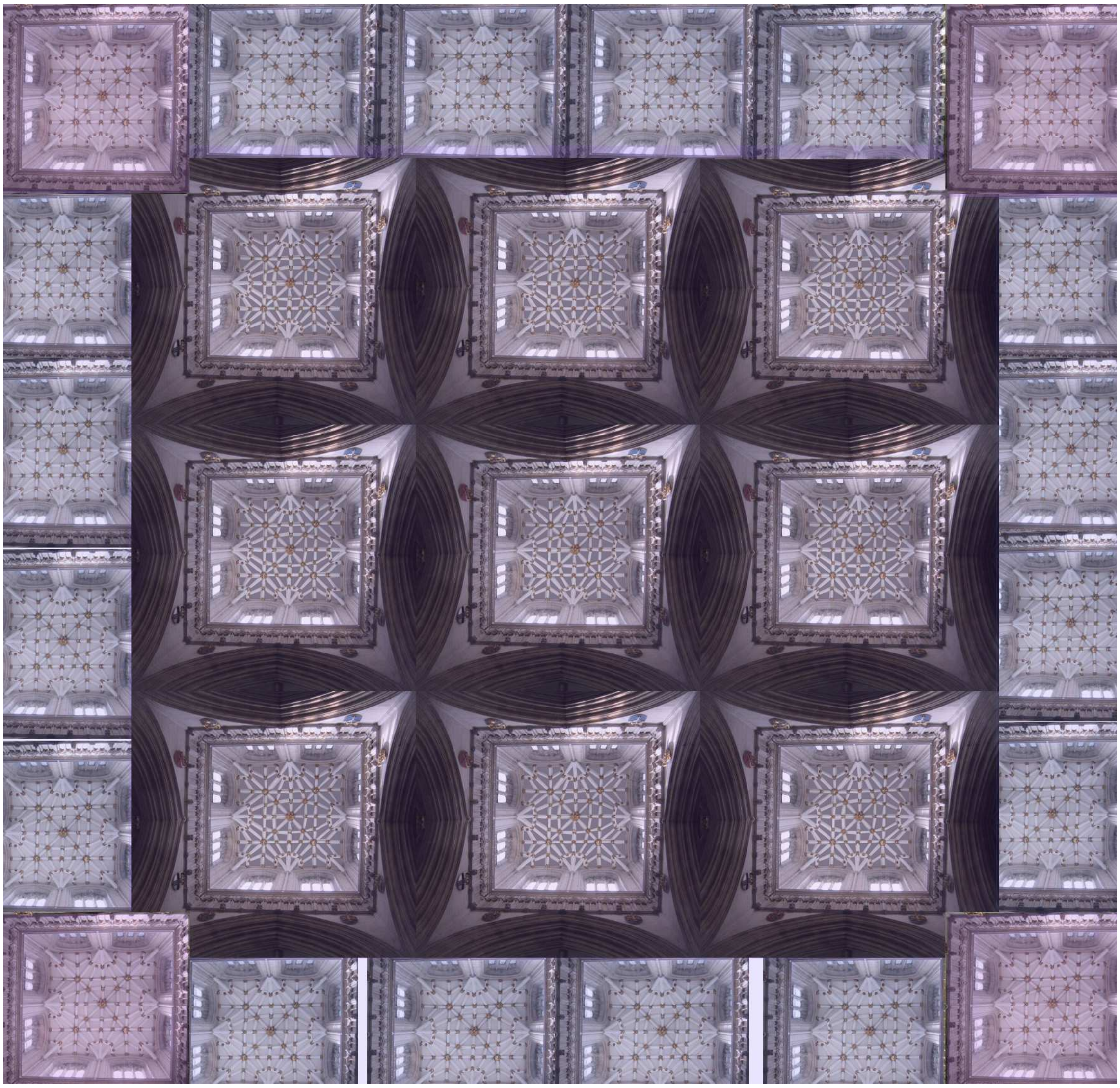
Solmu

Matematiikkalehti
2/2007

http://solmu.math.helsinki.fi/



Solmu 2/2007

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)
ISSN 1459-0395 (Painettu)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)
00014 Helsingin yliopisto

http://solmu.math.helsinki.fi/

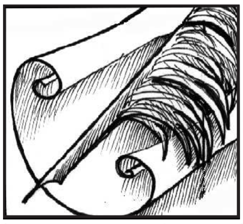
Numeroon 3/2007 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään syyskuun 2007 loppuun mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.

Kannen kuva: Yorkin katedraalin kattorakenne.

Sisällys



Kiehtova ammatti nuorille

Matemaattisten Aineiden Opettajien Liittoon, MAOL ry:hyn, kuuluu yli 4000 opettajaa. Osa on vielä opiskelijoita, osa jo päivätyönsä tehneitä. Järjestössä tunnetaan ammatin valo- ja varjopuolet. Matemaattisten aineiden opettajan ammatti on paljon nuorten ennakkoodotuksia parempi. Houkuttavuus pitäisi saada nuortenkin tietoon.

Kouluissa on kyllä ammatinvalinnanohjausta, mutta harvoin opettaja esitellään, koska kaikkihan sen tietävät. Opettaja on koko ajan näkyvillä. Nuori näkee yhden puolen eikä välttämättä houkuttelevinta. Kuitenkin ammatti on hyvin monipuolinen, toiminnallinen, itsenäinen, paljon haasteita sisältävä ja yhteiskunnallisesti merkittävä. Eikä se palkkakaan mitätön ole. Jos olisi, niin siirtyminen esimerkiksi teollisuuden palvelukseen lisääntyisi.

Monet nuoret ovat varmaan samassa tilanteessa kuin itse olin vuosikymmeniä sitten. Oli muutamia toiveammatteja, mutta ei selkeää ajatusta mihin todella haluaisi. Jostain syystä olin valinnut lukiossa matematiikkalinjan. Matematiikan opettajani sanoi kerran tunnilla: ”Lähtekää opiskelemaan matematiikkaa, sinne pääsee helposti, jos kirjoittaa ylioppilaskirjoituksissa kohtuullisen arvosanan.” Tähän syöttiin tartuin. Tosin opettajaksi ryhtyminen ei käynyt mielessä. Opiskeluajan lopussa ammatti alkoi vaikuttaa realistiselta vaihtoehdolta ja tällä hetkellä olen toiminut opettajana yli kolmekymmentä vuotta. Opetettava oppiaine ja ikäluokka on ajan myötä vaihdellut.

Koko urani ajan olen toiminut MAOL:issa ja olen tällä hetkellä liiton puheenjohtajana. Liitto on antanut tukea, harrastus- ja toimintamahdollisuuksia ja pitänyt paljolti huolta jatkokoulutuksesta. On hyvä, että on suuri yhteisö takana ainakin silloin, jos koulusta ei löydy riittävästi kollegiaalista tukea.

Kertaakaan urani aikana en ole katunut ammatinvalintaani. Nuoruuden toiveammatitkin tuntuvat haalistuneen matemaattisten aineiden opettajuuden rinnalla. Nuorena ei kerta kaikkiaan tiedä muista kuin lähipiirin ammateista. Mahdollisesti kesätyöt ovat rikastuttaneet näkemystä. Pitää uskaltaa lähteä tuntemattomaankin.

Opettaja on aina yhteiskunnallinen vaikuttaja olipa oppiaine tai ikäluokka mikä tahansa. Yhteiskunnan korkeimmilla paikoilla olevatkin muistavat opettajansa sanomisia ja arvovalintoja. Erityisesti matemaattisten aineiden opettaja muistetaan, koska useisiin nykyajan ammatteihin vaaditaan vahva matemaattinen pohja. Tavallinen palaute entiseltä opiskelijalta on, että hyvin on jatkopaikka löytynyt.

Oppiaineesta täytyy myös pitää, mutta siitä myös oppii pitämään. Monet ennakkoasenteet vaivaavat kouluoppimista. Vähitellen opiskelija huomaa miten paljon ajattelun taidot kehittyvät ja ennen kaavoilta tuntuvat asiat alkavat kiehtoa. Myös opettajan pitää käydä joka tunti oppilaiden kanssa sama ajatteluprosessi. Opettajalle löytyy aina uutta oppimista.

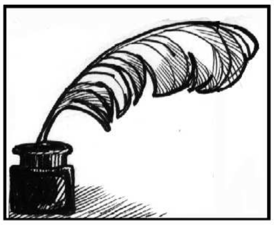
Pääkirjoitus

Opettaja saa joka syksy eteensä uuden ikäluokan uusine ajatuksineen. Hän ei työssään vanhene vaan hän pystyy seuraamaan aina nuorten ihmisten maailmaa ja antamaan siihen panoksensa. Piti oppilas matematiikasta tai ei, aina hän arvostaa opettajaa. Myös kollegat ja yhteistoiminta vanhempien kanssa takaavat sen, että koko ajan toimitaan ihmisten kanssa.

Matemaattisten aineiden opettajaksi ryhtymiselle on paljon vankkoja perusteita, mutta sellaiset jotka lähtevät alalle pienen työmäärän ja pitkien lomien takia, älkööt vaivautuko. Tosin oppituntien ulkopuolisia työaikoja voi helpommin järjestellä kuin monilla aloilla. Voidaan siirtää kokeen korjaus ja seuraavan päivän tuntien valmistelu iltamyöhään ja käydä iltapäivällä vaikka kampaajalla tai parturissa.

Irma Iho
MAOL ry:n puheenjohtaja

Pääkirjoitus



Matematiikan opettajaksi opiskelusta

MAOL ry:n puheenjohtaja Irma Iho kirjoittaa pääkirjoituksessaan matematiikan opettajan ammatin kiehtovuudesta. Monille opettajan ammatista haaveileville lukiolaisille lienee epäselvää, miten valmistutaan matematiikan – tai minkä tahansa muun kouluaineen – aineenopettajaksi peruskoulun yläluokille ja lukioon.

Suomessa aineenopettajat opiskelevat yliopistossa pääaineenaan opettamaansa ainetta, esimerkiksi matematiikkaa, eivät kasvatustiedettä kuten joissakin muissa maissa. Aineenopettajien vahvan aineosaamisen onkin katsottu olevan yksi merkittävä tekijä mm. koululaistemme hyvän PISA-menestyksen taustalla. Matemaattisten aineiden opettajaksi valmistuvat opiskelevat pääaineensa lisäksi sivuaineenaan tavallisesti yhtä tai kahta matemaattis-luonnontieteellistä ainetta, matematiikkaa, fysiikkaa tai kemiaa, joita kaikkia he voivat mm. virkamäärittelyistään riippuen opettaa työssään opettajana.

Jos harkitset tai olet jo päättänyt ryhtyä matematiikan opettajaksi, tulee sinun jo lukiossa valita matemaattisia aineita painottava opinto-ohjelma. Matematiikan pitkän oppimäärän lisäksi kannattaa opiskella mahdollisimman paljon fysiikkaa, kemiaa ja koulusi tarjoamia atk-kursseja. Lukion päättymisen ja ylioppilaskirjoitusten jälkeen pyrit johonkin maamme yliopistoon opiskelemaan pääaineenasi matematiikkaa, fysiikkaa tai kemiaa.

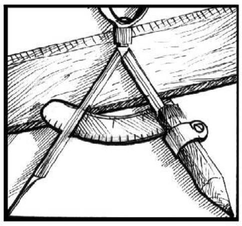
Pääaineesi lisäksi sinun tulee heti opintojen alusta alkaen opiskella sivuaineenasi ainakin yhtä muuta kolmesta edellä mainitusta oppiaineesta, mieluiten molempia muita. Vuoden tai kaksi yliopistossa opiskeltuasi pyrit aineenopettajan opintoihin erillisessä haussa, joka sisältää mm. soveltuvuuskokeen. Useisiin maamme yliopistojen matematiikan, fysiikan ja kemian koulutusohjelmiin on mahdollista pyrkiä myös suoraan aineenopettajaksi opiskelevien kiintiöön erillisen suoravalinnan kautta.

Kun olet selvittänyt tiesi aineenopettajan opintoihin, suoritat matemaattis-luonnontieteellisten aineopintojen lisäksi kasvatustieteen opintoja, joihin kuuluu mm. yleisen kasvatustieteen ja didaktiikan opintojaksoja sekä opetusharjoittelua. Opettajaksi valmistut keskimäärin viidessä vuodessa, kolmen ensimmäisen opiskeluvuoden jälkeen olet filosofian kandidaatti, ja kaksi vuotta lisää opiskeltuasi saat filosofian maisterin arvon.

Tarkempia tietoja aineenopettajaksi opiskelemisesta, mm. opintojen sisällöistä ja laajuuksista, löytyy yliopistojen nettisivuilta.

Mika Koskenoja

Toimitussihteerin palsta



Kavaljeeri- ja sotilasprojektiot

Petteri Harjulehto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Johdanto

Usein on tarvetta esittää kolmiulotteisesta kappaleesta kuva paperilla eli kahdessa ulottuvuudessa. Toiveena olisi tietysti havainnollinen, mittatarkka ja helposti piirrettävä kuva. Valitettavasti havainnollisuus ja mittatarkkuus ovat melkein vastakkaisia toisilleen, joten joudumme aina tekemään näiden suhteen kompromissin.

Taiteessa käytetään usein perspektiivikuvaa, joka perustuu keskusprojektioon. Siinä kuvaussäteet kulkevät yhden kiinteän pisteen, projektiokeskuksen, kautta. Perspektiivikuvien mittatarkka piirtäminen on varsin työlästä. Silmän tai kameran muodostama kuva on (suurin piirtein) keskusprojektion mukainen.

Tässä kirjoitelmassa tutustutaan yhdensuuntaisprojektioihin. Erona keskusprojektioon on, että kuvaussäteet ovat keskenään yhdensuuntaisia ja leikkaavat kuvatason jokaisessa pisteessä samassa kiinteässä kulmassa. Yhdensuuntaisprojektio voidaan myös tulkita keskusprojektion rajatapaukseksi, jossa projektiokeskus on äärettömän kaukana. Tällä tulkinnalla voidaan ajatella auringonsäteiden aikaansaaman heittovarjon olevan yhdensuuntaisprojektion antama kuva.

Yhdensuuntaisprojektioilla on monia hyviä ominaisuuksia. Ne kuvaavat pisteet pisteiksi, suorat suoriksi (joissakin erikoistapauksissa pisteeksi) ja yhdensuuntaiset suorat yhdensuuntaisiksi. Myös janojen jakosuhde säilyy eli erityisesti janan keskipiste kuvautuu keskipisteeksi. Lisäksi kuvatason suuntaiset kuviot säilyvät oikean mittaisina.

Tutustumme kahteen yhdensuuntaisprojektioon, kavaljeeriprojektioon ja sotilasprojektioon. Molemmissa projektioissa kuvasäteet kohtaavat kuvatason vinossa. Niissä muodostuvat kuvat aivot osaavat tulkita varsin helposti "kolmiulotteiseksi", varsinkin jos kuvaa kallistaa sopivasti katsojaan nähden. Mikä parasta – yksinkertaisen kolmiuloitteisen kappaleen kuvan mittatarkka piirtäminen on varsin helppoa – ja jopa hauskaa.

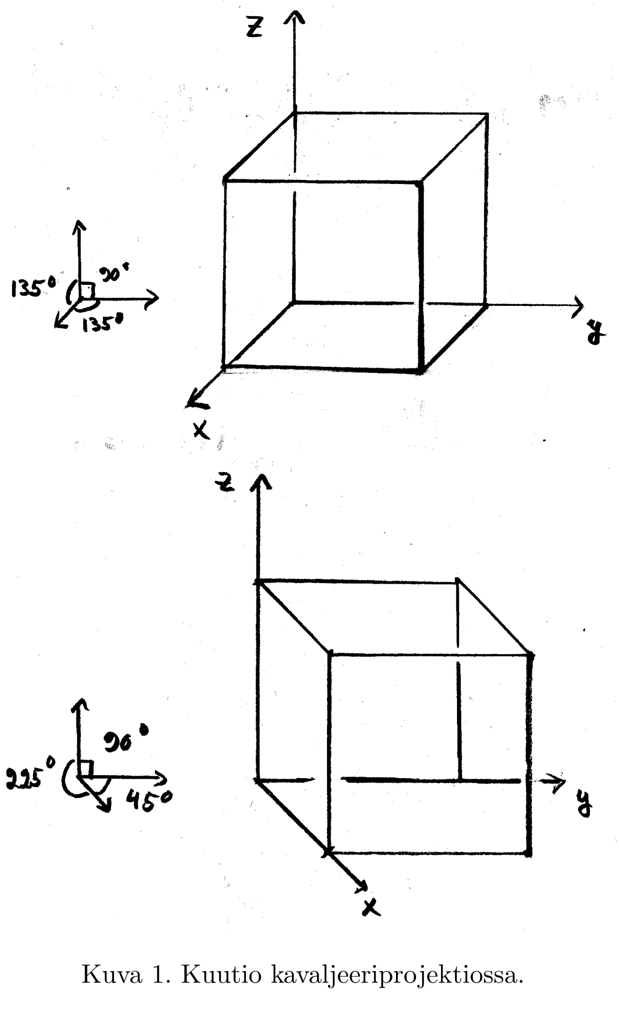
Molempien projektioiden nimet juontavat juurensa siitä, että niitä on käytetty linnoitusten piirustuksissa. Kaveljeeri on ratsumies mutta myös linnoituksen päävallin torni.

Tämä kirjoitelma perustuu Erkki Rosenbergin kirjaan Geometria, Limes ry, Helsinki 1991. Kaikki kuvat ovat kirjoittajan lyijykynällä, viivottimella ja harpilla piirtämiä.

