuutioderivaattaan on sisäänrakennettuna mekanismi, joka generoi automaattisesti eräät fysiikan sovelluksissa esiintyvät alkuehdot ja materiaalirajapintaehdot. Distribuutioiden ansiosta taajuusanalyysissa ei tarvitse rajoittua äärellisen energian omaaviin signaaleihin. Esityksen yksinkertaisuuden ja selkeyden vuoksi tässä käsitellään ainoastaan yksiulotteisia malleja. Tarkasteltavat käsitteet ja tulokset yleistyvät kuitenkin useampaan ulottuvuuteen.

Distribuution erikoistapaus on mitta. Sitä voidaan havainnollistaa jakaumana (engl. ja ransk. *distribution*), joka voi kuvata esimerkiksi massan, sähkönjohtavuuden tai todennäköisyyden jakautumista. Fyysikko *Paul Diracin* (1902–1984) mukaan nimetty Diracin mitta tai Diracin delta (ks. kappale Distribuutiot ja Diracin delta) kuvaa yhteen ainoaan pisteeseen keskittynyttä tiheysjakaumaa. Deltaa voitaisiin luonnehtia sellaiseksi normaalijakaumaksi, jossa keskihajonta on degeneroitunut nollaksi. Dirac esitteli deltan 1920-luvulla, mutta tiettävästi sitä käytti jo 1800-luvulla *Oliver Heaviside* (1850–1925) — kauan ennen varsinaisen distribuutioteorian syntyä. Heaviside ja Dirac käsittelivät deltaa kuin se olisi vain omituinen funktio. Eräät lähteet pitävät distribuutioiden isänä venäläistä matemaatikkoa *Sergei Sobolevia* (1908–1989). Hän käytti nykydistribuutioita läheisesti muistuttavia funktion yleistyksiä tutkimuksissaan 1930-luvun loppupuolella. Varsinaisen distribuutioteorian kehitti kuitenkin ranskalainen *Laurent Schwartz* (1915–2002) vuosina 1944–1948, Sobolevista riippumatta. Vaikka nimitys distribuutio viittaa mittaan, kaikki distribuutiot eivät ole mittoja. Esimerkkinä mainittakoon deltan derivaatta.

Mitä vikaa funktioissa?

Reaalimuuttujan reaaliarvoinen funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on sääntö, jolla reaalilukuun x liitetään säännön yksikäsitteisesti määräämä reaaliluku $y = f(x)$, joka siis yleensä riippuu luvusta x. Tällainen funktiokäsite sallii esimerkiksi funktion g määrittelemisen asettamalla

$$g(x) \quad = \quad \begin{cases} x^2+1, & x \in \mathbb{Z} \\ x^2 \quad , & x \notin \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{1}$$

Useimmissa reaalimaailman malleissa funktion arvot yksittäisissä pisteissä ovat kuitenkin merkityksettömiä; sen sijaan keskiarvon tyyppiset tunnusluvut ovat oleellisia. Esim. tyypillisessä fysiikan mittauksessa havainnoidaan jotakin ilmiötä hetken aikaa, ja mittaustulos on jonkinlainen keskiarvo — sen muodostumiseen tarvitaan pieni aikaväli. Integroituvan funktion f välillä $[a, b]$ saamien arvojen keskiarvo on

$$Af(a,b) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

missä

$$\varphi_{a,b}(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & x \in [a,b] \\ \quad 0 \quad , & x \notin [a,b]. \end{cases} \tag{3}$$

Funktion f arvo kussakin pisteessä x voitaisiin korvata raja-arvolla

$$\overline{f}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} Af(x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Valitettavasti raja-arvoa (4) ei ole aina olemassa.[1] Niiden pisteiden joukko, joissa raja-arvoa ei ole olemassa, on kuitenkin hyvin pieni; matemaatikot puhuvat *nollamittaisesta* joukosta. Hieman yksinkertaistaen sanottuna sellaisen joukon osasten yhteenlaskettu pituus on nolla. Ei merkitse oleellista vääryyttä sopia funktion $\overline{f}(x)$ arvoksi nolla näissä poikkeuspisteissä. Tällä tavoin keskiarvoistetut funktiot sisältäisivät useimmiten kaiken oleellisen informaation. Lisäksi niissä on se hyvä piirre, että kaksi keskiarvoistettua funktiota eroavat toisistaan vain, jos ne eroavat toisistaan oleellisesti — niiden olisi mahdotonta saada eri arvot pelkästään esimerkiksi erillisistä pisteistä koostuvassa, kokonaislukujen joukon $\mathbb{Z}$ kaltaisessa joukossa. Esimerkin (1) tapauksessa $\overline{g}(x) = x^2$.

