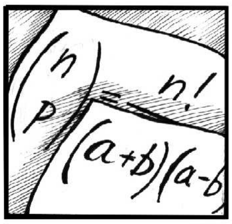


Ratkaisu aikaisempaan tehtävään

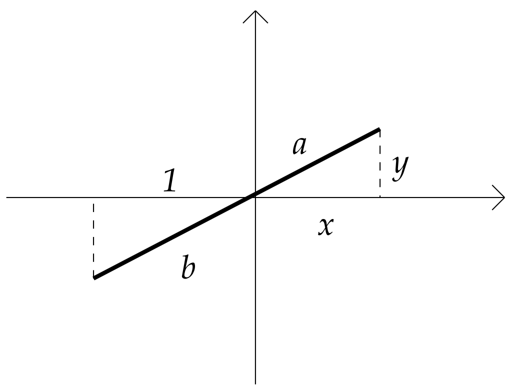
Pekka Alestalo
Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Esitin Solmun numerossa 2/2006 kaksi tehtävää, joista ensimmäisen ratkaisu ilmeistyi edellisessä numerossa; nyt on toisen vuoro.

Tilanne 2: Lieriön muotoiseen tyhjään juomalasiin asetetaan mehupilli. Pilli on kallellaan niin, että sen alaosa vastaa pohjan reunaan ja yläosa yltää juuri ja juuri lasin reunaan (vastakkaisella puolella). Lasiin kaadetaan hitaasti limonadia, jolloin pilliin kiinnittyy kuplia ja se alkaa nousta lasista. Oletetaan, että pillin alapää nousee suoraan ylöspäin lasin sivua pitkin ja että pillin tukipiste lasin yläreunassa pysyy samana (eli tilanne on tietyssä mielessä kaksiulotteinen). Juoman kaatamista jatketaan niin kauan, että lasi täyttyy ja pilli on lopuksi vaakasuorassa.

Ongelma 2: Oletetaan, että lasin poikkileikkauksen halkaisija on 1 ja pillin pituus 2. Kuinka korkealla (lasin yläreunasta mitattuna) pillin yläpää enimmillään on, ja mikä on tällöin pillin kaltevuuskulma vaakatasoon nähden? Anna vastauksena korkeuden tarkka ja likiarvo sekä kulman likiarvo.

Ratkaisu 2: Kuten tehtävässä huomautetaan, tilannetta voidaan käsitellä kaksiulotteisena. Asetetaan koordinaatiston origo lasin reunaan niin, että pillin päät ovat aluksi pisteissä $(-1, -\sqrt{3})$ ja $(0,0)$, lopuksi pisteissä $(-1,0)$ ja $(1,0)$. Pillin yläpään korkeutta kuvaa silloin funktio $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$, jolle $f(x) \geq 0$ kaikilla x ja lisäksi $f(0) = f(1) = 0$.



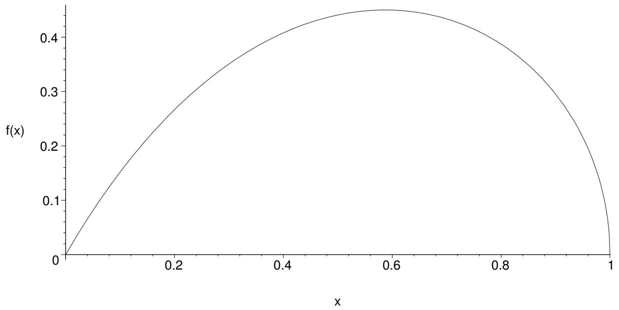
Aloitamme funktion f lausekkeen määrittämisestä. Jos pillin yläpää on pisteessä (x,y) ja origo jakaa pillin kuvion mukaisesti kahteen osaan, joiden pituudet ovat a ja b, niin $a+b=2$. Toisaalta yhdenmuotoisista kolmioista saadaan

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{1} = b,$$

joten $a = 2x/(1+x)$. Näin ollen

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x}{1+x}\sqrt{3 - 2x - x^2} = f(x)$$

on etsimämme funktion lauseke. Tarkistuksena voidaan laskea $f(0) = f(1) = 0$ ja piirtää funktion f kuvaaja.



Kyseessä on derivoituva funktio, jolla sekä kuvion että intuitiivisen päättelyn mukaan on yksikäsitteinen maksimikohta. Se saadaan selville ratkaisemalla yhtälö $f'(x) = 0$, jossa derivaatan laskeminen jätetään lukijan harteille. Kun saatu yhtälö kerrotaan puolittain termillä $\sqrt{3 - 2x - x^2}$, se sievenee lopulta muotoon

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 3}{(1+x)^2} = 0.$$

Tehtäväksi jää silloin kolmannen asteen yhtälön $x^3 + 3x^2 + 3x - 3 = 0$ ratkaiseminen. Ennen suoraviivaista numeerista ratkaisua kannattaa yrittää yhtälön sieventämistä siirtämällä kolmannen asteen termin käännepiste origoon. Koska

$$\frac{d^2}{dx^2}(x^3 + 3x^2 + 3x - 3) = 6x + 6 = 0$$

pisteessä $x = -1$, niin muuttujanvaihdolla $z = x - (-1) = x + 1$, eli $x = z - 1$, alkuperäinen yhtälö yksinkertaistuu sievennysten jälkeen muotoon $z^3 - 4 = 0$, ja ratkaisuksi saadaan $x_0 = z_0 - 1 = \sqrt[3]{4} - 1 \approx 0{,}587$. Huomautettakoon, että yllä käytetyn siirtomenetelmän avulla jokaisesta 3. asteen yhtälöstä voidaan poistaa 2. asteen termi, mutta tässä tapauksessa myös 1. asteen termi sattumalta (?) hävisi.

Pillin yläpää nousee siis lasin yläreunasta enimmillään korkeudelle

$$f(x_0) \approx 0{,}45.$$

Kyseisessä kohdassa pillin kaltevuuskulmalle α_0 pätee $\tan\alpha_0 = f(x_0)/x_0$, josta saadaan likiarvoksi $\alpha_0 \approx 0{,}654$ eli noin 37,5 astetta.