Kavaljeeriprojektio

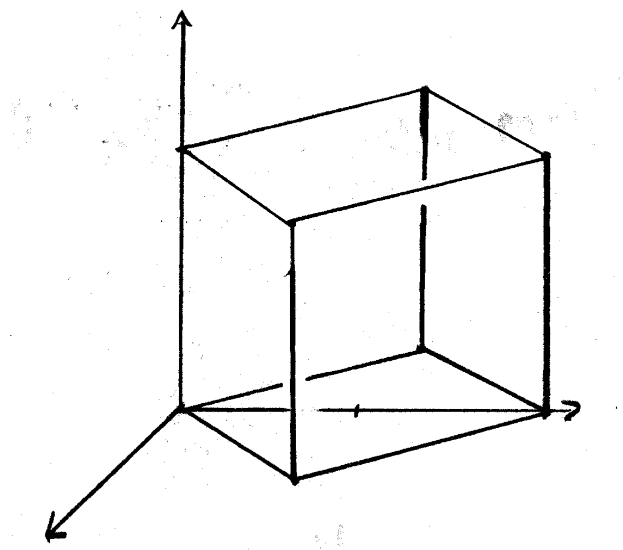
Ajatellaan kolmiulotteista (x, y, z)-koordinaatistoa. Kiinnitetään paperi pystysuoraan (y, z)-tasolle ja kuvattava kappale paperin eteen vaikka (x, y)-tasolle. Ajatellaan että valonsäteen tulevat, paperin takaa katsoen, vasemmalta tai oikealta ylhäältä siten, että x-akselille laitetun janan (lyijykynän) varjo muodostaa 45 asteen kulman y-akselin kanssa ja että varjon pituus on puolet alkuperäisen janan (lyijykynän) pituudesta. x-akselin kuvaksi tulee suora $z = y$ tai suora $z = -y$ ja x-akselin yksikköjana kuvautuu puoleen lyhennettynä. Koska jana oli kohtisuorassa paperia vastaan, saamme suorakulmaisen kolmion, jonka tangentit ovat 1 ja 2 yksikön pituisia. Valo siis kohtaa paperin kulmassa $\tan^{-1} 2$ eli noin 63,4 asteen kulmassa. Kavaljeeriprojektiossa kuvattu aihe näyttää luonnollisemmalta kun sitä katsoo vasemmalta/oikealta alhaalta.

Käytännössä esimerkiksi kuution piirtäminen on varsin helppoa. Valitaan mikä tahansa kuution kärjistä origoon ja mikä tahasa tahkoista (y, z)-tasoon. Piirretään ensin valittu tahko koordinaatistoon. Mitataan kustakin kärjestä x-akselin suuntaan kulkevä särmä muistaen että tämän särmän pituus kutistuu puoleen. Näin löydetyt kärjet yhdistetään toisiinsa särmien mukaan. Tapana on katkaista kuution takana olevat särmät niin, että ne eivät leikkaa edessä olevia särmiä; "jos ei leikkaa todellisuudessa, ei leikkaa kuvassa". Kuvassa 1 on esitetty kuutio molemmissa kavaljeeriprojektion vaihtoehdoissa.



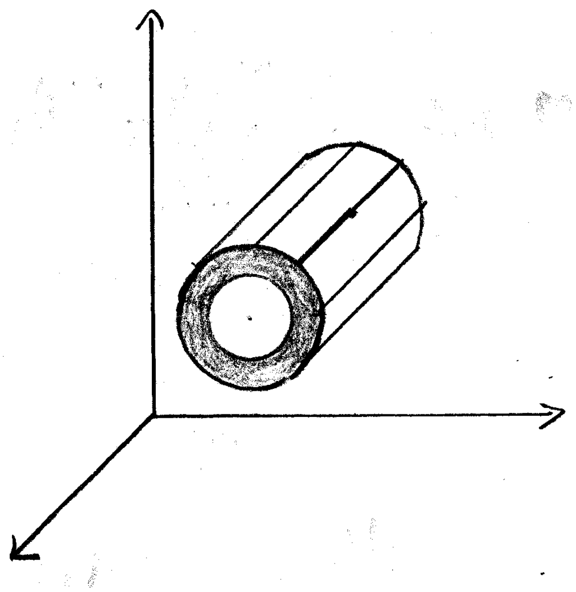
Kuva 1. Kuutio kavaljeeriprojektiossa.

Mikään ei estä sijoittamasta kuutiota myös muulla tavalla koordinaatistoon. Kuvassa 2 on kuutio sijoitettu koordinaatistoon niin, että pohjatahkon halkaisija on y-akselilla.



Kuva 2. Kuutio kavaljeeriprojektiossa.

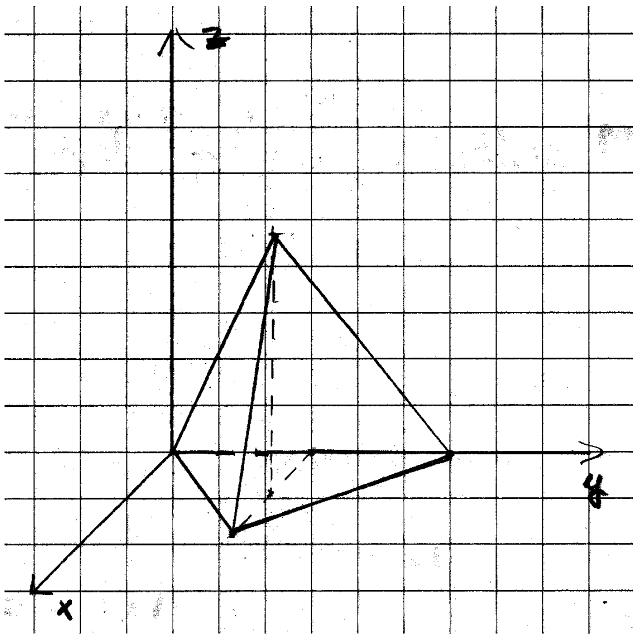
Kavaljeeriprojektiolla on myös helppo piirtää kuvioita, joissa on (y, z)-tason suuntaisia ympyröitä, sillä nämä ympyrät voidaan piirtää harpilla. Kuvassa 3 on putki, joka on kohtisuorassa (y, z)-tasoa vastaan.



Kuva 3. Putki kavaljeeriprojektiossa.

Ruutumenetelmä

Usein kavaljeeriprojektio piirretään ruutupaperille. Jos y- ja z-akselit asetetaan ruutuviivoja pitkin, niin x-akseli voidaan piirtää ruutujen lävistäjän mukaan. Varsinaisessa kavaljeeriprojektiossa akseleiden yksiköt suhtautuvat toisiinsa lukujen $\frac{1}{2} : 1 : 1$ mukaan. Valitsemalla yksiköksi x-akselilla ruudun halkaisija sekä y- ja z-akseleilla kolmen ruudun pituiset janat, päästään suhteeseen $\sqrt{2} : 3 : 3 \approx 0,471 : 1 : 1$. Poikkeama kavaljeeriprojektiosta on alle 6 prosenttia, eikä se ole helposti havaittavissa käsin tehdyistä piirustuksista. Kuvassa 4 on ruutumenetelmällä piirretty tetraedri.

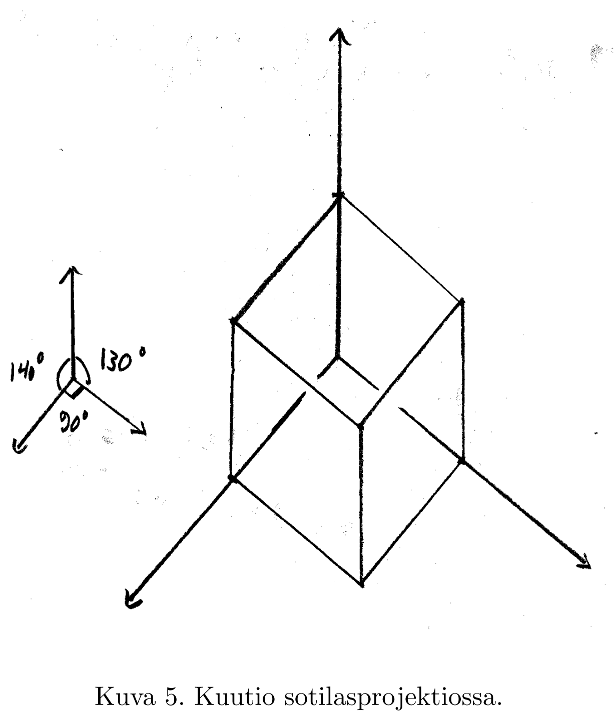


Kuva 4. Tetraedri ruutumenetelmällä.

Aina piirrettäessä kuvaa kolmiulotteisesta kappaleesta tulee kappaleen asemointia kuvaan miettiä huolellisesti. Tutkitaan vaikka kuvassa 4 olevan tetraedrin kärkeä $(0, 2, 0)$. Tähän samaan pisteeseen kuvautuu myös piste $(2, 2\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Siis näiden pisteiden kautta kulkeva suora kuvautuu pisteeksi $(0, 2, 0)$ ja jokainen tämän suoran kanssa yhdensuuntainen suora kuvautuu pisteeksi. On selvää, että jos joku piirrettävää kappaletta rajaavista suorista, esimerkiksi osa kuution sivuista, kuvautuu pisteeksi, niin kuvan havainnollisuus kärsii.

Sotilasprojektio

Sotilasprojektiossa on kuvatasona (x, y)-taso ja kuvaussäteet muodostavat tämän kanssa 45 asteen kulman. Otetaan z-akselin suuntainen yhden yksikön mittainen jana. Tällöin saamme suorakulmaisen kolmion, jonka hypotenuusan muodostaa kuvaussäteen osa ja jonka toinen tangentti on janamme. Koska kolmion kulmat ovat 90 astetta ja kahdesti 45 astetta, havaitsemme, että kateetit ovat yhtä pitkiä; z-akselin suuntaiset pystyjanat kuvautuvat siis oikeanpituisiksi. Pystyjanat pyritään havainnollisuuden parantamiseksi suuntaamaan aina suoraan ylöspäin. Sotilasprojektiota piirrettäessä voidaan lähtökohdaksi ottaa esimerkiksi rakennuksen pohjapiirros. Piirustuksessa voidaan jättää katto piirtämättä, jolloin rakennukseen katsellaan sisään ylhäältä päin. Sotilasprojektiota voidaan käyttää myös pystyssä olevien pyörähdyskappaleiden kuvaamisen, sillä vaakatasossa olevat ympyrät voidaan piirtää harpilla. Kuvassa 5 on kuutio.



Kuva 5. Kuutio sotilasprojektiossa.

Luvut, num3rot ja kuvat

Kimmo Vehkalahti
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Aluksi

Tv-sarjassa Num3rot *(Numb3rs)* ratkotaan rikosmysteereitä matemaattisin ja tilastollisin keinoin. Sarja korostaa matematiikan roolia arkipäiväisissä asioissa kuten sään ennustamisessa, mutta muistuttaa sen tärkeydestä myös rikosten analysoinnissa ja käyttäytymisen mallintamisessa. Kantava teema on säännönmukaisuuksien hahmottaminen, jota todennäköisyyslaskennan ja tilastollisten menetelmien ohella tukevat erilaiset tilastolliset kuvat.

Lukujen ja numeroiden esittämisellä tilastollisina kuvina on verrattain pitkä historia, ja monet kuvatyypeistä ovat vakiintuneet osaksi tiedon esittämisen arkipäivää. Kekseliäisyydellekin on edelleen tilaa, sillä alati laajeneva informaatiotulva asettaa haasteita yhä suurempien tietomäärien esittämiselle yhä tiivistetymmin.

Seuraavassa tarkastelen joitakin enemmän tai vähemmän tyypillisiä tilastollisia kuvia. Kommentoin niiden laatimista ja tulkintaa enimmäkseen tekniseltä kannalta ja jätän kuvien mahdollisen sisällön tutkimisen haasteeksi lukijalle.

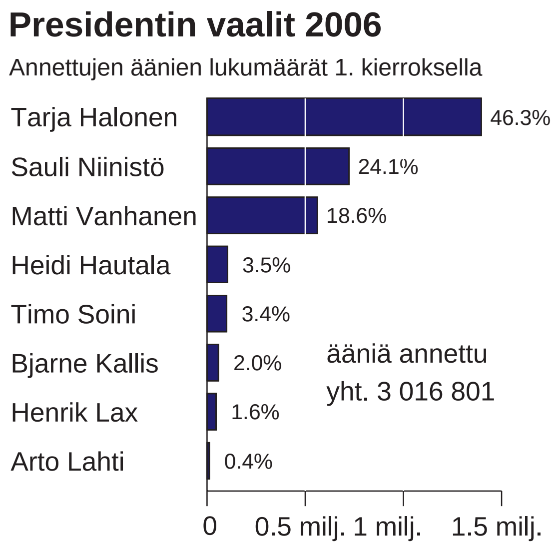
Pylväät ja piirakat

Tilastollinen kuva on parhaimmillaan tehokas ja mieleenpainuva tapa esittää lukuja ja numeroita. Yleisimpiä lienevät erilaiset pylväät ja piirakat, jotka perustuvat pinta-alojen tulkintaan.

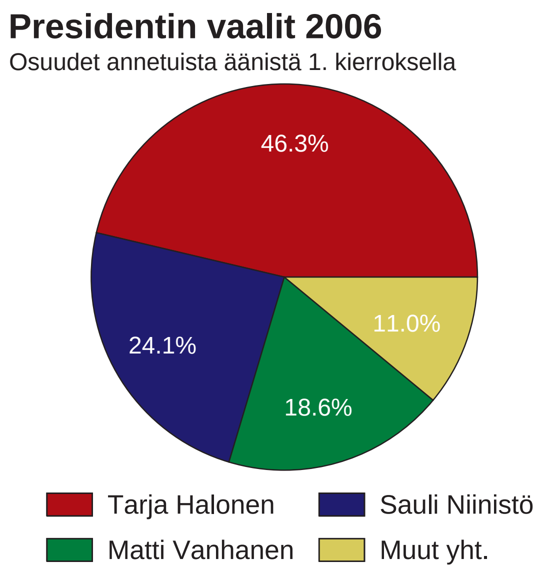
Kuvassa 1 on tyypillinen, lukumääriä esittävä pylväskuva. Prosenttiosuudet on lisäksi ilmaistu lukuina pylväiden päissä ja kokonaismäärä kerrottu kuvan sisään sijoitetulla tekstillä. Pylväät voitaisiin piirtää myös pystyyn, mutta tällöin nimien kanssa tulisi ongelmia. Selkeys on tärkeä kriteeri, sillä tilastollisen kuvan yleisenä päämääränä on välittää tietoa. Tieto ei mene perille, jos esitys on epäselvä. Varsinkin vinoon ladottuja nimiä on vaikea lukea.

Selkeyteen liittyy paljon muutakin: ylimääräisiä raameja ja etenkin koristeita on syytä välttää, numeeristen asteikkojen kuvausten on oltava helppolukuisia ja värien käytön harkittua. Värikuvia on helppo tuottaa, mutta on hyvä muistaa että niitä saatetaan usein tulostaa paperille mustavalkoisina. Pelkästään väreihin perustuva esitys voi latistua äkkiä lukukelvottomaksi sotkuksi. Hyvin laadittu mustavalkokuva onkin monesti harkinnan arvoinen vaihtoehto värikuvalle. Tieteellisissä julkaisuissa se on usein ainoa vaihtoehto, joskin verkkojulkaisemisen myötä painopiste lienee muuttumassa.

Kuva 2 kertoo piirakkakuvan luonteen mukaisesti vain prosenttiosuudet. Kuvaan 1 verrattuna aineistoa on tiivistetty: vain kolme eniten ääniä saanutta on erikseen mukana ja loput niputettu yhteen. Kuva on sinänsä selkeä, mutta oleellisinta olisi pohtia, mitä kuvalla halutaan viestiä. Tässähän voisi tarkastelun tiiviistää vain kahteen eniten ääniä saaneeseen ehdokkaaseen, jotka jatkoivat toiselle kierrokselle. Kahden prosenttiluvun esittämiseen kuva tosin alkaisi olla liioittelua – tiedothan kertoisi lyhyemmin tekstinä. Kuvan niin sanotun tietotiheyden pitäisi olla suurempi.

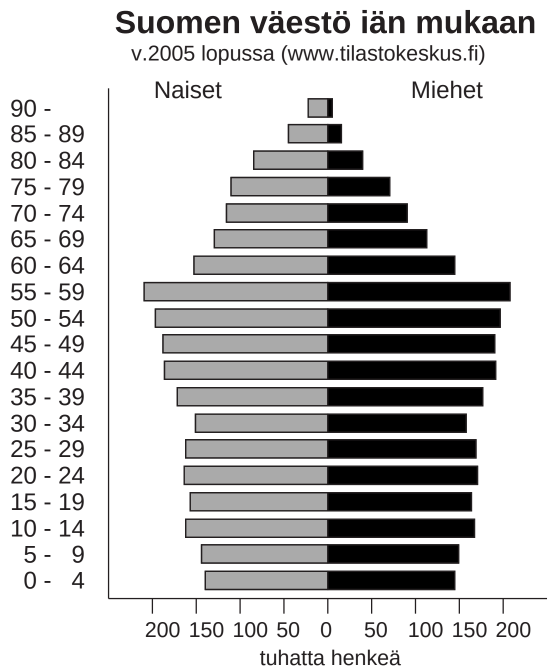


Kuva 1. Pylväskuva.



Kuva 2. Piirakkakuva.

Väestöpyramidiksi kutsutussa pylväskuvassa tietotiheys onkin jo huomattava, esittäähän se pienessä tilassa koko väestön ikä- ja sukupuolijakauman. Tottuneelle yksi vilkaisu kuvaan 3 antaa yleiskäsityksen Suomen profiilista ja suhteuttaa sen muihin maihin. Kuvan tarkempi tutkailu puolestaan valottaa yksityiskohtaisemmin miesten ja naisten ikäjakaumien eroja ja yhtäläisyyksiä sekä ikäryhmien välisiä suhteita. Väestöpyramidissa toteutuvatkin useat tilastollisten kuvien laatukriteerit: informaatiota on monessa tasossa, kuva haastaa vertailemaan ja tarjoaa kiinnostuneelle tarkempaa tietoa.



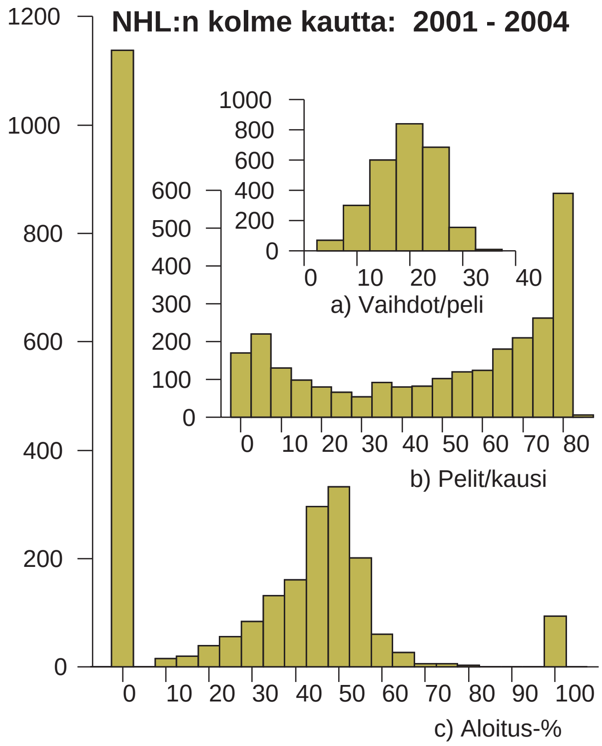
Kuva 3. Väestöpyramidi.