Testifunktiot

Funktion tärkeiden piirteiden tuntemiseksi riittää siis tietää integraalien

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x$$

arvot "testifunktioilla" $\varphi_{a,b}$, kun $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Distribuutioteoriassa on tämänkaltainen lähtökohta. Siellä otetaan **testifunktioiksi** epäjatkuvien funktioiden $\varphi_{a,b}$ asemesta kaikki sellaiset funktiot φ, jotka häviävät (so. saavat arvon nolla) jonkin funktiosta φ riippuvan rajoitetun välin ulkopuolella, ja joilla on kaikkien kertalukujen derivaatat jokaisessa lukusuoran $\mathbb{R}$ pisteessä. Silloin sekä φ että kyseiset derivaatat ovat derivoituvina funktioina myös jatkuvia. Tällaisten funktioiden joukkoa merkitään $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Suljetun välin $[a, b]$ ulkopuolella häviävien testifunktioiden joukolle käytetään tässä merkintää $\mathcal{D}(a, b)$. Integraalia

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

sanotaan **funktion f arvoksi testifunktiolla** φ. Jos φ ei saa negatiivisia arvoja, ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1, \tag{6}$$

funktio φ on ns. **painofunktio**, ja integraali (5) on funktion f painotettu keskiarvo. Kun f on jatkuva, $x \in \mathbb{R}$ ja ε on riittävän pieni positiivinen luku, painofunktiolla $\varphi \in \mathcal{D}(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ painotettu keskiarvo on lähellä funktion tarkkaa arvoa $f(x)$, sitä lähempänä mitä pienempi ε on.

Millaisia testifunktioita sitten on olemassa? Ainakin vakiofunktio 0 kelpaa testifunktioksi. Toinen kelvollinen testifunktio on

$$\phi(x) = \begin{cases} M^{-1}\,e^{1/(x^2-1)}, & -1 < x < 1 \\ \qquad 0 \quad , & \text{muulloin,} \end{cases} \tag{7}$$

missä

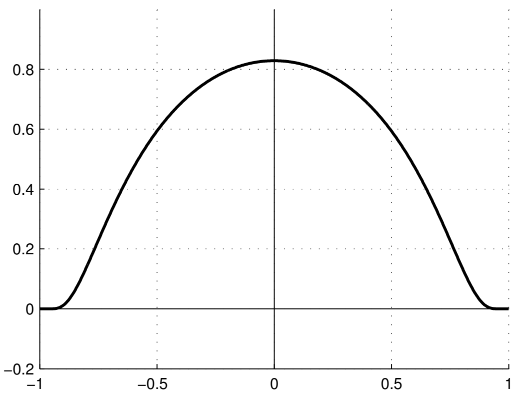
$$M = \int_{-1}^{1} e^{1/(x^2-1)}\,\mathrm{d}x.$$

[1] Jos oletetaan, että funktio f on *rajoitetusti heilahteleva* rajotetuilla väleillä, raja-arvo (4) on olemassa kaikissa pisteissä x. Funktio heilahtelee rajoitetusti välillä $[a, b]$, jos summilla

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|, \quad a \le t_0 < t_1 < \ldots < t_n \le b,$$

on olemassa yhteinen äärellinen yläraja, jota suuremmiksi ne eivät voi tulla.

Sen derivoituvuusominaisuuksien tarkistaminen välin $[-1,1]$ päätepisteissä jää lukijalle.[2] Funktion ϕ kuvaaja on piirretty kuvaan 1.



Kuva 1. Testifunktion ϕ kuvaaja välillä $[-1,1]$.

