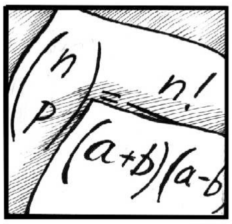


Klikkimenetelmä kombinatoristen ongelmien ratkaisemisessa

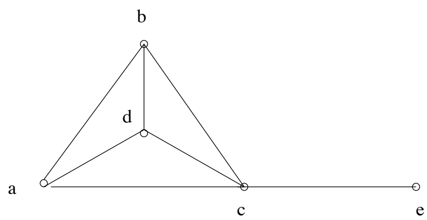
Mikko Malinen
TkK, opiskelija
Teknillinen korkeakoulu

Johdanto

Ratkaistaessa tietyntyyppisiä kombinatorisia yhteensopivuusongelmia tietokoneella voidaan käyttää klikkimenetelmää. Menetelmässä muodostetaan ensin *graafi* ja sitten etsitään siitä tietynkokoinen *klikki*. Tämäntyyppiset ongelmat voitaisiin periaatteessa ratkaista myös järjestelmällisellä eri tapausten läpikäynnillä (brute force) tai peräytyvällä haulla (backtrack search). Ratkaiseminen näillä on usein käytännössä mahdotonta vaadittavan liian suuren laskenta-ajan takia. Menetelmä soveltuu seuraavanlaisten ongelmien ratkaisuun: Olkoon äärellinen määrä alkioita. Jokainen alkio voi saada arvokseen jonkin arvon annetusta äärellisestä arvojoukosta. Jonkin tai joidenkin alkioiden arvo rajoittaa jonkun toisen tai joidenkin toistaen alkioiden mahdollisia arvoja. On löydettävä kaikille alkioille arvot, jotka ovat yhteensopivia kaikkien muiden alkioiden arvojen kanssa. Voidaan olla myös vähemmän kiinnostuneita alkioiden arvoista, mutta halutaan tietää ratkaisujen kokonaismäärä. Edellisen ongelman esimerkkeinä esitetään erään erään yksinkertaisen kombinatorisen ongelman ratkaiseminen, Einsteinin ongelman ratkaiseminen sekä sudokutehtävän ratkaiseminen. Jälkimmäisen ongelman esimerkkinä esitetään virheenkorjaavien koodien määrän laskeminen.

Hieman graafiteoriaa

Graafi on pari $G = (V, E)$, missä V on solmujen joukko ja E on solmuja yhdistävien kaarien joukko (ks. kuva 1). Yksi kaari yhdistää kaksi solmua toisiinsa.



Kuva 1. Eräs graafi. Solmujen joukko V = {a,b,c,d,e}. Solmuja yhdistää joukko kaaria.

Klikki on sellainen V:n osajoukko, jossa jokainen solmu on yhdistetty jokaiseen toiseen solmuun kaarella. Kuvan 3 graafin maksimiklikki on $C_1 = \{a, b, c, d\}$. Myös esim. $C_2 = \{b, c, d\}$ on klikki.

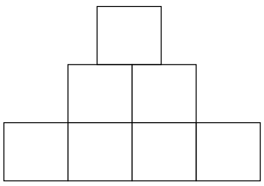
Menetelmä

Tarkastellaan graafia, jonka solmuina on ongelman alkiot kaikkine mahdollisisne arvoineen. Jos ongelmassa on n alkiota ja kullakin niistä on k mahdollista arvoa, tulee graafiin $n \cdot k$ solmua. Olkoon graafin kahden solmun välillä kaari jos ja vain jos niiden arvot ovat keskenään yhteensopivat. Ratkaisun löytämiseksi eli alkioiden arvojen määräämiseksi graafista etsitään n:n suuruinen klikki. Mikäli halutaan tietää ratkaisujen lukumäärä, etsitään n:n suuruisten klikkien lukumäärä. Algoritmeja klikin etsimiseksi on esitetty [1]:ssä ja [2]:ssa. Yksi mahdollisuus on käyttää valmista aliohjelmatyökalua, jollainen on esimerkiksi [3].