Jatkuvan muuttujan frekvenssijakaumaa esittävää pylväskuvaa kutsutaan histogrammiksi. Kuvaan 4 on tilan säästämiseksi aseteltu sisäkkäin kolme histogrammia näytteeksi Pohjois-Amerikan jääkiekkoliiga NHL:n lukemattomista tilastoinnin kohteista kolmelta työsulkua edeltäneeltä kaudelta. Kaikki kuvat koskevat pelaajakohtaisia tietoja. Kuva 4 a) kuvaa vaihtojen määrää, siis sitä, kuinka monesti pelaaja on päässyt kentälle pelin aikana. Tyypillisin määrä näyttää olevan 20:n paikkeilla. Pelien määrän jakauma kauden aikana näkyy kuvasta b), ja kuvan c) aloitusprosentti kertoo, kuinka usein pelaaja on onnistunut siirtämään omalle joukkueelleen erotuomarin pudottaman kiekon.

Histogrammin pystyakseli ilmaisee pylvään osoittamaan luokkaan kuuluvien havaintojen lukumäärän. Histogrammeihin liitetään usein normaalijakauman tiheysfunktion kuvaaja, mutta kuten tästäkin nähdään, kaikki asiat eivät ole normaalisti jakautuneita, eivät edes symmetrisiä. Vaihtojen määrän jakauma on lähimpänä normaalijakaumaa, tosin sekin melko vino.

Erikoisin jakauma on aloitusprosentilla: valtava piikki nollassa, sen jälkeen erikseen hyvin vino jakauma välillä 10–70 % ja jälleen toinen piikki kohdassa 100 %. Jääkiekkoa tuntevat keksivät heti selityksen: aloitusprosenttia ei ole mieltä tarkastella kaikkien pelaajien osalta, sillä aloitukset kuuluvat pääasiallisesti vain keskushyökkääjän tehtäviin. Prosenttien kanssa olisi myös hyvä ottaa huomioon lukumäärät. Molemmat kuvan piikeistä paljastuvatkin lopulta aika turhanpäiväisiksi.

Myös kuvan 4 b) jakauma on hyvin kaukana normaalijakaumasta. Jakauman moodiluokan muodostavat ne, jotka ovat pelanneet suurinpiirtein kaikki pelit kauden aikana.



Kuva 4. Histogrammeja.

Histogrammeista historiaan

Tilastollisten kuvien historia on mielenkiintoinen ja pidempi kuin useimpien tilastollisten menetelmien, jotka on pääosin kehitetty vasta 1900-luvulla. Pylväät ja piirakat keksi n. 200 vuotta sitten skotlantilainen *William Playfair*. Hän oli erikoinen ja ristiriitainen hahmo, jonka ehdotuksiin suhtauduttiin tuolloin varsin kielteisesti. Playfair myös kehitteli ahkerasti viivakuvia ja nykyään teemakartoiksi kutsuttuja tilastollisia esityksiä. Pylväiden ja piirakoiden osalta hänen arvellaan saaneen vaikutteita veljeltään *John Playfair*iltä, joka oli matematiikan professori ja perehtynyt *Leibnizin* ja *Eulerin* 1600–1700-luvuilla kehittämiin logiikan diagrammeihin.

Toinen mainittava henkilö 1800-luvulla oli *Florence Nightingale*, jonka saavutukset matematiikan ja tilastotieteen puolella ovat jääneet yleensä vähemmälle huomiolle kuin hänen ansionsa sairaanhoidon saralla. Nightingale keksi kuvata Krimin sodassa menehtyneiden sotilaiden kuolinsyitä napakoordinaatistoon piirretyllä kuvalla, joka nosti dramaattisella tavalla esiin brittiarmeijan pahimman vihollisen: saniteettiongelman. Nightingalen huomiolla ja ennen kaikkea sen visualisoinnilla oli huomattavia vaikutuksia terveydenhuollon kehittymisessä.

Nightingalen ja Playfairin henkilöhistoriaan ja tilastokuviin voi perehtyä verkossa mm. Wikipedian välityksellä. *Datan Leonardo da Vinci*ksi kutsutun tilastotieteen professori *Edward Tufte*n teoksiin kannattaa tutustua jo yleissivistyksen vuoksi.

Valehtelu ja lukutaito

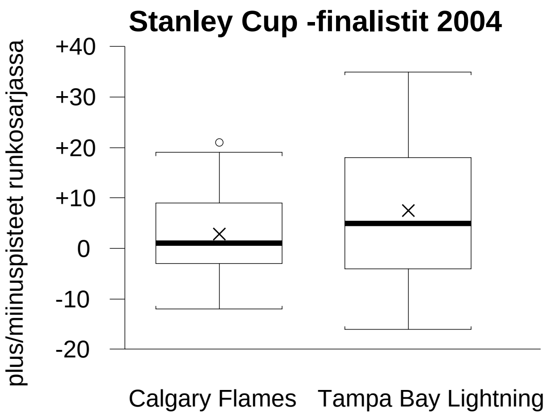
Piirakkakuvista on tullut sittemmin niin sanotun business-grafiikan symboli, ja niihin suhtaudutaan 200 vuotta Playfairin jälkeenkin nuivasti, ainakin yliopistomaailmassa. Tämä johtuu paljolti niiden holtittomasta käytöstä, johon taulukkolaskentaohjelmat suorastaan kannustavat. Kolmiulotteisen oloisilla, sopivaan perspektiiviin leivotuilla piirakoilla saadaan vaatimatonkin yritys näyttämään kilpailijoihin verrattuna markkinajohtajalta. Vääristeltyjen lukujen ja numeroiden esittämistä pidettäisiin valehteluna, mutta samaa johtopäätöstä ei välttämättä osata tehdä vastaavan kuvallisen esityksen perusteella.

Tietämättömiä on muutenkin helppo hämätä kikkailemalla kuvien mittasuhteilla, mikä koskee yhtä hyvin muitakin kuin piirakoita, myös pylväskuvia. Kaikkien aikojen myydyin tilastotieteen kirja *Kuinka tilastoilla valehdellaan* esitti jo 1950-luvulla tyypilliset tavat joilla lukijaa saatetaan johtaa harhaan tilastokuvien avulla. Yhä ajankohtainen opus kuului aikoinaan tilastotieteen tutkintovaatimuksiinkin. Näin haluttiin varmistaa että ainakin opiskelijat osaisivat suhtautua tilastokuviin kriittisesti ja laatia niitä sortumatta tyypillisimpiin virheisiin.

Viivat ja pisteet

Siitä lähtien kun tietokoneilla on voitu tehdä asiallista grafiikkaa, ovat erityisesti amerikkalaiset tilastotieteilijät *John Tukey*, *William Cleveland* ja *John Chambers* kehittäneet uusia tapoja tilastollisten aineistojen visualisointiin. Yksi on kuvan 5 laatikkokuva, jota Tukey ehdotti eksploratiivisen data-analyysin työkaluksi 1970-luvulla.

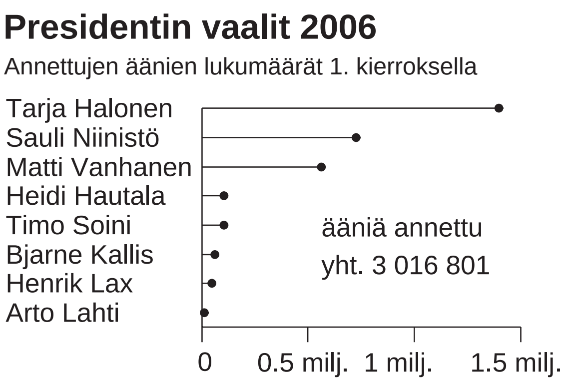
Kuvatyyppi on vähitellen tullut tunnetummaksi, kun yhä useammat ohjelmistot ovat sisällyttäneet sen valikoimiinsa. Silti on monia jotka eivät ole tätä esitystä ennen nähneet. Uudempien kuvatyyppien vaarana on, että kuva ei tule lainkaan ymmärretyksi. Kunnolliset selitykset ovat tarpeen.



Kuva 5. Laatikkokuva.

Laatikkokuva esittää jatkuvan muuttujan jakauman histogrammia tiivistetymmin. Paksu viiva kuvaa järjestetyn aineiston keskimmäistä lukua mediaania, ja laatikko sen ympärillä piirtyy vastaaviin 25 %:n ja 75 %:n kohtiin jättäen näin puolet havainnoista laatikon sisään. Suurin osa muista havainnoista kuvautuu välinä molempiin suuntiin laatikosta, ja vain poikkeavimmat havainnot piirretään yksittäin näiden ulkopuolelle. Kuvassa 5 on lisäksi havainnollistettu keskiarvot rasteina.

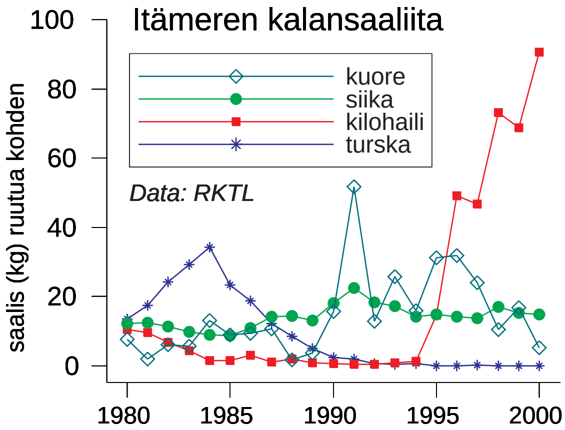
Laatikkokuva on tehokkaimmillaan, kun se piirretään jonkin luokittelevan muuttujan luokille rinnakkain. Kuva 5 esittää NHL:n *Stanley Cup* -pokaalista 2004 pelanneiden kahden joukkueen eroja pudotuspelejä edeltäneessä runkosarjassa. Pystyakseli kertoo joukkueen pelaajien yhteenlasketut plus/miinus-pisteet. Pelaaja saa kentällä ollessaan plussan kun oma joukkue ja miinuksen kun vastustaja tekee maalin. Pelaajan positiivinen saldo osoittaa hänen pelaavan joukkueensa hyväksi, negatiivinen viestii ettei joukkuepeli oikein suju. Kuva paljastaa, että pokaalin vienyt Tampa Bay oli tässä suhteessa parempi.



Kuva 6. Pistekuva.

Naomi Robbins on tuoreessa kirjassaan ansiokkaasti nostanut monia Tukeyn ja erityisesti Clevelandin jo aiemmin ehdottamia kuvatyyppejä uudelleen esille. Yksi näistä on pylväskuvan vaihtoehdoksi tarjottu, visuaalisesti keveämpi pistekuva, jossa pylväät on korvattu pisteillä ja viivoilla. Kuva 6 esittää tällä tekniikalla oleellisesti samat tiedot kuin kuva 1, hieman pienemmässä koossa ja kokonaan mustavalkoisena. Säännönmukaisuudet hahmottuvat helpommin pistekuvasta kuin pylväskuvasta, erityisesti suuremmilla aineistoilla.

Perinteisemmin viivoja käytetään aikasarjojen kuvaamisessa. Kuva 7 on tyypillinen viivakuva, joka kertoo Itämeren kalakannoissa ajassa tapahtuneista muutoksista. Aineiston keruu ja tulosten käyttötarkoitus ratkaisevat, miltä aikaväliltä ja miten tiheästi tietoja kuvassa esitetään. Tässä tiedot vuosilta 1980–2000 on esitetty vuoden tarkkuudella, vaikka ne onkin alunperin mitattu tiheämmin.



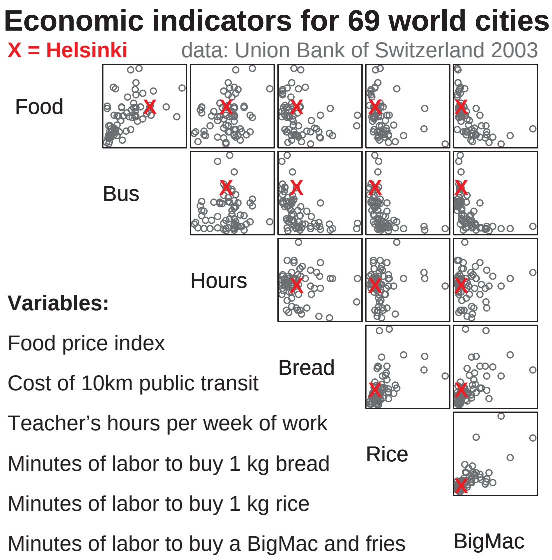
Kuva 7. Viivakuva.

Kuvassa 7 on neljä aikasarjaa, jotka on piirretty eri väreillä. Värit eivät ole välttämättömiä, sillä joka sarjalla on myös erilainen piste havainnon kohdalla. Pisteet ja viivat on selostettu omassa laatikossaan, joka on sijoitettu kuva-alueen tyhjään tilaan ja näin saatu kuva selityksineen mahtumaan verrattain pieneen kokoon.

Hajontakuvat

Vielä pienempään kokoon tietoa on tiivistetty kuvan 8 hajontakuvamatriisissa. Tässä esillä on vain muuttujien parittaisten hajontakuvien muodostaman matriisin yläkolmio. Lävistäjällä ovat muuttujien nimet, ja alakolmion tila on käytetty selityksiin. Aineiston kuvaamista kaupungeista erottuu punaisella rastilla piirretty Helsinki.

Hajontakuvamatriisi tarjoaa hyvän yleisnäkymän aineistoon: se paljastaa sekä säännönmukaisuudet että poikkeamat säännönmukaisuuksista. Muuttujien välisten riippuvuuksien luonne, mahdolliset epälineaarisuudet ja poikkeavat havainnot tulevat äkkiä esille. Tarkemmin niihin on parasta syventyä piirtämällä parittaisia hajontakuvia erikseen kiinnostavista muuttujista. On syytä muistaa, että hajontakuvamatriisi ei ole moniulotteinen kuva vaan kokoelma tavallisia kaksiulotteisia kuvia.

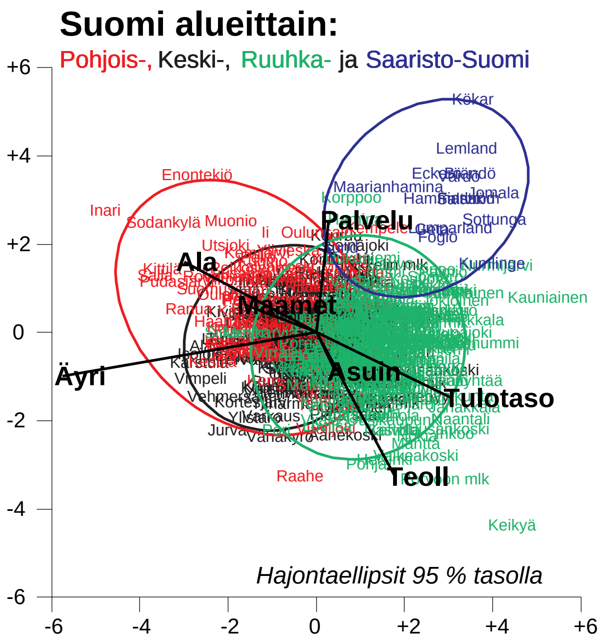


Kuva 8. Hajontakuvamatriisi.

Tilastollisessa tutkimuksessa hajontakuvat ja muut pistediagrammit ovat yleisempiä kuin pylväät ja piirakat. Etenkin monimuuttujamenetelmillä on tyypillistä pyrkiä tiivistämään useampiulotteisten ilmiöiden välisiä suhteita ja kuvailemaan niitä helpommin tulkittavina kaksiulotteisina hajontakuvan muunnelmina. Kolmiulotteiset esitykset eivät käytännössä auta paljoakaan, sillä reaalimaailman ilmiöt ovat joka tapauksessa moniulotteisempia.

Kuva 9 visualisoi erotteluanalyysia, jossa tutkitaan mikä erottaa tunnetut ryhmät toisistaan. Suomen kunnista muodostetut maantieteelliset alueet eroavat toisistaan mm. elinkeinoprofiileiltaan, vauraudeltaan ja pinta-alaltaan. Kuva on samalla esimerkki kaksoiskuvasta: samaan koordinaatistoon on piirretty sekä havainnot että muuttujat. Erotteluavaruudeksi kutsuttu kuva avaa useita näkymiä tutkittavaan aineistoon.

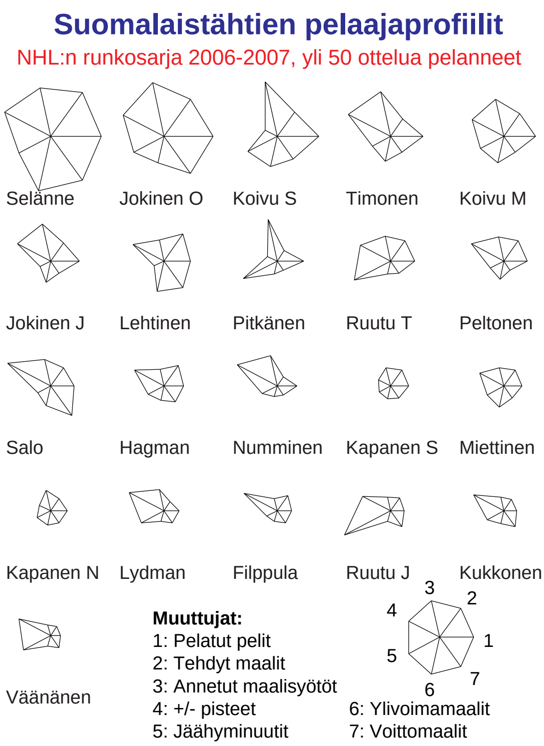
Hajontaellipsit auttavat hahmottamaan ryhmien muotoa ja sijoittumista toisiinsa nähden. Ryhmien keskivaiheilla ja siten myös koko kuvan keskellä on eniten ruuhkaa, eikä sieltä ole tarkoituskaan erottaa yksittäisiä kuntia. Kiintoisampia ovat ryhmien reunoilla esiintyvät ääritapaukset, kuten teollisuusvaltaiset Keikyä ja Raahe, kooltaan valtavat Inari ja Sodankylä, poikkeuksellisen vauras Kauniainen ja palveluun keskittynyt Kökar. Korppoo kuuluu Ruuhka-Suomeen, mutta sen elinkeinoprofiili on samankaltainen kuin Saaristo-Suomen kuntien.