Siirtämällä ja skaalaamalla funktiosta ϕ saadaan kokonainen parvi

$$\phi_{x_0,\rho}(x) = \frac{1}{\rho}\,\phi\left(\frac{x-x_0}{\rho}\right), \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad \rho \in \mathbb{R}, \quad \rho > 0, \tag{8}$$

testifunktioita, jotka toteuttavat ehdot

(a) $\phi_{x_0,\rho}(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$,

(b) $\phi_{x_0,\rho}(x) > 0$ vain, kun $x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$, ja

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{x_0,\rho}(x)\,\mathrm{d}x = 1.$

Distribuutiot ja Diracin delta

Koska funktion f arvoista yksittäisissä pisteissä ei olla kiinnostuneita, riittää tuntea kuvaus

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \langle f, \varphi \rangle, \tag{9}$$

millä tarkoitetaan siis funktion f arvojen tuntemista eri testifunktioilla. Integraalin ominaisuuksista seuraa testifunktioille φ ja ψ sekä vakioille α ja β yhtälö

$$\langle f, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \alpha\langle f, \varphi \rangle + \beta\langle f, \psi \rangle. \tag{10}$$

Tällöin sanotaan, että kuvaus (9) on **lineaarinen**. Se on myös jatkuva, mutta ennen jatkuvuuden täsmällistä määrittelemistä pitää sopia siitä, mitä tarkoitetaan testifunktiojonon suppenemisella. Alla ”nollas derivaatta” $\varphi^{(0)}$ tarkoittaa itse funktiota $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$ ja

$$||\varphi|| = \max_{a \leq x \leq b} |\varphi(x)| = \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| \tag{11}$$

on suurin jatkuvan funktion $x \mapsto |\varphi(x)|$ suljetulla välillä $[a,b]$ saamista arvoista.

Määritelmä 1. *Testifunktioiden $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ jono* **suppenee** *kohti testifunktiota φ eli $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:*

(a) On olemassa sellaiset luvut a ja b että $\varphi_n \in \mathcal{D}(a,b)$ olipa n mikä positiivinen kokonaisluku tahansa.

(b) Jos r on positiivinen kokonaisluku tai nolla,

$$\lim_{n\to\infty} ||\varphi_n^{(r)} - \varphi^{(r)}|| = 0. \tag{12}$$

Lineaarisen kuvauksen $u : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ arvoja on tapana merkitä $u(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle$, vaikka kyseessä ei olisikaan nimenomainen kuvaus (9).

Määritelmä 2. *Lineaarinen kuvaus*

$$u : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \langle u, \varphi \rangle$$

on **jatkuva***, jos*

$$\lim_{n\to\infty} |\langle u, \varphi_n \rangle| = 0 \quad \text{aina,} \quad \text{kun} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0. \tag{13}$$

On helpohko harjoitustehtävä osoittaa, että kuvaus (9) on jatkuva edellisen määritelmän mielessä.[3] Tässä vaiheessa monella lukijalla on varmaankin jo aavistus siitä, miten funktion käsite yleistetään distribuution käsitteeksi:

Määritelmä 3. *Jatkuvia lineaarisia kuvauksia $u : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sanotaan* **yleistetyiksi funktioiksi** *eli* **distribuutioiksi**. *Niiden joukkoa merkitään $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.*

Kun funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liittää reaalilukuun x reaaliluvun $f(x)$, distribuutio $u : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ liittää testifunktioon φ reaaliluvun $\langle u, \varphi \rangle$. Jos funktio f tulkitaan distribuutioksi yhtälön (5) kautta, sen arvo $\langle f, \varphi \rangle$ on eräänlainen yleistetty, paikallinen, testifunktiolla φ painotettu keskiarvo funktion f tavallisista arvoista $f(x)$. Kaikki distribuutiot eivät suinkaan ole funktioita. Kuuluisin tällainen distribuutio on **deltadistribuutio** eli **Diracin delta** δ_{x_0}, joka määritellään yhtälöllä

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0). \tag{14}$$

Lause 1. *Diracin delta on distribuutio.*

[2] Lukion pitkän matematiikan tiedoilla tehtävä lienee vaativa. Ratkaisussa voidaan käyttää differentiaalilaskennan väliarvolausetta ja eksponenttifunktion kasvuominaisuuksia suhteessa rationaalifunktion kasvuominaisuuksiin.

[3] Integraali $\langle f, \varphi_n \rangle$ lähestyy nollaa jo silloin, kun pelkästään $||\varphi_n||$ lähestyy nollaa. Derivaattoja ei siis tarvitse käsitellä.