Esimerkkejä

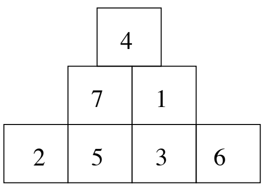
Yksinkertainen tehtävä

Tämä tehtävä on melko helppo ratkaista kynällä ja paperilla, mutta esimerkin yksinkertaisuuden vuoksi esitetään tässä. Tämä on myös esimerkkinä siitä, minkä tyyppisiin tehtäviin menetelmää voidaan käyttää. Tehtävänä on täyttää ruudukkoon numerot 1-7, yksi kutakin, niin, että toisiaan koskettavat ruudut eivät sisällä peräkkäisiä numeroita (ks. kuva 2).



Kuva 2. Täytettävä ruudukko

Graafiin tulee solmuja $n \cdot k = 7 \cdot 7$ kappaletta. Kuhunkin ruutuun assosioidaan 7 solmua, joihin assosioidaan myös numerot 1-7, yksi kuhunkin. Kahden solmun välille asetetaan kaari jos ja vain jos niitä vastaavat ruudut ja numerot ovat yhteensopivia. Esimerkiksi kahden vierekkäisen ruudun numeroiden ollessa peräkkäiset solmujen välillä ei ole kaarta. Ratkaisu löytyy etsimällä seitsemän kokoinen klikki graafista. Ratkaisujen lukumäärä saadaan laskemalla seitsemän kokoisten klikkien lukumäärä graafissa. Eräs ratkaisu on esitetty kuvassa 3.



Kuva 3. Eräs ratkaisu tehtävään

Sudokutehtävän ratkaiseminen klikkimenetelmällä

Latinalaiset neliöt

Astetta n oleva *latinalainen neliö* on $n \times n$ taulukko, joka koostuu n symbolista niin että jokainen symboli esiintyy tasan kerran jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa (ks. kuva 4). Jatkossa oletetaan, että symbolit ovat $1, 2, ..., n$.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

Kuva 4. Eräs latinalainen neliö

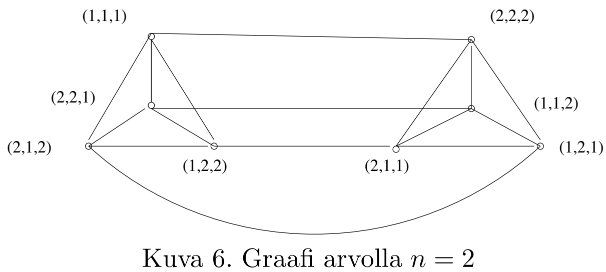
Osittaisessa latinalaisessa neliössä osa alkioista on määrittelemättä. Osittaisen latinalaisen neliön *täydentäminen* on määrittelemättömien alkioiden määrääminen niin, että osittainen neliö täydentyy sallituksi latinalaiseksi neliöksi.

1	2	3	4	5
2	3	.	.	.
3	.	4	.	.
4	.	.	5	.
5	.	.	.	2

Kuva 5. Eräs osittainen latinalainen neliö

Algoritmi

Graafien kielellä osittaisen latinalaisen neliön täydennys voidaan suorittaa seuraavalla tavalla: Tarkastellaan graafin, jonka solmuina on n^3 kpl muotoa (i, j, k) olevaa kolmikkoa; $i, j, k \in \{1, 2, ..., n\}$. Mitkä tahansa kaksi erillistä kolmikkoa on yhdistetty kaarella jos ja vain jos kolmikot ovat yhtäsuuria korkeintaan yhdessä koordinaateista. Kuvassa 6 on arvolla $n = 2$ syntyvä graafi.



Kuva 6. Graafi arvolla $n = 2$

Intuitio on se, että jokainen kolmikko (i, j, k) kertoo, että annamme arvon k alkiolle rivillä i, sarakkeessa j $n \times n$ taulukossa. Huomaa, että n:n asteen latinalaiset neliöt vastaavat n^2 kokoisia graafin klikkejä. Myöskin, osittainen latinalainen neliö voidaan täydentää jos ja vain jos vastaavat kolmikot ilmenevät kokoa n^2 olevassa klikissä.

Algoritmin muokkaaminen sudokun ratkaisemiseksi tapahtuu niin, että sudokun lisärajoitus, luvut 1-9 laatikossa, huomioidaan siten, että kussakin laatikossa alkioiden välillä on kaari jos ja vain jos kyseiset kaksi alkiota eivät ole arvoltaan samat. Ja sudokussahan $n = 9$.