Kuva 9. Erotteluavaruus

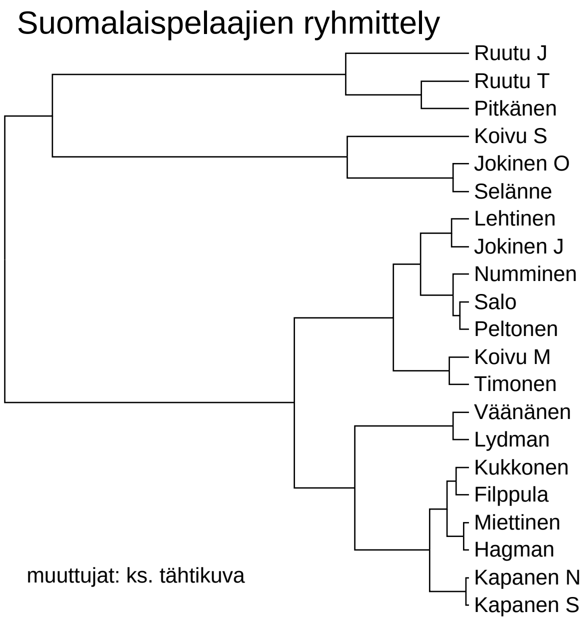
Profiilikuvat

Edellä on viitattu profiileihin niin erotteluavaruuden kuin väestöpyramidinkin yhteydessä. Profiilien tunnistaminen ja vertailu onkin hyvä esimerkki säännönmukaisuuksien hahmottamisesta. Palataan hetkeksi NHL-teemaan ja tarkastellaan kuluneen kauden parhaiden suomalaispelaajien profiileja tilastomerkintöjen valossa.



Kuva 10. Tähtikuva.

Kuvan 10 tähtikartta esittää 21 pelaajan profiilit seitsemän muuttujan suhteen. Kuvaa tarkastelemalla on helppo huomata samankaltaisia pelaajaprofiileja, esimerkiksi Ruudun veljekset kunnostautuvat samoilla pelin osa-alueilla ja Kapasilla on muutakin yhteistä kuin nimi.



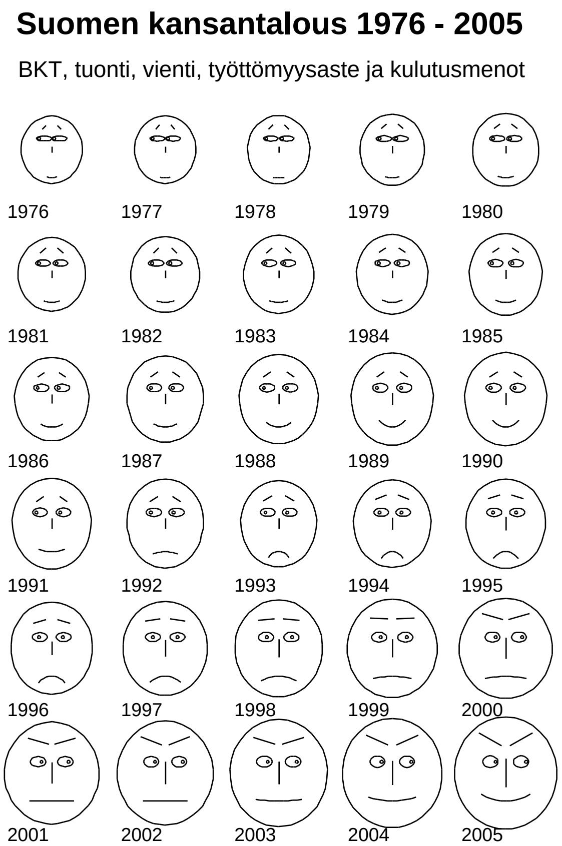
Kuva 11. Dendrogrammi.

Tähtikuva on yksi lukuisista edellä mainittujen tilastotieteilijöiden kehittämistä kuvatyypeistä, jotka eivät ole hyödyllisyydestään huolimatta yleistyneet. Sen sijaan biologian sovellusten puolelta periytyvä puukuva, jota kutsutaan dendrogrammiksi, on vakiintunut hierarkisen ryhmittelyanalyysin tulosten esitystavaksi.

Kuvassa 11 pelaajatähdet on ryhmitelty tähtikuvan muuttujien perusteella. Kuvien avulla selviää, että Ruutujen ohella myös Pitkänen on istunut runsaasti jäähyllä. Kolme tehokkainta pelaajaa *(joista kukaan ei valitettavasti ole mukana kevään 2007 MM-kisoissa)* erottuu omana ryhmänään, ja lopuista muodostuu pari isompaa ryhmää. Kapaset ovat todellakin pelaajaprofiileiltaan lähimpänä toisiaan.

Profiilien hahmottamiseen on lukuisia muitakin keinoja. Ehdottomasti ilmeikkäimmän tavan lukujen ja numeroiden kuvaamiseen on esittänyt *Herman Chernoff*, niin ikään tilastotieteen professori. Chernoffin naamoina tunnettu tekniikka perustuu ihmisen ilmiömäiseen kykyyn tunnistaa muita ihmisiä kasvonpiirteiden perusteella. Chernoffin alkuperäiseen ehdotukseen sisältyy kaikkiaan 18 kasvonpiirrettä, joita voi varioida aineiston muuttujien perusteella.

Kuvan 12 naamat heijastelevat viiden keskeisen taloudellisen aikasarjan kehittymistä 30 vuoden aikana. Aikasarjat on kytketty kasvonpiirteisiin, joista osa on kokonaisilmeen kannalta näkyvämpiä kuin toiset. Esimerkiksi työttömyysaste vaikuttaa suun kaarevuuteen, bruttokansantuote (BKT) naaman kokoon ja suun leveyteen, tuonti nenän pituuteen ja vienti katseen suuntaan.



Kuva 12. Chernoffin naamat.

Ilmeistä on helppo havaita 1990-luvun alun laman dramaattinen vaikutus. Piirsin kuvan ensimmäisen kerran 1990-luvun lopulla, ja päivitin sen vasta hiljattain muuttamatta määrityksiä. Hymy oli vihdoin palannut, mutta ilme ei mielestäni ole aivan terve. Ken haluaa, vetäköön tästä mielenkiintoisia johtopäätöksiä hyvinvointiyhteiskunnan tilasta.

Chernoffin naamakuva on joka tapauksessa erikoislaatuinen, voidaanhan sillä aidosti kuvata useampia asioita yhtäaikaa. Toisaalta kasvokuvat jo sinällään ja sopivien kasvonpiirteiden valikointi herättävät herkästi kysymyksen subjektiivisuudesta. Hienosta ideasta ja eräistä näyttävistä sovelluksista huolimatta naamakuva on jäänyt enemmänkin kuriositeetiksi. Kuvan 10 kuviot ovat kieltämättä neutraalimpi tapa kuvata havaintojen tai havaintoryhmien profiileja.

Lopuksi

Ei riitä että tilastotiedettä ja matematiikkaa opiskelleet olisivat perillä tässä jutussa kuvatuista asioista. Tilastollisten kuvien avulla esitetään niin paljon yhteiskunnan tilaa kuvaavia tietoja ja tutkimustuloksia, että kuvien perusteiden ja tulkinnan ymmärtämisen pitäisi kuulua tietoyhteiskunnassa kansalaistaitoihin.

Usein pelkkä kuva ei riitä vaan informaation tiivistämiseksi tarvitaan myös erilaisia tilastollisia menetelmiä. Tilastolliset kuvat olisikin hyvä piirtää mahdollisimman julkaisuvalmiiksi samassa ympäristössä, jossa aineistoa muutenkin käsitellään. Tehokas työskentely edellyttää, että aineistojen siirtelyt analyysi- ja kuvanpiirto-ohjelmien välillä minimoidaan. Toinen hyvä periaate on, että kuvat piirretään ohjelmallisesti, ei siis hiirellä klikkaillen. Tällöin työvaiheiden toistaminen on yksinkertaisempaa, virheet on helppo korjata ja työ voidaan tarvittaessa automatisoida.

Tämän jutun kuvat olen piirtänyt Survo-ohjelmiston PLOT-toimintoja käyttäen PostScript-muotoon, jolloin ne saa suoraan mukaan mm. LaTeX-dokumentteihin. Olenkin kirjoittanut jutun valmiiksi Survossa hyödyntäen sen LaTeX-liittymää. Kuvissa ei ole yhtään käsin tehtyä kohtaa vaan kaikkia yksityiskohtia säädetään kuvanpiirtokaavioissa annetuilla täsmennystiedoilla. Voin milloin tahansa piirtää kaikki kuvat uudelleen yhdellä napinpainalluksella. Aineistojen vaihtuessa uudet kuvat on kätevä ja nopea laatia valmiita pohjia hyödyntäen. Tällaiset ominaisuudet ovat tarpeen muuallakin kuin jutun alussa mainitun *Num3rot*-sarjan rikostutkinnassa, sillä ylimääräistä aikaa ei tunnu enää olevan lainkaan.

Viitteet

1. Num3rot: www.mtv3.fi/num3rot/
2. Numb3rs: www.cbs.com/primetime/numb3rs/
3. Wikipedia: a multilingual, free content encyclopedia, http://en.wikipedia.org/
4. Herman Chernoff, The Use of Faces to Represent Points in K-Dimensional Space Graphically, Journal of the American Statistical Association 68:342, 1973, 361–368.
5. William S. Cleveland, Visualizing Data, Hobart Press, Summit, New Jersey, 1993.
6. J. C. Gower and D. J. Hand, Biplots, Chapman & Hall, London, 1996.
7. Darrell Huff, Kuinka tilastoilla valehdellaan, alkup. How to Lie with Statistics (1954), Otava, 1974.
8. Vesa Kuusela, Tilastografiikan perusteet, Edita, Helsinki, 2000.
9. Seppo Mustonen, SURVO MM: käyttöympäristö tekstin ja numeerisen tiedon luovaan käsittelyyn, www.survo.fi.
10. Seppo Mustonen, Survo ja minä, Survo Systems, Helsinki, 1996.
11. Naomi B. Robbins, Creating More Effective Graphs, Wiley, New York, 2005.
12. Ian Spence, No Humble Pie: The Origins and Usage of a Statistical Chart, Journal of Educational and Behavioral Statistics 30, 2005, 353–368.
13. Edward R. Tufte, The Visual Display of Quantitative Information, Graphics Press, Cheshire, Connecticut, 1983.

Viisi lukion geometrian oppikirjaa

Matti Lehtinen
Maanpuolustuskorkeakoulu

Paavo Jäppinen, Alpo Kupiainen ja *Matti Räsänen*: **Lukion Calculus 2. MAA3 Geometria. MAA4 Analyyttinen geometria.** Otava 2005. 210 s. Ovh. 24,80.

Tarmo Hautajärvi, Jukka Ottelin ja *Leena Wallin-Jaakkola*: **Laudatur 3. Geometria.** 227 s. Otava 2005. 216 s. Ovh. 12,20.

Markku Halmetoja, Kaija Häkkinen, Jorma Merikoski, Lauri Pippola, Harry Silfverberg, Timo Tossavainen ja *Marja-Leena Viilo*: **Matematiikan Taito 3. Geometria.** WSOY 2005. 197 s. Ovh. 12,20.

Jukka Kangasaho, Jukka Mäkinen, Juha Oikkonen, Johannes Paasonen, Maija Salmela ja *Jorma Tahvanainen*: **Pitkä matematiikka 3. Geometria.** WSOY 2006. 227 s. Ovh. 12,80.

Pekka Kontkanen, Riitta Liira, Kerkko Luosto, Juha Nurmi, Riikka Nurmiainen, Anja Ronkainen ja *Sisko Savolainen*: **Pyramidi 3. Lukion pitkä matematiikka. Geometria.** Tammi 2005. 216 s. Ovh. 12,00.

On kulunut jo pitkä aika siitä, kun geometria oli matematiikan keskeisintä sisältöä ja sen opettamisen ja oppimisen pohjimmaiseksi syyksi esitettiin loogiseen ajatteluun harjaannuttamista. Sana looginen mainitaan yhä opetussuunnitelman perusteissa: matematiikan pitkän oppimäärän tavoitteisiin kuuluu, että opiskelija ”oppii näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena”. Lukion pitkän matematiikan geometriaksi nimetyn kurssin MAA3 spesifisistä tavoitteista ensimmäinen on, että ”opiskelija harjaantuu hahmottamaan ja kuvaamaan tilaa sekä muotoa koskevaa tietoa sekä kaksi- että kolmiulotteisissa tilanteissa”. Lisäksi opiskelijan tulisi harjaantua ”muotoilemaan, perustelemaan ja käyttämään geometrista tietoa käsitteleviä lauseita” ja ratkaista geometrisia ongelmia ”käyttäen hyväksi kuvioiden ja kappaleiden ominaisuuksia, yhdenmuotoisuutta, Pythagoraan lausetta sekä suora- ja vinokulmaisen kolmion trigonometriaa”. Nämä tavoitteet opetussuunnitelma ajattelee saavutettavan kurssilla, jonka keskeiset sisällöt ovat ”kuvioiden ja kappaleiden yhdenmuotoisuus, sini- ja kosinilause, ympyrän, sen osien ja siihen liittyvien suorien geometria” sekä ”kuvioihin ja kappaleisiin liittyvien pituuksien, kulmien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen”.

Esittelen tässä viisi lukion pitkän matematiikan geometrian kurssia varten kirjoitettua oppikirjaa. Oppikirjaesittelyjen edellisessä osassa (Solmu 2/2006) mukana olleiden sarjojen lisäksi vertailussa on nyt myös Calculus-sarjan kirja. Muista poiketen Calculus on nitonut samoihin kansiin geometrian ja analyyttisen geometrian kurssit. Geometrian kurssin osuus päättyy sivulle 119, joten Calculus on kirjoista selvästi suppein. Kirjat ovat kaikki erilaisia. En yritä asettaa niitä paremmuusjärjestykseen, joskin mielipiteeni tulevat esiin itse kutakin kirjaa käsiteltäessä.

Edellisen esittelyn tiedot kirjojen ulkonaisista ominaisuuksista pätevät pääosin geometrian kirjoihinkin. Laudatur-sarjaan on kuitenkin ilmestynyt väripainatus, jota Pyramidissa nähtiin jo ykkösosassa. Calculus on kaksivärinen samoin kuin Pitkä matematiikka ja Matematiikan taito. Calculuksen mukaan tulon jälkeen en voi enää sanoa, että kaikkien kirjojen tekijäryhmissä olisivat molemmat sukupuolet edustettuina – mikä ei tietysti sinänsä ole tarpeenkaan. Otava näyttää käyttävän kirjoittajina opettajia, muiden kustantajien työryhmissä on mukana myös korkeakoulutaustaisia tekijöitä. Calculuksenkin kirjasin näyttää 12 pisteen korkuiselta. En ole typografian asiantuntija. Paljaalle silmälle kaikkien kirjojen käyttämä kirjasinlaji näyttää varsin samanlaiselta. Kirjoista painavimmat ovat Laudatur ja Pyramidi, 437 g. Calculus, vaikka sisältää kaksi kurssia, painaa vain 403 g, Pitkä matematiikka 395. Keveintä tietoa näyttää olevan Matematiikan taito: vaaka näytti vain 343 g. – Punnitsin vertailun vuoksi myös takavuosien koviin kansiin sidotut oppikirjat, Kalle Väisälän Geometrian ja kaksiosaisen Kallion, Malmion ja Apajalahden Geometrian. Edellinen painoi 273 g, jälkimmäisen osat (joista vain toinen kulki kerrallaan koululaisen laukussa) yhteensä 462 g.

Calculusta ja Pyramidia lukuun ottamatta kirjojen alkuun on painettu kurssin ajankäyttöehdotus. Laudatur ottaa huomioon eripituiset oppituntikäytännötkin. Ajankäyttösuunnitelmia ei voi suoraan verrata toisiinsa, koska ne on sovitettu kuhunkin kirjaan, ja asioiden jaottelussa on eroja. Samoin kuin ykköskurssissa, Matematiikan taito ehdottaa 30 tunnin käyttämistä, Pitkä matematiikka 28:aa ja Laudatur 27:ää. Jokaisen kirjan loppuun on painettu asiahakemisto.

Kirjojen esimerkkitehtävät sisältävät säännönmukaisesti jonkin laskutoimitusketjun, jonka päätteeksi saadaan toivottu tulos. Matematiikan taitoa lukuun ottamatta kirjat esittävät lopputuloksen kahdesti, jälkimmäisellä kerralla niin, että tulosta edeltää sana Vastaus. Seuraava lainaus on Laudaturista, mutta se voisi olla yhtä hyvin Calculuksesta, Pitkästä matematiikasta tai Pyramidista:

”Neliön piirin suhde ympyrän piiriin

$$\frac{p_{\text{neliö}}}{p_{\text{ymp}}} = \frac{4r\sqrt{\pi}}{2\pi r} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\pi} \approx 1{,}13$$

Vastaus: Neliön piirin suhde ympyrän piiriin on $\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi} \approx 1{,}13$.”

Yksi kirjojen yhteinen piirre jää hiukan kummastuttamaan. Kaikki tietysti määrittelevät ainakin sini- ja kosinifunktion ja käyttävät niitä opetussuunnitelman mukaisesti kolmion osien ratkaisemiseen. Yksikään kirja ei omista puolta sanaa sen pohtimiseen, mistä laskimen suoltamat sinit ja kosinit oikeastaan tulevat.

Kaikki viisi kirjaa tasapainolevat geometrian kurssin ristiriitaisuuden kanssa: asiaa on sinänsä paljon, laskento on tarpeellista, mutta geometrian tulisi olla myös ja nimenomaan matemaattiseen ajatteluunkin koulivaa. Ei ole kirjojen vika, ainakaan pelkästään, että geometria ei oikein löydä paikkaansa lukiossa. Olisiko laskento ja deduktio erotettava kerta kaikkiaan omiksi kursseikseen, jälkimmäinen ehkä vain erikoiskurssina eliittiä varten?