Todistus: Jos α ja β ovat vakioita ja φ sekä ψ testifunktioita,

$$\begin{aligned}\langle \delta_{x_0}, \alpha\varphi + \beta\psi\rangle &= (\alpha\varphi + \beta\psi)(x_0)\\ &= \alpha\varphi(x_0) + \beta\psi(x_0)\\ &= \alpha\langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle + \beta\langle \delta_{x_0}, \psi\rangle.\end{aligned}$$

Siis δ_{x_0} on lineaarinen. Jos testifunktioiden φ_n jono suppenee kohti nollatestifunktiota, erityisesti

$$\lim_{n\to\infty} ||\varphi_n|| = 0.$$

Silloin

$$|\langle \delta_{x_0}, \varphi_n\rangle| = |\varphi_n(x_0)| \le \max_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_n(x)| = ||\varphi_n|| \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Siis δ_{x_0} on jatkuva. □

Vaikka δ_{x_0} ei olekaan funktio, sen voidaan ajatella syntyvän yhtälön (8) määrittelemien testifunktioiden $\phi_{x_0,\rho}$ raja-arvona, sillä

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0^+} \langle \phi_{x_0,\rho}, \varphi\rangle &= \lim_{\rho\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{x_0,\rho}(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \varphi(x_0) = \langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Lukijaa kehotetaan näyttämään toteen, että $\alpha u+\beta v$ on distribuutio aina, kun α ja β ovat vakioita ja u sekä v distribuutioita. Tämä havainto antaa menetelmän konstruoida tunnetuista distribuutioista uusia. Testifunktioita rakennettaessa voidaan käyttää hyväksi myös seuraavaa aputulosta, jonka todistus sivuutetaan:

Lemma 2. *Olkoon funktiolla f kaikkien kertalukujen derivaatat avoimella välillä $]a, b[$. Jos $a < c < d < b$, on olemassa testifunktio $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$, joka yhtyy funktioon f suljetulla välillä $[c, d]$; ts. $\varphi(x) = f(x)$ kaikilla $x \in [c, d]$.*

Esimerkki 1. *Ajatellaan kahta toisiaan vakioetäisyydellä kiertävää tähteä, joiden massat ovat m_1 ja m_2. Sijoitetaan x-akseli kulkemaan tähtien painopisteiden kautta. Silloin x-akseli pyörii tähtien mukana. Valitaan tähtiparin painopiste origoksi, ja merkitään yksittäisten tähtien paikkakoordinaatteja x_1 ja x_2. Jos tähtipari halutaan nähdä kokonaisuutena, sen matemaattiseksi malliksi voidaan valita distribuutio $u_* = (m_1 + m_2)\delta_0$. Mikäli tähtien pitää erottua toisistaan, malliksi otetaan $v_* = m_1\delta_{x_1} + m_2\delta_{x_2}$. Tähtien massat ja sijainnit saadaan tarvittaessa selville ”pommittamalla” malleja testifunktioilla samaan tapaan kuin hiukkasfyysikko pommittaa atomiytimiä:*

$$\begin{aligned}\langle u_*, \varphi\rangle &= (m_1 + m_2)\,\varphi(0), &(15)\\ \langle v_*, \varphi\rangle &= m_1\varphi(x_1) + m_2\varphi(x_2). &(16)\end{aligned}$$

Testauksessa on ikäänkuin käytettävissä tietokoneohjelma, joka tulostaa tapauksessa (15) luvun $\langle u_*, \varphi\rangle$ ja tapauksessa (16) vastaavasti luvun $\langle v_*, \varphi\rangle$ millä tahansa testifunktiosyötteellä φ. Sopivia syötteitä käyttämällä ja ohjelman tulosteita tutkimalla pitäisi selvittää, mitkä ovat ohjelman sisäiset parametrit m_1, m_2, x_1 ja x_2. Jos esim. tähtien yhteenlaskettua massaa ei tiedetä, se saadaan selville mallista u_* sellaisella testifunktiolla φ_0, jolle $\varphi_0(0) \ne 0$; nimittäin $\langle u_*, \varphi_0\rangle = (m_1 + m_2)\,\varphi_0(0)$, jolloin $m_1 + m_2 = \langle u_*, \varphi_0\rangle/\varphi_0(0)$.