Einsteinin ongelman ratkaiseminen klikkimenetelmällä

Tästä ongelmasta on olemassa erilaisia versioita. Tässä niistä yksi: Pienellä kadulla on viisi eri väristä taloa. Viisi eri kansallisuutta olevaa ihmistä asuu näissä viidessä talossa. Joskaisella asukkaalla on eri ammatti, jokainen pitää eri juomasta ja jokaisella on eri kotieläin. On annettu seuraavat tiedot:

Englantilainen asuu punaisessa talossa.
Espanjalaisella on koira.
Japanilainen on maalari.
Italialainen juo teetä.
Norjalainen asuu vasemmanpuoleisimmassa talossa.
Vihreän talon omistaja juo kahvia.
Vihreä talo on valkoisen talon oikealla puolella.
Kuvanveistäjä kasvattaa etanoita.
Diplomaatti asuu keltaisessa talossa.
Keskimmäisessä talossa joudaan maitoa.
Norjalainen asuu sinisen talon vieressä.
Viulunsoittaja juo hedelmämehua.
Kettu on talossa, joka on lääkärin talon vieressä.
Hevonen on talossa, joka on diplomaatin talon vieressä.

Kysymys kuuluu, kenellä on seepra ja kuka juo vettä? Tämän ongelman ratkaisemiseksi riittää määrittää jokaiselle talolle sen viisi ominaisuutta:

- väri
- omistajan kansallisuus
- omistajan kotieläin
- omistajan ammatti
- omistajan mielijuoma

Taloja on viisi, kullakin talolla on viisi ominaisuutta ja kullakin ominaisuudella on viisi mahdollista arvoa. Muodostetaan graafi, jossa on $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ solmua. Yhdestä solmusta tiedetään mikä talo on kyseessä, mikä ominaisuus on kyseessä ja mikä on ominaisuuden arvo. Sitten solmujen välille vedetään kaaria niin, että vain yhteensopivien solmujen välille tulee kaari. Ratkaisu saadaan, kun näin muodostuvasta graafista etsitään 25:n kokoinen klikki. Tämä klikki kertoo, mitkä arvot kunkin talon ominaisuudet saavat. Kerrottakoon, että ratkaisu on: Japanilaisella on seepra ja norjalainen juo vettä.

Koodien lukumäärän laskeminen klikkimenetelmällä

Tässä ongelmassa olemme kiinnostuneita ratkaisujen *lukumäärästä.* l:n pituinen binäärinen koodisana on l:n pituinen jono nollia ja ykkösiä. 01001 voisi olla viiden pituinen koodisana. s:n kokoinen koodi on s:n kokoinen joukko koodisanoja. Kahden binäärisen koodisanan välinen Hamming-etäisyys on se bittien lukumäärä, jolla koodisanat eroavat toisistaan. Esimerkiksi koodisanojen 01001 ja 01010 Hamming etäisyys on kaksi, koska ne eroavat toisistaan kahden bitin osalta. Hamming-etäisyydellä on merkitystä virheen havaitsevissa ja -korjaavissa koodeissa. Tässä ongelmassa olemme kiinnostuneita laskemaan l-pituisten, s-kokoisten ja minimi Hamming-etäisyyden h omaavien eri koodien lukumäärän. Graafin solmut muodostetaan kaikista erilaisista l-pituisista bittijonoista. Graafissa on siten 2^{l-1} solmua. Kahden solmun välille muodostetaan kaari, mikäli niiden Hamming-etäisyys on suurempi tai yhtäsuuri kuin h. Koodien lukumäärä saadaan nyt s-kokoisten klikkien lukumääränä.

Johtopäätökset

Tässä artikkelissa esitettiin, kuinka klikkimenetelmää voidaan käyttää tietyntyyppisten kombinatoristen ongelmien ratkaisujen etsimiseen sekä ratkaisujen lukumäärien laskemiseen. Menetelmää voidaan käyttää usein silloinkin, kun kaikkien vaihtoehtojen läpikäynti tai peräytyvä haku ovat laskenta-ajaltaan liian suuria. Menetelmä edellyttää klikinetsintäalgoritmin käyttöä osana menetelmää.

Viitteet

[1] P. Kaski ja P.R.J. Östergård, *Classification Algorithms for Codes and Designs*, Springer, Berlin, 2006

[2] D.L. Kreher ja D.R. Stinson, *Combinatorial algorithms: generation, enumeration and search*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1999

[3] Ohjelmistotyökalu Cliquer,
`http://users.tkk.fi/pat/cliquer.html`