Calculus

Calculuksen kaksi lukiokurssia sisältävän niteen geometriaosuus on vain 119 sivun mittainen. Esitys on siis selvästi tarkasteltavista kirjoista suppein. Esitys on jaettu neljään varsinaiseen lukuun: Tasogeometria, Kolmion ratkaiseminen, Yhtenevyys ja yhdenmuotoisuus sekä Avaruusgeometria. Kirjassa on vielä asteriskin lisäainekseksi osoittama geometrisia konstruktioita esittelevään osa. Harjoitustehtäviä on, mallikokeet mukaan lukien, 371 kappaletta. Melkein kaikki tehtävät ovat laskutehtäviä. Vastaukset annetaan luettelossa silloin, kun ne ovat numeerisia. Harjoitustehtävät on luokiteltu perustehtäviksi ja vaativammiksi tehtäviksi. Suurta vaativuuseroa ei näissä näytä olevan. Ne melko harvat tehtävät, joissa ratkaisijalta toivotaan perusteluja, on yleensä luokiteltu vaativampien osastoon. Näin piiloviestitään, että geometria olisi ensi sijassa laskentoa. Kirjan esimerkkilaskuissa on sekä (huonoa) tauluesitystyyliä – peräkkäisiä lausekkeita ilman selityksiä tai välimerkkejä – että korrektisti normaalia kirjoitustapaa käyttäen esitettyä tekstiä.

Luku Tasogeometria alkaa Eukleideen viiden postulaatin luettelosta ja aksiomaattisen menetelmän esittelystä. Tästä eteenpäin kirja ei kuitenkaan noudata johdonmukaisen esityksen kaavaa. Joillekin käsitteille esitetään täsmällisen määritelmän oloisia kuvauksia, toiset vain tulevat vastaan, ilman että niitä erityisesti toivotettaisiin tervetulleiksi tai esimerkiksi viitattaisiin siihen, että käsite on perusasteen kurssista tuttu. Tarkka lukija saattaa kuitenkin keksiä määritelmät – esimerkiksi käsitteille hypotenuusa ja kateetti –kuvioista. Harjoitustehtävissä saatetaan vedota tietoihin, jotka eksplisiittisesti tuodaan esiin myöhemmin. Näin esimerkiksi tangenttinelikulmion sivujen pituuksia koskevassa tehtävässä. Osa tarjotusta tiedosta on eksplisiittisesti muotoiltu lauseiksi. Joidenkin yhteyteen on painettu virke, jossa kerrotaan todistuksen olevan harjoitustehtävä. Näitä tehtäviä ei kuitenkaan ole uudelleen esitetty harjoitustehtäväluettelossa.

Luku Kolmion ratkaiseminen lähtee liikkeelle Pythagoraan lauseesta. ”Muistikolmiot” esitellään vaiheessa, jossa niiden muistettavuuden merkitystä ei voida perustella. Trigonometrisista funktioista otetaan käyttöön sini, kosini, tangentti ja kotangentti. Funktioiden määrittelyn kannalta olennaista yhdenmuotoisuuden käsitettä ei ole tässä vaiheessa käytössä. Sinin ja kosinin määritelmät laajennetaan suoran kulman ja oikokulman välille. Sinilause perustellaan kolmion alan kirjoittamisella eri tavoin muotoon $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Sinilauseesta luvataan hiukan liikaa: kolmion muita osia ei toki voi sen avulla laskea, jos yksi pari sivuja ja vastaisia kulmia tunnetaan.

Yhtenevyyttä ja yhdenmuotoisuutta käsittelevä luku määrittelee yhtenevyyden kuvioiden ominaisuutena olla asetettavissa päällekkäin niin, että kuviot täysin yhtyvät. Kolmioiden viisi yhtenevyyslausetta luetellaan ja luettelon jälkeen kerrotaan, mitä on todistaminen ja todistetaan kolme esimerkkilausetta. Yhdenmuotoisuuden määritelmäksi esitetään kaikkien vastinjanojen verrannollisuus. Tästä sanotaan seuraavan kaikkien vastinkulmien yhtäsuuruuden. Määritelmän mukaan yhdenmuotoisuuden testaaminen vaatisi äärettömän monien janaparien mittaamisen. Määritelmän jälkeisessä esimerkissä on monikulmioita ja esitellyt vastinjanat monikulmioiden kärkien välisiä. Määritelmästä siirrytään virkkeeseen, jossa luetellaan kolmioiden yhtenevyyslauseet (vain kirjainlyhenteinä) ja kirjoitetaan auki yhdenmuotoisuuslause kk, jonka totuuden kerrotaan olevan ilmeinen. Lukuun on vielä sisällytetty kolmion merkillisten pisteiden luettelo ja yhdenmuotoisuuden sovelluksena pisteen potenssin käsitteen esittely.

Avaruusgeometria-luku alkaa suorien ja tasojen keskinäisten asentojen esittelyllä. Tason normaali määritellään suoraan kahta tason suoraa vastaan kohtisuorana suorana. Säännölliset monitahokkaat luetellaan. Lieriön määritelmä on tyypillisen epämääräinen: ”Kun suora liikkuu avaruudessa suuntansa säilyttäen ja palaa takaisin lähtökohtaansa, syntyy suljettu lieriöpinta. Entä jos suora liikkuisi vaikka ”paikallaan” edestakaisin? Kartion määritelmä antaisi vastaavasti mahdollisuuden erilaisiin tulkintoihin. Prismat ja pyramidit esitetään lieriöiden ja kartioiden erikoistapauksina, niin kuin toki mahdollista onkin. Pallosta annetaan vain erilaisia mittalukuja.

Calculuksen esitys ei sisällä ylimääräisiä koristeluja sen enempää tekstin kuin kuvituksenkaan puolella. Calculuksen lukija oppii laskemaan geometristen kuvioiden mittalukuja. Geometria loogisena oppirakennelmana tuskin kovin selvästi lukijan eteen avautuu.

Laudatur

Laudaturin ote aiheeseen on selvästi lennokkaampi ja myös lukijaa kosiskelevampi, alkaen esipuheen päiväyksestä ”Keuruulla mäntyjen siitepölyn liidellessä pilvinä”. Värejä käytetään ja kirjassa on myös muutama löyhästi tekstiin liittyvä värivalokuva, esimerkiksi sarvikuonoista, kun tehtävänä on laskea pennun ja täysikasvuisen massojen suhdetta. Parista kuvasta tunnistaa oululaistaustan. Lisäksi kirjan sivuille on ripoteltu runsaasti pieniä eläinaiheisia karikatyyrejä. Kirjan yleisasu on levoton: eritummuisia ja reunuksin koristetut laatikot täyttävät monien aukeamien pinta-alasta yli puolet.

Laudaturin harjoitustehtävien määrä, 574, on suurin vertailtavien kirjojen joukossa. Mukaan on poimittu muutamia hyvinkin vanhoja ylioppilastehtäviä. Jokunen harjoitustehtävä on kirjoitettu englanniksi, ruotsiksi, saksaksi, ranskaksi tai viroksi. Tehtävistä noin 15 on luonteeltaan todistustehtäviä. Laskutehtävien numeeriset vastaukset kerrotaan vastausluettelossa.

Kirjan alkaa lähtötaitotesti, jossa kysytään samoja asioita, joita kirjassa sitten opiskellaan. Sitten seuraa johdanto, jossa mm. väitetään paralleeliaksiooman todistamisen olleen keskiajalla kullan valmistuksen ohella muotiongelma ja käytetään vastaoletuksesta nimitystä vastaväite. Varsinaiset asiat on ryhmitelty 11 lukuun. Luku peruskäsitteitä alkaa todistuksen rakenteen esittelyllä. Saamme tietää, että perustelu ei ole täysin pätevä todistus. Pisteen määritelmää ”suureena, jolla on paikka, mutta ei ulottuvuutta” seuraa ilmoitus, että ”pistettä tai oikeastaan sen kuvaa merkitään isoilla kirjaimilla A, B, ...” Suoraa ei sitten enää määritelläkään, sanotaan vain, että se voidaan usealla tavalla määritellä. Kirjan ilmaisu on useasti kiusallisen epätäsmällistä: ”Aste voidaan kirjoittaa desimaalilukuna kuten mikä tahansa luku, esimerkiksi 54,25°”.

Laudatur siirtyy jo toisessa luvussa yhdenmuotoisuuteen, joka määritellään ominaisuutena olla samanmuotoinen, muttei välttämättä samankokoinen. Sen kummemmin filosofoimatta ilmoitetaan, että yhdenmuotoisuus seuraa vastinjanojen ja vastinkulmien yhtäsuuruudesta. Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alasuhteesta loikataan sujuvasti yhdenmuotoisten kappaleitten tilavuussuhteeseen.

Kolmas luku käsittelee kolmioita. Luvun ensimmäinen virke ilmoittaa, että kolmion kärjet nimetään isoilla kirjaimilla aakkosjärjestyksessä vastapäivään. Käytäntöä ei ole helppo noudattaa kuvioissa, joissa on useita kolmioita. Kolmioiden yhtenevyys määritellään päällekkäin asettamisen kautta ja yhtenevyyslauseet todistetaan. Kolmioiden yhdenmuotoisuuden määritelmäksi esitetään vastinkulmien pareittainen yhtäsuuruus. Yhdenmuotoisuuskriteerien olemassaolo ilmoitetaan, mutta vain ”kk” mainitaan. Kolmion merkillisiä pisteitä luetellaan, mutta niiden perusteluja ei esitetä. PS-tietona annetaan kuitenkin Heronin kaava ja sanotaan, että se on ainoa tapa laskea kolmion ala tuntematta trigonometriaa. Kaava $A = \frac{1}{2}ah$ on edellisellä aukeamalla, joten ilmoitus saattaa ihmetyttää lukijaa.

Oma lukunsa on omistettu ”kulmien piirtämiselle harpilla ja viivaimella”. Lukijaa jää vaivaamaan ilmoitus ”Piirrettäessä suoralle normaali käytetään suorakulman puolittamista.”

Luvussa Suorakulmainen kolmio otetaan käyttöön sini, kosini ja tangentti. Määrittelyyn liittyvä suorakulmaisten kolmioiden yhdenmuotoisuus otetaan huomioon. ”Muistikolmiotkin” tulevat loogisesti oikea-aikaisesti. Sinin ja kosinin määritelmän laajentaminen tylppiin kulmiin saa oman lukunsa, samoin sinilause ja kosinilause kumpikin. Monikulmioita käsittelevään lukuun on niputettu muutama pinta-alakaava ja muutama suunnikkaan ominaisuuden todistus (joista yhdessä viitataan minulle outoon ja kirjassa esittelemättömään ”sääntöön $(\mathrm{kks})_{\mathrm{k}}$”). Luvussa Ympyrä esitellään nimityksiä. Kehäkulmalauseen todistusta ei esitetä, sanotaan vain sen olleen todistettu jo Eukleideen aikana. Sen sijaan lauseen se erikoistapaus, jossa kehäkulman toinen kylki on halkaisija, esitetään esimerkkinä, jonka lähde on syksyn 1996 ylioppilaskirjoitus. Omituinen on myös resepti ympyrän kaaren pituuden laskemiselle: se saadaan ”laskemalla ensin koko ympyrä piiri, ja sitten yhtä astetta vastaavan kaaren pituus. Tämä kerrotaan keskuskulman suuruudella, jolloin saadaan keskuskulmaa vastaava kaari.”

11. luku vie taas kolmiulotteiseen maailmaan: se kertoo pallosta. Saamme mm. tietää, että ”Leikattaessa pallo kahteen osaan leikkauspinta on ympyrä” ja että ”Leveyspiiri tarkoittaa sitä kulmaa, joka muodostuisi käsiesi väliin, jos seisoisit maapallon keskipisteessä pitäen toisella kädellä kiinni päiväntasaajasta ja toisella kyseisestä leveyspiiristä”! Saman, ilmeisen huolimattomasti kootun luvun harjoitustehtävissä Tallinna sijoitetaan vain 50 km päähän Helsingistä. Ulkoluodolta ulkoluodolle saattaa näin ollakin, mutta Suurkirkon ja Tallinnan Raatihuoneen välimatkaksi voi laskea noin 82 km. Luvun 12 alkaa lieriön määritelmä. Calculuksen suoran sijasta Laudaturin lieriö syntyy janan liikkuessa avaruudessa suuntansa säilyttäen. Hyvä olisi nytkin hiukan rajoittaa lisää janan liikkumisvapautta. Seuraavassa luvussa kartiopinta syntyykin puolisuoran liikkeen tuloksena ja kartio sitten tasoleikkauksena. Kartiolla voi olla sivutahkoja, koska pyramidi on kartio, jonka sivutahkot ovat pohjaa lukuun ottamatta kolmioita.

Loppuun päästyään kirja alkaa alusta uudestaan. Olennainen asiasisältö on kirjoitettu – uusin laskuesimerkein höystettynä – parille kymmenelle sivulle. Takakannen sisäpuolella on ulos taitettava sivu, jossa on tärkeimpiä laskukaavoja ja mm. trigonometristen funktioiden määritelmät.

Laudatur olisi selvästi hyötynyt oppikirjatarkastuksesta. Se antaa vaikutelman innostuksen vallassa mutta hiukan lievällä itsekritiikillä kootusta paketista. Toivottavasti kirja saa uusia painoksia, joissa kummallisuuksia on vähemmän. Tekijöiden näkemys geometriasta laskentona tuskin poistuu.

Matematiikan taito

Matematiikan taito on ulkonaisesti konstailematon. Pienempi kirjasin ja tehokkaammin käytetty sivutila merkitsevät mahdollisuuksia runsaampaan asiasisältöön, vaikka kirjan sivumäärä on joukon toiseksi pienin. Harjoitustehtäviä on 443. Muista kirjoista poiketen myös todistusluonteisten tehtävien ratkaisuja tai ratkaisuvihjeitä on vastausluettelossa. Kirjan laskuesimerkit on esitetty suomen kielen kirjoitussääntöjen ja matematiikan käytänteiden mukaisesti, välimerkkejäkään unohtamatta.

Matematiikan taito jakaa aineksensa kuuteen lukuun. Ensimmäiseen lukuun, Tasogeometrian perusteita, on perusnimitysten ohessa liitetty sinin, kosinin ja tangentin määritelmät suorakulmaisessa kolmiossa; tarvittaviin yhdenmuotoisuustietoihin luvataan palata myöhemmässä luvussa. Lukuun on vielä sisällytetty keskeiset pinta-alakaavat.

Toisessa luvussa esitellään geometrista todistamista. Esimerkkinä todistetaan pari lausetta. Kolmion sivujen ja kulmien suuruusjärjestyslauseen todistus – niin kuin moni muukin alkeisgeometrian lause – nojaa olennaisesti *pons asinorumiin*, lauseeseen tasakylkisen kolmion kantakulmista. Matematiikan taito lupaa todistaa lauseen aikanaan ja ilmoittaa sen tässä yhteydessä aksioomaksi.

Kolmas luku, Yhtenevyys, alkaa määrittelemällä kaksi kuviota yhteneviksi, kun ne ovat ”samanmuotoiset ja samankokoiset”. Yhtenevyyden perustaminen kuvioiden toinen toisensa peittämiseen torjutaan, mutta seuraavassa kappaleessa kuvion vastinosat määritellään kuitenkin juuri päällekkäin asettelun avulla. Kolmioiden yhtenevyyslauseet esitetään ja niiden sovelluksena todistetaan mm. edellä mainittu tasakylkisen kolmion kantakulmalause. Matematiikan taidon todistusesimerkit on varustettu eräänlaisin todistuksen rakennetta osoittavin kulkukaaviokuvioin. Lukijalle ei heti selviä, miksi kuvion laatikkojen sisältämät relaatiot on toisinaan varustettu kysymysmerkein. Luku ei aivan radikaalisti poikkea perinteisestä deduktiivisesta geometrian käsittelystä.

Kirjan neljäs luku käsittelee yhdenmuotoisuutta. Yhdenmuotoisuus määritellään monikulmioille: vaatimus on vastinsivujen verrannollisuus ja vastinkulmien yhtäsuuruus. Yhdenmuotoisuus laajennetaan erikseen koskemaan ympyrää – koska ympyrä on monikulmion rajatapaus. Kolmioiden yhdenmuotoisuuslauseet luetellaan kaikki ja niiden sisältö osoitetaan kuvioiden avulla. Merkillisiä pisteitä koskevia lauseita todistetaan. Korkeusjanoja koskeva lykätään kuinekin analyyttisen geometrian kurssiin.

Luku vinokulmaisen kolmion trigonometriasta alkaa suunnatun kulman määritelmällä ja esittää sinin ja kosinin määritelmän koordinaatistoympyrän avulla negatiivisillekin kulmille. Useampia kierroksia origon ympäri ei kuitenkaan tehdä. Sinilauseelle esitetään myös täydennys, joka koskee kolmion ympäri piirretyn ympyrän sädettä.

Viimeisen luvun aiheena on avaruusgeometria. Tason normaalisuora määritellään tason kaikkia suoria vastaan kohtisuorana. Monitahokkaisiin liittyviä käsitteitä esitellään verrattain seikkaperäisesti. Särmiöt ja pyramidit esitellään monitahokkaina, ei lieriöinä tai kartioina. Lieriön ja kartion määritelmässä liikutellaan suoraa pitkin käyrää, ehkä hiukan täsmällisemmin kuvattuna kuin Laudaturissa tai Calculuksessa. Lukuun kuuluu tietysti erinäisten mittalukukaavojen esittely. Myös yhdenmuotoisuutta kolmessa ulottuvuudessa sivutaan, tilavuuksien suhteen kaavan perustelemiseksi.

Samoin kuin Laudatur, Matematiikan taito päättää esityksen kertaukseen. Se on tiivis, vain kuusisivuinen, eikä sisällä laskettuja esimerkkejä. Matematiikan taidon erikoisuus on pieni suomalais-englantilainen sanakirja. Vaikkapa internetistä lisätietoa hakevalle saattaisi englantilais-suomalaisesta sanastosta olla enemmän iloa. Sanastossa on sanoja, joita ei kirjassa esiinny, kuten homotetia.

Matematiikan taito on kirjoista selvästi kunnianhimoisin. Se tavoittelee selvästi ”vanhan hyvän ajan” oppikirjan ilmettä. Opetussuunnitelma ja aikakehys eivät oikein anna tätä tavoitetta saavuttaa. Ainakin minusta Matematiikan taito oli vertailtavista kirjoista miellyttävin lukea.