Tehtävä 1. *Lukijaa pyydetään miettimään testifunktiostrategia, jolla saadaan mahdollisimman vaivattomasti selville kummankin tähden massa ja sijainti mallista v_*.*

Distribuution derivaatta

Jos funktiot f ja g derivaattoineen ovat jatkuvia välillä $[a, b]$, pätee osittaisintegrointikaava

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \Big/_{a}^{b} f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Korvaamalla g testifunktiolla $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$ keskimmäinen termi häviää ja integroinnit voidaan ulottaa yli koko lukusuoran:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (17)$$

Yhtälön (17) oikea puoli on määritelty silloinkin, kun f ei ole derivoituva eikä edes jatkuva. Riittää, kun f on integroituva välillä $[a, b]$. Jos integroituvalle funktiolle h pätee

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \qquad (18)$$

kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, funktiota h sanotaan integroituvan funktion f **heikoksi derivaataksi**. Yhtälö (17) osoittaa, että heikko derivaatta on derivaatan käsitteen yleistys. Kirjoittamalla kaava (17) muotoon

$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle \qquad (19)$$

saadaan vihdoin ilmiselvä vihje siitä, miten distribuutioderivaatta tulee määritellä:

Määritelmä 4. *Distribuution u* **distribuutioderivaatta** *eli lyhyesti derivaatta on kuvaus*

$$u' : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \langle u', \varphi\rangle = -\langle u, \varphi'\rangle. \qquad (20)$$

Yhtälö (17) osoittaa, että derivoituvan funktion klassinen derivaatta distribuutioksi tulkittuna on samalla distribuutioksi tulkitun funktion distribuutioderivaatta.

Lemma 3. *Distribuution derivaatta on distribuutio.*

Todistus: Jos α ja β ovat vakioita ja φ sekä ψ testifunktioita, distribuution u lineaarisuuden nojalla

$$\begin{aligned}\langle u', \alpha\varphi + \beta\psi\rangle &= -\langle u, (\alpha\varphi + \beta\psi)'\rangle \\ &= -\langle u, \alpha\varphi' + \beta\psi'\rangle \\ &= -\alpha\langle u, \varphi'\rangle - \beta\langle u, \psi'\rangle \\ &= \alpha\langle u', \varphi\rangle + \beta\langle u', \psi\rangle.\end{aligned}$$

Siis u' on lineaarinen. Jos testifunktiojono φ_n suppenee kohti nollatestifunktiota, erityisesti

$$\lim_{n\to\infty} ||\varphi_n'|| = 0.$$

Koska u on jatkuva,

$$|\langle u', \varphi_n\rangle| = |\langle u, \varphi_n'\rangle| \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Siis u' on jatkuva. $\square$

Funktiota

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \end{cases}$$

sanotaan **Heavisiden funktioksi** omaperäisen englantilaisen fyysikon ja sähköinsinöörin Oliver Heavisiden mukaan. Funktio H ei selvästikään ole derivoituva eikä edes jatkuva kohdassa $x = 0$, mutta mikä on sen distribuutioderivaatta H'? Koska H on integroituva rajoitetuilla väleillä, distribuution H arvot voidaan laskea integraaleina:

$$\begin{aligned}\langle H', \varphi\rangle &= -\langle H, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^{\infty} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\Big(\lim_{x\to\infty} \varphi(x) - \varphi(0)\Big) = \varphi(0)\end{aligned}$$

kaikilla testifunktioilla φ. Heavisiden funktion distribuutioderivaatta on näin ollen deltadistribuutio:

$$H' = \delta_0\ . \qquad (21)$$

Määritelmän mukaan deltan δ_{x_0} distribuutioderivaatta on kuvaus

$$\langle \delta_{x_0}', \varphi\rangle = -\langle \delta_{x_0}, \varphi'\rangle = -\varphi'(x_0). \qquad (22)$$

Lopuksi helppo harjoitustehtävä lukijalle:

Tehtävä 2. *Määritä distribuutioderivaatat funktioille*

$$|x|, \quad \frac{x}{|x|}, \quad H(x) - H(x-1) \quad \text{ja} \quad \frac{\cos x}{|\cos x|}\ .$$

Jos funktion määrittelevä lauseke on osamäärä, sen arvolla nimittäjän nollakohdassa, kuten muissakaan yksittäisissä pisteissä, ei ole merkitystä; se voidaan sopia vaikkapa nollaksi.

Viitteet

[1] Dautray, R. & Lions, J.-L.: *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology.* Vol. 2 *Functional and Variational Methods.* Springer-Verlag, Berlin 1988.

[2] Hörmander, L.: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I* (2nd ed.). Springer-Verlag, Berlin 1990.

[3] Rudin, W.: *Functional Analysis.* McGraw-Hill, New York 1973.

[4] Schwartz, L.: *Théorie des distributions.* Hermann & Cie, Paris 1966.