Pitkä matematiikka

Pitkä matematiikka on typografisesti melko konstailematon. Turhia kuvia ei ole, mutta ruskeankeltaisen vihertävää ja liukusävytettyä pohjaväriä käytetään runsaasti. Laskuesimerkit esitetään useimmiten välimerkittömällä taulutekniikalla, mutta muutama suomenkielen mukaisesti esitetty esimerkki on päässyt mukaan. Laskutehtävien algebra esitetään tuskastuttavakin seikkaperäisesti: jopa saman symbolin supistaminen jakolaskussa on erikseen osoitettu värillisin päällepainantein. Harjoitustehtäviä on 478. Ne on luokiteltu kahteen tasoon ”perustehtäviä” ja ”perustehtäviä ja vaativampia tehtäviä”. Myös perusteluja kysyviin tehtäviin annetaan ainakin vihjeitä vastausluettelossa. Myös numeeristen tehtävien ratkaisuihin annetaan ohjeita, toisin kuin muissa kirjoissa. Pitkä matematiikka pelaa avoimin kortein: heti alkuun on kopioitu Lukion opetussuunnitelman perusteista kurssin kannalta relevantit osat.

Kirjan ainesta ei ole muiden vertailtavien teosten tavoin kirjattu numeroituihin lukuihin. Sisällysluettelossa on 18 asiaotsikkoa. Pitkä matematiikka tukeutuu muita kirjoja selvemmin perusopetuksessa saatuun oppiin. Niinpä se käy suoraan käsitteeseen kulma, ilman pisteen, suoran, aksiomatiikan tai muun taustan esittelyä. Yhtenevyydelle Pitkä matematiikka ei uhraa sanaakaan. Yhdenmuotoisuuden määritelmä perustetaan suoraan yhdenmuotoisuuskuvauksiin, siirtoon, kiertoon, suurentamiseen, pienentämiseen tai peilaamiseen. Mitä nämä taas ovat, jätetään kertomatta! Vastinosien määritteleminen on joka tapauksessa nyt yksinkertaista. Kolmioiden yhdenmuotoisuudesta mainitaan ”kk”-kriteeri. Yhdenmuotoisten kuvien alojen suhde perustellaan kuvioiden tyhjentämisellä suorakaiteiden avulla.

Suorakulmaisen kolmion trigonometriajakson alussa otetaan huomioon sinin, kosinin ja tangentin hyvän määrittelyn vaatima yhdenmuotoisuus. Pitkä matematiikka antaa monin paikoin alaviitteissä varsinaista tekstiä täydentävää tietoa. Pitkän matematiikan lukija on kuvitelluista kirjankäyttäjistä ainoa, joka saa tietää, että on olemassa myös trigonometriset funktiot sekantti ja kosekantti. Sinin ja kosinin määritelmä laajennetaan tylppiä kulmia koskevaksi. Tässä ja muissakin yhteyksissä Pitkä matematiikka opastaa lyhyesti laskimen oikeaan käyttöön. Sinilause ja kosinilause saavat kumpikin omat kappaleensa. Ainoana vertailun kirjoista Pitkä matematiikka perustelee sinilauseen laskemalla kolmion korkeusjanan kahdella tavalla – muut kirjat laskevat kolmion alaa, mikä on jonkin verran kerroksellisempi päättelyn tapa.

Ympyrän geometriaa käsitellään Ympyrä-, Ympyrän tangentti- ja Kehäkulma-nimisissä jaksoissa. Tangentin ominaisuudet esitetään ilmoitusasioina, mutta kehäkulmalauseelle esitetään todistus. Tasakylkisen kolmion kantakulmalausetta käytetään luonnollisesti hyväksi ilman, että asiaan kiinnitettäisiin huomiota. Lausetta ei sinänsä kirjassa olekaan.

Avaruusgeometrian osuus ei sisällä yleisiä pohdiskeluja tasoista ja suorista, vaan alkaa suoraan suorakulmaisen särmiön käsittelyllä. Tasoista ja suorista ja niihin liittyvistä kulmista on kuitenkin esitys otsikon Kulma avaruudessa alla myöhemmin. Pallosta esitetään sekä mittalukuja että maantieteellinen tulkinta. Lieriö ja kartio muodostetaan käyrää pitkin liikkuvan suoran avulla, prismat ja pyramidit erikoistapauksina. Kirjan päättää tyylikkäästi – niin kuin Eukleideen Alkeetkin – katsaus säännöllisiin monitahokkaisiin. Pitkässä matematiikassa tämä tapahtuu viimeisessä harjoitustehtävässä. Laudaturin tapaan Pitkä matematiikkakin tiivistää sanottavansa 20-sivuiseen kertausosastoon, jossa on myös lisää laskettuja esimerkkejä.

Pitkän matematiikan lopussa on vielä aukeaman mittainen sanasto, jossa on 38 hakusanaa.

Pitkä matematiikka ei ole geometrian esittelyssään erityisen kunnianhimoinen. Kirjaa lukee kuitenkin luottavaisin mielin: se vaikuttaa ammattitaitoisesti tehdyltä.

Pyramidi

Pyramidi on värikäs. Tekstiä korostetaan sekä keltaisin että kevyesti vihertävänharmain pohjin, lukujen numerot ovat valkoisia karmiinilla pohjalla ja kuvioissa on eri värejä. Kirjassa on vielä aika suurikokoisiakin mustavalkoisia karikatyyrinomaisia piirroksia ja yksi ei kovin tiukasti asiaan liittyvä värivalokuva, yhden kirjan tekijän Thaimaan-matkalta kameraan jäänyt. Harjoitustehtäviä on 331, mikä on vertailun kirjojen pienin määrä. Vain numeeriset vastaukset on esitetty vastausluettelossa. Pyramidi esittää laskuesimerkit "taulutekniikalla", laskujen algebralliset välivaiheet tarkkaan läpikäyden.

Kirja alkaa lyhyellä historiallisella johdannolla, jossa mainitaan antiikin kolme vaikeaa konstruktio-ongelmaa. Varsinainen asia esitetään kymmenessä luvussa, jotka on vielä jaettu yleisotsikoiden Tasogeometria ja Avaruusgeometria alle. Ensimmäisessä Tasogeometrian peruskäsitteitä -luvussa on omana osastonaan janan jakosuhteen käsittely. Luvussa Monikulmiot esitetään mm. lauseke n-kulmion lävistäjien lukumäärälle ja toisaalta peruspinta-alakaavat sekä kolmion merkillisten pisteiden ja suunnikkaiden faktat ilman todistuksia.

Ympyrää käsittelevä luku motivoi asiaa yllättävästi taitoluistelijan pakollisten kuvioiden kautta. Heti päästään kuitenkin nimityksiin ja laskukaavoihin. Kehäkulmalause seurauksineen esitetään todistuksetta. Sen sijaan Hippokrateen puolikuiden ominaisuus todistetaan.

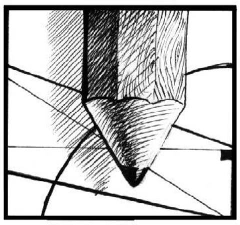
Yhtenevyyttä ja yhdenmuotoisuutta käsitellään samassa luvussa. Yhtenevyys määritellään samanlaisella nostetaan itseä hiuksista -tempulla kuin yhdenmuotoisuus Pitkässä matematiikassa: "Kuviot K ja K' ovat yhtenevät, kun kuviosta K saadaan kuvio K' yhdellä tai useammalla yhtenevyyskuvauksella (siirto, kierto ja peilaus)". Kolmioiden yhtenevyyteen riittävät kuitenkin yhtenevyyskriteerit, jotka esitetään huolellisesti. Yhtenevyyslauseiden seurauksista todistetaan muutamia esimerkkeinä. Näiden joukossa on myös tasakylkisen kolmion kantakulmalause. Yhdenmuotoisuuden määritelmä perustetaan vastaavasti yhdenmuotoisuuskuvauksiin. kolmioiden yhdenmuotoisuuslauseet esitellään kaikki. Ja vaikka tasogeometrian otsikon alla mennään, ilmoitetaan myös yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuussuhdekerroin.

Luku Kolmion ratkaiseminen alkaa Pythagoraan lauseesta ja tuo kolme trigonometrista funktiota suorakulmaisen kolmion avulla, ilman varoittelua yhdenmuotoisuuden tarpeesta. Trigonometriset funktiot tulevat Pyramidissa vastaan huomattavasti myöhemmin kuin muissa kirjoissa. Pyramidi ei myöskään näe vaivaa fuktioiden arvojen laajentamiseksi tylpille kulmille. Kaavat $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ ja $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ annetaan ilmoitusasioina. Kirja ei käytä termiä muistikolmio. Muista kirjoista poiketen Pyramidi esittelee ensin kosinilauseen ja vasta sitten sinilauseen.

Avaruusgeometriaosuus alkaa tasojen ja suorien suhteiden tarkastelulla ja siirtyy kohta monitahokkaisiin ja Platonin kappaleisiin. Lieriö ja kartio määritellään melko selkeästi, mutta samalla tavalla suoraa liikuttaen kuin muissakin kirjoissa. Prismat käsitellään lieriöinä ja pyramidit kartioina. Pallon esittely on lyhyt ja asiallinen.

Varsinaisen tekstin jälkeen Pyramidissa on 30 sivun mittainen Lisätietoa-osasto. Se alkaa epäeuklidisen geometrian esittelyllä ja Beltramin ja Kleinin mallin kuvailulla. Sitten seuraakin katsaus piirtämiseen harpilla ja viivoittimella, pinta-alan tarkempi käsittely, ympyränmitannon perustelua ympyrän sisään piirretyn monikulmion sivun pituuden laskemisen kautta. Yhtenevyys- ja yhdenmuotoisuuskuvaukset esitellään ja kolmioiden yhtenevyyslauseet perustellaan niiden avulla. Ongelmaa, joka syntyy siitä, että yhtenevyyskuvausten määrittely – jos se halutaan osaksi geometrian järjestelmää – vaatii yhtenevyyslauseisiin perustuvaa tietoa, ei kuitenkaan pohdita. Monikulmion kulmien summalauseelle esitetään varsin hieno, yleisen monikulmion tapaukseen käyvä todistus. Kolmion merkillisiä pisteitä koskevat lauseet todistetaan samoin kuin kehäkulmalause. Avaruusgeometrian puolelta todistetaan vielä tason normaalisuoraa koskeva peruslause.

Liiteosa tekee Pyramidista kaksijakoisen. Varsinainen tekstiosa on samaan tapaan kuin Calculus, Pitkä matematiikka tai Laudatur laskennollisesti orientoitunut, mutta loppuosa kertoo geometriassa olevan matematiikkaakin, ja paljon.



Hauskoja aivopähkinöitä lapsille ja nuorille

Pavel Shmakov
matematiikan kerhon vetäjä
Pukinmäen peruskoulu, Helsinki
shpavel@luukku.com

Liudmila Selikhova
liudmila.selikhova@netti.fi

Tieteen Kuvalehden ”Aivotreeni” tarjoaa innokkaille ja kiinnostuneille aikuisille viihtyisiä hetkiä esittämällä erilaisia hauskoja aivopähkinöitä ratkaistavaksi. Jotkut avaavat MTV3:n internetsivut tai Helsingin Sanomat -lehden ratkaistakseen shakkitehtäviä tai pelatakseen shakkia muiden ihmisten kanssa. Monella työuran ja -paikan valinnan keskeinen peruste on työn kokeminen miellyttäväksi ja mielekkääksi. Hyvässä työssä on iloisia luovia hetkiä päivittäin. Sen sijaan lasten tavallinen koulupäivä saattaa olla ikävän harmaa.

Valitettavasti suomalaiset oppilaat eivät kuulu siihen oppilasjoukkoon, joka pitää paljon koulusta. Tämän suuntaisia tuloksia on tullut ilmi Maailman terveysjärjestön tutkimuksessa, joka julkaistiin toissa vuonna. Euroopan maiden oppilaista suomalaiset oppilaat pitivät vähiten koulunkäynnistä! Kysely tehtiin 29:ssä Euroopan maassa ja myös USA:ssa ja Kanadassa. Esimerkiksi 11-vuotiaista suomalaisoppilaista vain 8 % piti koulusta, mutta samaan aikaan Euroopassa keskimäärin 30 % samanikäisistä oppilaista ilmoitti pitävänsä koulusta. Lisäksi Suomessa noin 50 % pojista ei pidä koulusta. Euroopassa vastaava lukumäärä on 28 %.

Mitä on mahdollista tehdä, jotta oppilaat voisivat hyvin koulupäivän jälkeen? Oppilaat on saatava innostumaan oppiaineista. Onko mahdollista, että koulun jälkeen lapsi harrastaisi fysiikkaa tai matematiikkaa? Onko se niin outo ajatus tanssin tai musiikin harrastamiseen verrattuna? Suomalaiset lapset ovat tottuneet siihen, että matematiikan tunnilla on paljon hyödyllisiä asioita. Kiinnostusta tai innostusta tietynlaisiin oppiaineisiin voisi herättää monilla eri tavoilla. Miten tätä suuntausta kehitetään?

Syksyllä 2005 *Pavel Shmakov* yhteistyössä FT *Nikolai Zimakovin* kanssa kirjoitti matematiikan kerhon ohjelman. Siihen on kerätty sekä omia ajatuksia ja tehtäviä että tehtäviä erilaisista kirjoista. Kerho-ohjelma on koostunut sekä tehtävistä ja ongelmista että oppimispeleistä. On tärkeää muodostaa toiminta niin, että lapset ymmärtävät ja tuntevat kaunista ja hauskaa matematiikkaa. Tehtävien valinta perustuu siihen, että niiden teksti on vitsin omainen tai pieni hauska tarina.

– Kolme etanaa ryömii peräkkäin pylvästä pitkin.
– ”Minun takanani ryömii kaksi etanaa”, sanoo ensimmäinen etana.
– ”Minun edessäni ryömii yksi etana ja minun takanani ryömii yksi etana”, sanoo toinen etana.
– ”Minun edessäni on kaksi etanaa ja minun takanani on yksi etana”, sanoo kolmas etana.
Miten tämä on mahdollista?

Ensimmäisestä väitteestä voi ymmärtää, että on olemassa kolme etanaa. Mutta, kolmannen väitteen mukaan, on olemassa neljä etanaa. Tästä syntyy kaksi loogista vaihtoehtoista johtopäätöstä.

– Neljäs väite on väärin. Toisin sanoen, kolmas etana valehtelee!

– Tai ensimmäinen väite on epätäydellinen! Kolme etanaa ryömii. Ja vielä yksi etana on olemassa pylväällä. Se ei ryömi. Tehtävän ensimmäisessä väitteessä on kerrottu vain kolmesta etanasta. Yhteensä niitä on neljä!

Matematiikassa on paljon mielenkiintoisia ja mieltä kiehtovia asioita. Tässä tapauksessa syntyy halu tietää heti: ”Mitä tapahtuu sitten?, Mitä pitää tehdä vastauksen saamiseksi?”

Marraskuun alusta Pukinmäen peruskoulussa Helsingissä aloitettiin matematiikan kerhotoiminta 7.- ja 8.-luokkalaisille. Kerhokerta kestää noin kaksi tuntia, ja oppilaat harrastavat matematiikkaa noin puolitoista tuntia. Kerhotunnin aikana oppilaita kehotetaan ratkaisemaan helppoja, mutta hauskoja ja mielenkiintoisia matematiikan tehtäviä. Esim.: ”Miten voi tehdä paperiliuskasta sellaisen reiän, josta ihminen mahtuu läpi?” Kun etevimmät oppilaat ratkaisevat omia tehtäviään, mutta toiset ovat jo väsyneitä, ohjaaja ehdottaa teen valmistamista ja juomista. Teen juomiseen osallistuu myös ohjaaja. Sellaista muotoa käytetään myös aikuisten tapaamisissa. Hyvin järjestetty kahvitauko tiedekonferenssissa auttaa osallistujia tutustumaan toisiinsa ja ymmärtämään toisiaan paremmin. Yhteinen teen juominen on lisäksi mielenkiintoista sen takia, että se ei ole Suomen kouluissa tavallista. Kerhotoiminnassa teen juonnilla on tarkoitus. On otettava huomioon että, oppilaat oma-aloitteisesti liittyvät kerhotoimintaan ja jatkavat harrastusta eri syiden takia.

Aiemmin on jo puhuttu niistä keinosta, joilla oppilaat saadaan aloittamaan harrastus. Mutta millä keinoilla kiinnostusta voidaan ylläpitää? Yksi vaihtoehto on, että kerhotunnin aikana säilytetään luova ja informaali ilmapiiri. Lopussa ohjaaja keskustelee oppilaidensa kanssa mielenkiintoisista matematiikan asioista: matematiikan historiasta, tärkeistä kohdista, yleisistä ongelmista, esim. Fermat'n teoreemasta. Halukkaat saavat kotiin vietäväksi matematiikan hauskoja tarinoita.

Pikku hiljaa osallistujien määrä on kasvanut. Nyt kerhoon osallistuu hiukan enemmän kuin kymmenen oppilasta. Jokainen, joka on tullut kerhoon yhden kerran, on tullut uudestaankin. Ei varmaan olisi yhtään hullumpi ajatus, että kaikki 7.- ja 8.-luokkalaiset tulisivat tutustumaan kerhotoimintaan. Emme halua, että kerhomme toimii vain suppeassa piirissä.

Ensimmäinen koeluontoinen matematiikan kilpailu järjestettiin varsinaisen oppitunnin aikana Pukinmäen peruskoulussa 12.4.2006. Kilpailun tavoite oli antaa lapsille uusi mukava vapaa-ajan viettotapa ja kehittää oppilaiden ajattelukykyä. Oppilaille annettiin ratkaistavaksi hauskoja matematiikan tehtäviä. Ratkaisut saattoivat yllättää, tuottaa uusia ajatuksia. Kilpailuun osallistui 189 oppilasta 7. ja 8. luokilta. Kilpailun kesto on 20 minuuttia. Esittelemme koetehtävät tässä antaaksemme lukijalle mahdollisuuden koetella omia hoksottimiaan.

1. Puoli puolesta $= 1/2$. Mikä luku? Perustele.

2. Tässä on kolme väärää lausetta.

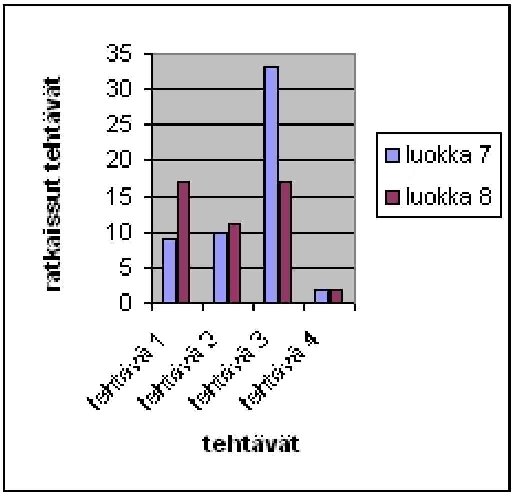
$$\begin{aligned} 2+2&=4\\ 3\cdot 6&=17\\ 8:4&=2\\ 13-6&=5\\ 5+4&=9 \end{aligned}$$

Näytä ympyröimällä, missä ne ovat.

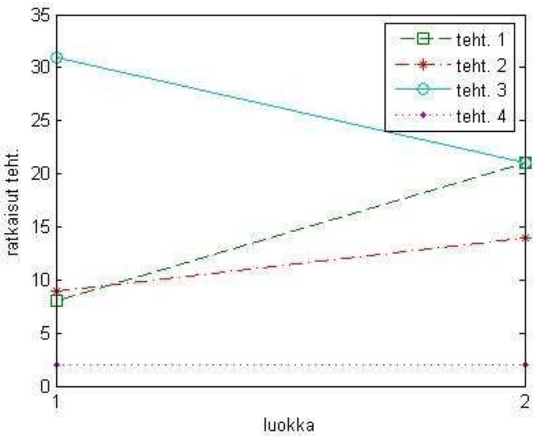
3. Neljä miestä söi neljän tunnin aikana neljä vesimelonia. Kuinka monta vesimelonia syö kahdeksan miestä viiden tunnin aikana?

4. Kahdessa lompakossa on yhteensä kaksi kolikkoa niin, että ensimmäisessä lompakossa kolikkojen määrä on kaksinkertainen toisen lompakon kolikkojen määrään verrattuna. Miten tämä on mahdollista? Perustele.

Kaikki tehtävät ovat erityyppisiä. Ensimmäinen tehtävä kuuluu tyyppiin, jossa määritelmän tiedoista uupuu jotakin, nimenomaan x. ($x/4 = 1/2$, $x = 2$). Kolmas tehtävä on sanallinen, ja monet oppilaat ovat ratkaisseet sen. Näin iso oppilaiden määrä voi johtua siitä, että sen tyyppiset tehtävät ovat oppilaille tuttuja. Jotta voisi ratkaista toisen ja neljännen, pitäisi ajatella vähän toisella tavalla, eli ratkaisun saavuttamistapa ei ole tavallinen. Toisessa tehtävässä pitäisi ymmärtää, että myös ehto on otettava huomioon ja se voi olla väärin. Neljäs tehtävä vaatii enemmän hoksaavaisuutta. Tehtävien ratkaisu on odottamaton. Pitäisi soveltaa uutta ajatuksenkulkua, niin että yksi osa voi olla toisen sisällä. Vain 4 oppilasta ratkaisi neljännen tehtävän.



Diagrammi 1.



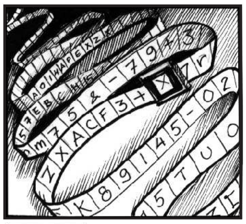
Diagrammi 2.

Diagrammi 1 esittää paremmin asiaharrastusten yhdenmukaisuuden 7.- ja 8.-luokkalaisilla.

Diagrammi 2 esittää paremmin 7.- ja 8.-luokkalaisten tulosten erilaisuuden. 4. tehtävän tulos on riippumaton luokka-asteesta. 1. ja 2. tehtävän tulokset kasvavat, koska oppilaiden logiikka ja algebran taito myös kehittyy. Sen sijaan erinäiset taidot heikkenevät (3. tehtävä). Verrantoa on opiskeltu 7. luokalla. Se unohdetaan 8:nnelle ehdittäessä.

Mitä kilpailun tulokset kertovat? Oikea matematiikka ei ole vain laskemista. Ongelmaratkaisuun käytetään vielä liian vähän aikaa. Koulussa pitäisi antaa enemmän opetusta, joka auttaisi matematiikan olemuksen oivaltamista. Kiinnostusta matematiikkaan ja oppilaiden ajattelukykyjä pitää kehittää.

Oppilaiden ratkaisemat tehtävät on lähetetty kotiin. Lasten ja vanhempien on ehkä mielenkiintoista keskustella tästä asiasta. Samanlaisia kilpailuja voitaisiin järjestää muissakin kouluissa lähitulevaisuudessa. Sen jälkeen voidaan analysoida enemmän menetelmämme tuloksia ja oppilaiden reaktioita.



Alabaman paradoksi

Pekka Alestalo
Teknillinen korkeakoulu

Kevään eduskuntavaalien jälkitunnelmissa heräsi jälleen keskustelu vaalipiireistä ja siitä, kuinka helppoa tai vaikeaa ehdokkaan on päästä läpi kustakin piiristä. Erityistä huomiota kiinnitti Vihreän liiton kohtalo Pohjois-Karjalan vaalipiirissä, jossa puolueen kannatus kasvoi edellisistä eduskuntavaaleista 5,1 %-yksikköä, mutta se menetti ainoan edustajansa. Tätä ei tietenkään voida laskea pelkästään "vaalimatematiikan" syyksi, sillä edellisten vaalien vaaliliiton sijasta puolue oli tällä kertaa yksinään.

Vaikka tämä kuuluisa vaalimatematiikka perustuu vain ala-asteella opittuihin laskutoimituksiin ja yksinkertaiseen prosenttilaskentaan, siihen liittyy ennalta arvaamattomia piirteitä. Tämän kirjoituksen tarkoituksena ei ole esittää kattavaa analyysiä erilaisista vaalijärjestelmistä, eikä edes Suomessa käytetystä d'Hondtin vaalitavasta. Yritän sen sijaan kuvailla, millaisia yllätyksiä liittyy jopa "alkeellisimpiin" vaalitapoihin. Vaalimatematiikan historiassa tämä tunnetaan nimellä Alabaman paradoksi, koska asia tuli esille kyseisen Yhdysvaltain osavaltion kohdalla yli sata vuotta sitten; katso 1. linkki kirjoituksen lopussa.

Ehdokkaiden kannatuksen sijasta tarkastellaan koko vaalipiirijaon keskeisintä kysymystä: Kuinka monta edustajapaikkaa kullekin vaalipiirille pitäisi antaa? Lähtökohtana on se, että ainoastaan vaalipiirin asukasluku voidaan ottaa näissä päätöksissä huomioon, sillä muuten järjestelmän demokraattisuutta voidaan pitää kyseenalaisena. Esimerkiksi Yhdysvaltain perustuslaissa sanotaan yksiselitteisesti, että edustajainhuoneen paikkamäärien täytyy olla verrannollisia osavaltioden asukaslukuihin.

Oletetaan, että maassa on viisi vaalipiiriä, joiden asukasmäärät ovat A = 9 061, B = 7 179, C = 5 259, D = 3 319 ja E = 1 182, jolloin koko maan asukasluvuksi saadaan tasan 26 000; nämä luvut ovat peräisin lopussa mainitusta artikkelista Balinski & Young, 1975. Tilanteen yksinkertaistamiseksi oletetaan vielä, että koko maasta valitaan 26 edustajaa, yksi kutakin 1 000 kansalaista kohti. Jos ryhdymme näiden lukujen perusteella miettimään paikkajakoa vaalipiirien kesken, niin tuntuu luonnolliselta laskea asukaslukuja vastaava suhteellinen paikkaluku kullekin vaalipiirille. Vaalipiirille A kuuluisi siis

$$\frac{9061}{26000} \cdot 26 = 9{,}061$$

paikkaa, ja muille 7,179, 5,259, 3,319, 1,182 paikkaa. Ongelmaksi muodostuu se, mitä tehdään tulosten murto-osille: edustajia ei voi jakaa edes kahtia, saati sitten tuhannesosiin! Murto-osat voitaisiin ehkä hyvittää muuttamalla vaalipiirin edustajien lukumäärää sopivassa kohdassa kesken vaalikautta, mutta tietääkseni näin ei ole missään tehty, vaan murto-osat on pyritty muuntamaan kokonaisiksi paikoiksi tietyille vaalipiireille.

Eräs suoraviivainen tapa on pyöristää kaikki paikat ensin alaspäin, ja jakaa jäljellä olevat paikat suurimman desimaaliosan mukaisessa järjestyksessä. Esimerkissämme saadaan pyöristyksen jälkeen paikkamäärät 9, 7, 5, 3 ja 1, jolloin yksi paikka jää jäljelle. Se annetaan siis vaalipiirille D, jonka desimaaliosa 0,319 on suurin. Näin kaikki paikat saadaan jaettua. Tämä menetelmä on peräisin Yhdysvaltain historiasta tutulta Alexander Hamiltonilta, ja se kantaa hänen nimeään.

Millaisia ominaisuuksia Hamiltonin menetelmällä on? Ensimmäinen havainto on se, että jokaisen vaalipiirin lopullinen paikkamäärä saadaan pyöristämällä suhteellinen paikkaluku joko alas- tai ylöspäin lähimpään kokonaislukuun, sillä kukin vaalipiiri voi saada korkeintaan yhden lisäpaikan desimaalikilpailussa.

Tehtävä 1. Perustele tämä väite osoittamalla, että ylimääräisiä paikkoja jää aina vaalipiirien lukumäärää vähemmän.

Muita ominaisuuksia tutkittaessa yksi luonnollinen ehto voisi olla seuraava: jos väkiluvut pysyvät samoina, mutta edustajien yhteismäärää kasvatetaan, niin minkään vaalipiirin paikkamäärä ei saa pienentyä. Matematiikko voisi sanoa, että menetelmä on kasvava paikkojen yhteismäärän suhteen, muttei kuitenkaan aidosti kasvava. Huolimattomasti ajatellen tämä ominaisuus näyttäisi olevan voimassa, mutta tarkempi miettiminen paljastaa ongelman: jos desimaalilukuja kerrotaan keskenään, niin tuloksen desimaaliosaan vaikuttavat desimaaliosien lisäksi myös kokonaisosat. Tämä ilmenee esimerkiksi laskussa

$$2{,}1 \cdot 3{,}2 = 6 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}2.$$

Varsinaisessa esimerkissämme sama ilmiö esiintyy, kun verrataan vaalipiirejä B ja D, ja koko maan paikkamäärää kasvatetaan luvusta 26 lukuun 27:

$$\text{B: } \frac{7179}{26000} \cdot 27 \approx 7{,}455; \quad \text{D: } \frac{3319}{26000} \cdot 27 \approx 3{,}447.$$

Käytännössä siis vaalipiiri B vie vaalipiiriltä D desimaalikilpailun tuoman paikan, sillä kaikki kokonaisosat pysyvät samoina!

Tehtävä 2. Laske kaikkien vaalipiirien luvut ja tarkista, että näin todella käy.

Tulos on yllättävä: Hamiltonin menetelmä ei olekaan kasvava koko maasta valittavien edustajien määrän suhteen. Toisaalta koko maan edustajien lukumäärää ei ole tapana vaihtaa kovin usein, joten voisi ajatella, ettei ongelma ole kovin vakava. Se herättää kuitenkin seuraavan kysymyksen:

Onko olemassa menetelmää, joka toteuttaisi seuraavat kaksi ehtoa:

- Suhteelliset paikkamäärät pyöristetään joko alas- tai ylöspäin seuraavaan kokonaislukuun.
- Jos asukasluvut pysyvät samoina ja koko maan paikkamäärää kasvatetaan, niin yhdenkään vaalipiirin paikkamäärä ei vähene.

Lisäksi paikkajako pitäisi suorittaa jollakin etukäteen päätetyllä menetelmällä (algoritmilla). Hamiltonin menetelmä rikkoo jälkimmäistä sääntöä, ja – niin uskomattomalta kuin se kuulostaakin – voidaan osoittaa, ettei ole olemassa sellaista menetelmää, joka toteuttaisi molemmat ehdot!

Kuten alussa totesin, en ryhdy vertailemaan Hamiltonin menetelmän korvanneita muita tapoja. Historiallisena yksityiskohtana voidaan kuitenkin mainita, että siirtyminen Hamiltonin menetelmästä ns. Jeffersonin menetelmään aiheutti Yhdysvaltain v. 1876 presidentinvaaleissa sen, ettei valituksi tullutkaan koko maassa neljännesmiljoonan äänen marginaalilla suosituin Samuel Tilden, vaan valitsijamiesten vaalipiirijaon perusteella voittanut Rutherford B. Hayes.

Alla mainittujen linkkien ja kirjallisuusviitteiden avulla asiasta kiinnostuneet voivat tutustua yleisesti käytössä oleviin menetelmiin, joissa ym. ongelmien lisäksi vaalipiirin asukasluvun kasvaminen pienentää sen saamaa paikkamäärää, tai puolueen saamat lisä-äänet vähentävät sen edustajien määrää. Viimeisenä mainittussa Hoffmanin kirjassa aihetta käsitellään hyvin yleistajuisesti.

Linkkejä:

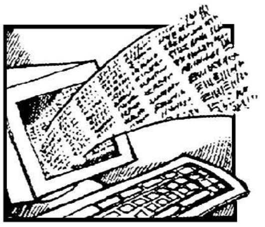
http://www.ctl.ua.edu/math103/apportionment/paradoxs.htm
http://www.ams.org/featurecolumn/archive/apportion1.html
http://www.ams.org/featurecolumn/archive/apportionII1.html
http://www.wahlrecht.de/
http://www.uusikaupunki.fi/~olsalmi/vaalit/vaalimat.html
http://de.wikipedia.org/wiki/Unmöglichkeitssatz_von_Balinski_und_Young

Kirjallisuutta:

Michel Balinski, H. Peyton Young: The Quota Method of Apportionment. American Mathematical Monthly 82, 701–30, 1975.

Michel Balinski, H. Peyton Young: Fair representation: meeting the ideal of one man, one vote. Brookings Institution Press, 2. painos, 2001.

Paul Hoffman: Archimedes' Revenge. Penguin Books, 1988.



Minne katosi matematiikka?

Juha Haataja

Usein unohdetaan, että matematiikan osaaminen on kynnyskysymys yhteiskunnan toimintakyvylle. Tarkemmin ajatellen matematiikkaa tarvitaan kaikkialla.

Tietokoneen toiminta perustuu matemaattisille periaatteille prosessoritasolta käyttöliittymään saakka. Tiedon siirto ja esimerkiksi videokuvien esittäminen perustuvat matemaattisille algoritmeille. Ja tiedon salauksessa käytetään pitkälle kehitettyjä lukuteorian ja muiden tutkimusalueiden tuloksia, esimerkiksi elliptisten käyrien teoriaa.

Kun koneeni ottaa yhteyttä langattomaan tukiasemaan, saavat Maxwellin yhtälöt ja Shannonin informaatioteoria homman pelaamaan. Ja kun haen tietoyhteiskuntastrategian PDF-versiosta sanaa "matematiikka", käytän hyväkseni matematiikkaa.

Tietoyhteiskuntastrategiasta 2007–2015 puheenollen voi mainita, että raportista löytyy yksi maininta matematiikasta. Sitä saa etsimällä etsiä. Kyseisessä kohdassa puhutaan Suomen menestyksestä OECD:n Pisa-tutkimuksessa. Mutta miksi raportissa ei kerrota lukijalle, että matematiikan osaaminen on kynnyskysymys tietoyhteiskunnan toimintakyvylle?

Tietoteknisten oivallusten kehittäminen vaatii matemaattista ajattelukykyä. Matematiikka rakentaa sillan reaalimaailman ilmiöistä ja prosesseista tietokoneiden virtuaalimaailmaan.

Tieteellisessä tutkimuksessa ja yritysten tuotekehityksessä käytetään hyväksi laskennallista tiedettä, siis simulointia ja mallintamista, missä matematiikan avulla kuvataan todellisuuden luonnetta. Tutkimus tarvitsee laskennallisen tieteen välineistöä kyetäkseen vastaamaan haasteisiin.

Matematiikan osaamista tarvitaan kännyköiden, paperikoneiden ja lääkkeiden suunnittelussa. Nanotieteessä kuvataan atomit ja molekyylirakenteet matemaattisella formalismilla. Bioinformatiikassa matematiikka kytkee geenien symbolit ja niiden biologisen merkityksen toisiinsa.

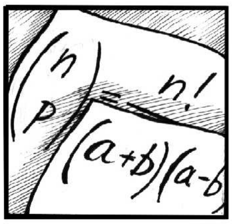
Usein kehutaan tietotekniikka-alan suuryritysten työllistävästä vaikutuksesta, mutta ei puhuta pienistä oivalluksista, jotka kyseenalaistavat isojen aseman. Esimerkkejä pienten ideoiden mullistavasta vaikutuksesta tarjoavat Google, Wikipedia ja Youtube.

Jos haluamme elää tietoyhteiskunnassa, tarvitsemme ihmisiä jotka kykenevät ymmärtämään maailmaa. Tätä ymmärrystä ei saavuteta ilman matematiikkaa.

Vankimielisairaalan ylilääkäri *Hannu Lauerma* kirjoittaa teoksessaan "Usko, toivo ja huijaus" (Duodecim, 2006) seuraavasti: "Kriittinen ajattelu edellyttää kykyä ymmärtää numeerisia käsittelytapoja ja niihin pohjaavaa todennäköisyyslaskentaa."

Järjen (ja matematiikan) käyttöä pitäisi suosia tietoyhteiskunnassa.

Kirjoittaja työskentelee tiedetuen johtajana Tieteen tietotekniikan keskuksessa CSC:ssä. Kirjoitus on muokattu Tietoyhteys-lehdessä ilmestyneestä kolumnista.



Matematiikkapäivä lukiolaisille ja opettajille – ”Satunnaisuus ja todennäköisyys”

Riitta Liira
Maunulan yhteiskoulu
Helsingin matematiikkalukio

Elja Arjas, Jukka Kohonen ja Matti Pirinen
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Matematiikkapäivä Maunulassa 14.4.2007

Matematiikkapäivän järjestivät Maunulan yhteiskoulun opettajat ja Marjatta Näätänen Helsingin yliopistosta, ilmoittautumiset ja informaation hoiti LUMA-keskus. Rahoitus saatiin LUMA-keskukselta ja Maunulan yhteiskoululta. Päivään osallistui lukion oppilaita Munkkiniemen yhteiskoulusta, Olarin lukiosta, Ressun lukiosta ja Maunulan yhteiskoulusta ja Helsingin matematiikkalukiosta.

Matematiikkapäivänä joukko nuoria matikisteja kokoontui Maunulan yhteiskouluun ratkomaan todennäköisyyslaskennan probleemoja. Aluksi Helsingin yliopiston professori Elja Arjas luennoi aiheesta ”satunnaisuus ja todennäköisyys”. Sen jälkeen koululaiset sovelsivat oppimaansa laskuharjoituksissa, joita ohjasivat tohtoriopiskelijat Matti Pirinen ja Jukka Kohonen. Lisäksi Matti ja Jukka kertoivat väitöskirjatöistään, joissa todennäköisyysmalleilla on keskeinen osuus. Näin saatiin aavistus todennäköisyyslaskennan käytöstä nykyaikaisessa biologisessa tutkimuksessa. Seuraavassa muutamia osallistujien kommentteja.

”Oli hienoa tavata samanhenkisiä matematiikasta kiinnostuneita nuoria.”

”Päivän anti oli kiinnostava ja innostava.”

”Maunula tarjosi hyvää ruokaa.”

Harjoitustehtäviä

1. Erään mikrobin genomin sekvenssissä esiintyy neljää emästä frekvensseillä $p_G = p_C = 0{,}3$ ja $p_A = p_T = 0{,}2$. Seuraavassa tarkastellaan kahden emäksen muodostamia ”sanoja”, joissa emästen oletetaan esiintyvän toisistaan riippumatta.

a) Esitä näihin sanoihin liittyvät todennäköisyydet taulukkomuodossa.

b) Emäkset A ja G ovat puriineja ja emäkset C ja T pyrimidiinejä. Olkoon E tapahtuma ”sanan ensimmäinen emäs on pyrimidiini” ja F tapahtuma ”sanan toinen emäs on A, C tai T”. Määritä todennäköisyydet $P(E)$, $P(F)$, $P(E \cup F)$, $P(E \cap F)$.

c) Olkoon $G = \{CA, CC\}$. Määritä silloin todennäköisyydet $P(G \,|\, E)$, $P(F \,|\, G \cup E)$ ja $P(F \cup G \,|\, E)$.

2. Kyläkaupan kahdesta pysäköintipaikasta kumpikin on keskimäärin 40 minuuttia tunnista varattuna ja loput ajasta vapaana. Keskimäärin 32 minuuttia tunnista ovat molemmat pysäköintipaikat yhtaikaa varattuina. Kaupalle saapuu samalla hetkellä kaksi autoilijaa. Mikä on todennäköisyys, että molemmat pääsevät heti näihin pysäköintipaikkoihin? (Ylioppilastehtävä, kevät 98)

3. Koulusta myöhästynyt oppilas myöhästyy seuraavankin koulupäivänä 30 prosentin todennäköisyydellä. Jos oppilas on tullut ajoissa kouluun, hän myöhästyy seuraavana koulupäivänä 10 prosentin todennäköisyydellä. Kuinka suuri on todennäköisyys, että oppilas tulee keskiviikkona ajoissa kouluun, jos hän saman viikon maanantaina myöhästyi koulusta? (Ylioppilastehtävä, kevät 92)

4. Punavihersokeuden aiheuttaa yksi X-kromosomissa sijaitseva geeni. Punavihersokeus määräytyy genotyypistä resessiivisesti, joten punavihersokean naisen molemmissa X-kromosomeissa on oltava punavihersokeuden aiheuttava geenivariantti eli alleeli. Miehellä punavihersokeuteen sen sijaan riittää yksi tällainen alleeli, koska Y-kromosomissa ei ole sille vastinalleelia. Millä todennäköisyydellä perheeseen syntyvä lapsi on punavihersokea, jos

a) molemmat vanhemmat ovat punavihersokeita?

b) isä ei ole punavihersokea, ja äiti on punavihersokeuden aiheuttavan alleelin kantaja, ts. vain toisessa hänen X-kromosomeistaan on punavihersokeuden alleeli?

5. Hatussa on pallo, joka on joko musta tai valkoinen (yhtä suurella todennäköisyydellä kumpaakin). Hattuun laitetaan valkoinen pallo, jonka jälkeen sieltä nostetaan umpimähkään pallo, joka on valkoinen. Millä todennäköisyydellä hatussa oleva pallo on valkoinen?

6. Eräällä laboratoriotestillä pyritään turvallisuussyistä selvittämään sitä, ovatko verta luovuttamaan tulleet henkilöt mahdollisesti HIV-viruksen kantajia. Käytännössä tämä tapahtuu tutkimalla kaikkien verenluovuttajien osalta, sisältääkö veri HIV:n vasta-aineita. Oletamme testin herkkyyden olevan 0,997, ts. testitulos on positiivinen tällä todennäköisyydellä, jos luovuttajalla todella on veressään vasta-aineita. Toisaalta oletetaan, että testi antaa todennäköisyydellä 0,015 (väärän) positiivisen testituloksen silloinkin, kun vasta-aineita ei oikeasti ole. Oletamme, että HIV:n vasta-aineita on väestössä noin yhdellä tuhannesta ja että verenluovuttajat eivät ole valikoitu otos väestöstä. (Tämä oletus voi käytännössä olla hyvin epärealistinen!) Millä todennäköisyydellä positiivisen testituloksen saaneen henkilön veri sisältää oikeasti HIV:n vasta-aineita?

7. Naapuriin on muuttanut perhe, josta sinulle on kerrottu, että heillä on kaksi lasta. Tarkastele seuraavia tilanteita:

a) Haluat tutustua heihin hieman lähemmin ja soitat naapurin ovikelloa, jolloin avaamaan tulee noin kymmenvuotias poika, arvatenkin toinen perheen lapsista.

b) Talonmies, joka on nähnyt perheen molemmat lapset, kertoo sinulle hieman arvoituksellisesti, että ”ainakin toinen lapsista on poika”.

c) Vastaa kummassakin tapauksessa kysymykseen: Mikä on todennäköisyys, että molemmat perheen lapset ovat poikia? Oletamme tässä, että syntyvän lapsen sukupuoli määräytyy kullakin kerralla riippumattomasti ja että se on molemmille sukupuolille 1/2.

8. (”Monty Hallin ongelma”) Otat osaa viihdeohjelmaan. Edessäsi on kolme laatikkoa. Juontaja piilottaa yhteen laatikoista palkinnon (kaikki laatikot ovat tässä yhtä todennäköisiä). Pelin säännöt ovat seuraavat: Sinun tulee ensin valita yksi laatikoista. Sitä ei avata heti, vaan seuraavaksi juontaja avaa jommankumman muista laatikoista, valiten sen niin, että se on tyhjä. Jäljelle jää kaksi suljettua laatikkoa. Nyt saat avata jommankumman niistä. Kannattaako sinun avata

a) alunperin valitsemasi laatikko vai

b) toinen jäljellä oleva suljettu laatikko?

Mikä on todennäköisyytesi saada palkinto valinnoilla a ja b?

9. (”Monty Hallin ongelman muunnelma”) Edessäsi on kolme laatikkoa. Juontaja piilottaa yhteen laatikoista palkinnon (kaikki laatikot ovat tässä yhtä todennäköisiä). Sinun tulee ensin valita yksi laatikoista. Sitä ei avata heti, vaan juontaja avaa summamutikassa jommankumman muista laatikoista. Laatikko osoittautuu tyhjäksi. Kannattaako sinun nyt avata

a) alunperin valitsemasi laatikko vai

b) toinen jäljellä oleva suljettu laatikko?

Mitkä ovat voittotodennäköisyydet?

Vihjeitä ja vastauksia tehtäviin

1. b) $P(E) = 0{,}5$; $P(F) = 0{,}7$; $P(E \cup F) = 0{,}85$; $P(E \cap F) = 0{,}35$. c) $P(G \,|\, E) = 0{,}3$; $P(F \,|\, G \cup E) = 0{,}7$; $P(F \cup G \,|\, E) = 0{,}7$.

2. Merkitään A = "Paikka 1 varattu" ja B = "Paikka 2 varattu". Todennäköisyyksien yhteenlaskukaavalla saadaan laskettua $P(A \cup B)$. Mikä on tämän tapahtuman komplementti? (Vastaus 1/5.)

3. Jos merkitään M = "myöhässä" ja A = "ajoissa", niin $P(\text{ke} = A \,|\, \text{ma} = M) = P(\text{ke} = A \cap \text{ti} = A \,|\, \text{ma} = M) + P(\text{ke} = A \cap \text{ti} = M \,|\, \text{ma} = M)$. (Vastaus 84 %.)

4. a) 1. b) 1/4.

5. Pallojen väreille on kaksi mahdollisuutta: (v, v) tai (v, m), joissa ensimmäinen v viittaa alussa nähtyyn valkoiseen palloon. Ennen nostokoetta $P[(v, v)] = P[(v, m)] = 1/2$, mutta mitä on $P[(v, v) \,|\, \text{nostettu } v]$? Käytä Bayesin kaavaa! (Vastaus 2/3).

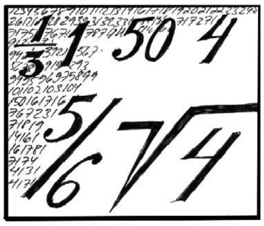
6. Jos T merkitsee tapahtumaa "positiivinen testitulos" ja H tapahtumaa "oikeasti HIV:n vasta-aineita", tehtävänä on laskea ehdollinen todennäköisyys $P(H \,|\, T)$. Käytä Bayesin kaavaa! (Vastaus: 6,2 %.)

7. Ongelmaa on käsitelty Wikipediassa http://en.wikipedia.org/wiki/Boy_or_Girl. (Vastaus: a) 1/2. b) 1/3.)

8.–9. Oikea ratkaisu selityksineen ja hiukan tehtävän värikästä historiaa löytyy mm. Wikipedia-sivulta http://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem. (Vastaus: 8a) 1/3 ja 8b) 2/3. 9a) 1/2 ja 9b) 1/2.)

Oppilaat kuuntelevat kiinnostuneina Elja Arjaksen luennointia satunnaisuudesta ja todennäköisyydestä.

Oppilaita tekemässä laskuharjoituksia Matti Pirisen ja Pekka Kontkasen (Munkkiniemen yhteiskoulun lukio) ohjauksessa.



Kalle Väisälän algebran oppikirja

Marjatta Näätänen
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Kalle Väisälän algebran oppi- ja esimerkkikirjalla johdatettiin monet suomalaiset vuosiluokat algebran maailmoihin, kirjasta ilmestyi vuonna 1963 jo 12. painos. Kirja on myös ekologinen malliesimerkki, kovakantisena se painaa n. 250 grammaa ja opiskeltavaa riitti vuosiksi.

Solmu on saanut sekä Väisälän perikunnalta että WSOY:ltä oikeuden julkaista kirjaa verkossa. Tässä lehdessä on esimerkinomaisesti kirjan harjoitustehtävistä 42 ensimmäistä, verkosta löytyy enemmän tehtäviä osoitteesta http://solmu.math.helsinki.fi.

Uudet ikäpolvet voivat nyt kokeilla taitojaan vanhempiensa ja isovanhempiensa oppikirjan haasteilla.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

I luku Rationaaliset luvut

Merkitsemistapoja — yhtälöitä

1. Jos 1 kg voita maksaa 4 mk, niin paljonko maksaa a) 3 kg b) k kg?

2. Jos 1 kg voita maksaa a kg, niin paljonko maksaa a) 3 kg b) k kg?

3. Jos p metriä kangasta maksaa a mk, niin paljonko maksaa 1 metri?

4. Jos suorakulmion vierekkäiset sivut ovat a cm ja b cm, niin kuinka suuri on ala A? Saatuun kaavaan on sitten sijoitettava $a = 7$ cm, $b = 9$ cm ja laskettava A.

5. Jos pyöräilijän nopeus on 16 km/t (kilometriä tunnissa), niin paljonko hän ajaa a) 3 tunnissa b) t tunnissa?

6. Jos pyöräilijän nopeus on v km/t, niin kuinka pitkä on se matka s, jonka hän ajaa t tunnissa? Näin saatuun s:n kaavaan on sitten sijoitettava $v = 13\frac{1}{2}$ ja $t = 2\frac{1}{3}$ ja laskettava s.

7. Paljonko on a) 4 % 120:stä b) 4 % luvusta a c) p % luvusta a?

8. Jos kauppias osti erään tavaran a mk:lla ja sai siitä myydessään voittoa p %, niin kunka suuri oli hänen myyntihintansa h? Saadun kaavan avulla on sitten laskettava myyntihinta, jos $a = 42$ ja $p = 7$.

9. Kuinka suureksi kasvaa k mk p %:n mukaan t vuodessa?

10. Kuinka voidaan kertolaskun vaihdantalaki ilmaista yhtälön avulla?

11. Kahden murtoluvun kertosääntö ilmaistava yhtälön avulla?

12. Lausuttava sanallisesti seuraavan yhtälön ilmaisema laskusääntö:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

13. Yhteenlaskun liitäntälaki voidaan ilmaista lyhyesti yhtälöllä

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

jossa a, b ja c saavat olla mitä lukuja tahansa. Lausuttava sanallisesti tämän yhtälön esittämä laki.

14. Kuinka kertolaskun liitäntälaki voidaan ilmaista yhtälön avulla?

15. Kuinka on merkittävä sitä, että lukujen p ja 3 summa on jaettava niiden erotuksella, käyttäen jakomerkkinä a) kaksoispistettä b) jakoviivaa?

16. Kuinka on merkittävä sitä, että luvusta x on vähennettävä lukujen y ja z a) summa b) tulo?

17. Lausekkeesta $(a + b) - (a \cdot b) - (a - b)$ on jätettävä pois tarpeettomat sulkumerkit.

18. Minkä arvon saa lauseke a) $x - 2 \cdot (x - 3)$ b) $(x - 2) \cdot (x - 3)$, kun $x = 5$?

19. Laskettava $x + 3 \cdot [4 - (x - y)]$, kun a) $x = 4$, $y = 3$ b) $x = 3\frac{1}{2}$, $y = \frac{2}{3}$.

20. Missä järjestyksessä on suoritettava laskut lausekkeessa

$$m \cdot [n + 2 \cdot (m - n)]$$

ja niissä kolmessa muussa lausekkeessa, jotka saadaan tästä pyyhkimällä pois a) hakasulkumerkit b) kaarisulkumerkit c) kaikki sulkumerkit? Näin saatuihin neljään lausekkeeseen on sitten sijoitettava $m = 5$, $n = 2$ ja laskettava lausekkeiden arvot.

21. Paljonko on $729 - abc$, kun $a = 7$, $b = 2$, $c = 9$?

22. Kun $x = \frac{1}{2}$ ja $y = 2$, niin kuinka suuri on

a) $6y - xy$ b) $6(y - x)y$ c) $(6y - x)y$ d) $6(y - xy)$

23. Kuinka on merkittävä sitä nelinumeroista kokonaislukua, jonka peräkkäiset numerot ovat a, b, c ja d?

24. Kaksinumeroisen luvun ykkösten numero on x ja kymmenien numero on kolmea pienempi kuin tämä. Kuinka on lukua merkittävä?

25. Yksidesimaalisen desimaaliluvun kokonaisosa on a ja desimaalia esittävä numero b. Kuinka desimaaliluku voidaan esittää?

Ratkaistava yhtälöt:

26. $x - 27 = 16$

27. $x - 1\frac{2}{3} = 2$

28. $x - 0{,}72 = 2{,}45$

29. $x + 8 = 23$

30. $x + 1\frac{5}{6} = 5\frac{1}{4}$

31. $x + b = a$

32. $58 - x = 33$

33. $7 - x = 5{,}27$

34. $a - x = b$

35. $6x = 15$

36. $\frac{4}{5}x = \frac{2}{3}$

37. $1{,}28x = 0{,}88$

38. $10x - 7 = 52$

39. $1\frac{2}{3}x - \frac{3}{4} = 1\frac{1}{3}$

40. $ax - b = c$

41. a) $\frac{x}{8} = 12$ b) $\frac{x}{a} = b$. Jälkimmäisen yhtälön juuren lausekkeeseen sijoitettava $a = 4\frac{1}{6}$, $b = \frac{3}{5}$ ja laskettava vastaava juuren arvo.

42. a) $\frac{42}{x} = 3$ b) $\frac{a}{x} = b$. Jälkimmäisen yhtälön juuren lausekkeeseen sijoitettava $a = 0{,}12$, $b = 1{,}5$ ja laskettava vastaava juuren arvo.

Vastauksia

18. a) 1 b) 6

19. a) 13 b) 7

20. 40, 16, 50, 18

22. a) 11 b) 18 c) 23 d) 6

30. $3\frac{5}{12}$

36. $\frac{5}{6}$

37. 0,6875

39. $1\frac{1}{4}$

41. $2\frac{1}{2}$

42. 0,08

Tehtävien ladonta: ***Juha Ruokolainen***

Kaksi Survo-ristikkoa

Seppo Mustonen

Survo-ristikko 53/2007

(Vaikeusaste 1100 ilman vihjettä.)

	A	B	C	D	
1					27
2					13
3					53
4					43
	47	39	29	21	

Vihje: Yhtälön $456 \cdot X^2 + 1416 \cdot X - 131 = 0$ positiivisen juuren ketjumurtolukukehitelmä

$$X = \cfrac{1}{\mathrm{A1} + \cfrac{1}{\mathrm{B1} + \cfrac{1}{\mathrm{C1} + \cfrac{1}{\mathrm{D1} + X}}}}$$

antaa ristikon ensimmäisen rivin. Survossa luvut saa lasketuksi esim. seuraavilla rekursiivisilla, editoriaalisen laskennan kaavoilla

```
Y(N,X):=if(N=0)then(X)else(1/(Y(N-1,X)-A(N-1,X)))
A(N,X):=if(N=0)then(int(X))else(int(Y(N,X)))
```

Ristikon ratkaisu löytyy sivulta http://www.survo.fi/ristikot/ratkaisut.html#230407.

Survo-ristikko 56/2007

	A	B	C	D	
1					48
2					22
3					56
4					40
5					44
	57	26	90	37	

Tämä on kilpatehtävä, josta tarkempia tietoja on sivulla http://www.survo.fi/ristikot/index.html#230407.

Yleistietoja Survo-ristikoista ja mm. niiden pikapeliversioista on sivulla http://www.survo.fi/ristikot.