Miten nostaa yläasteen oppilaitten kiinnostusta matematiikan sanallisia tehtäviä kohtaan? Esimerkkejä, neuvoja, analyysi

Pavel Shmakov
MAFYKE-lehtori, Käpylän peruskoulu, Helsinki
shpavel@luukku.com

Nikolay Zimakov
Ph.D., Helsinki
zimanik@hotmail.com

Tiivistelmä

Kirjoituksessani kerrotaan oppilaiden kiinnostuksesta tehtäviä kohtaan. Tämä on ehkä yksi matematiikan opetuksen tärkeimmistä ongelmista yläasteella. Suositellaan, miten olisi mahdollista järjestää kouluopetuksesta mukavampaa ja sisällöltään rikkaampaa. Seuraavassa esitetään arkikäytäntöön liittyvien, sanallisten matematiikan tehtävien päävaatimuksia ja annetaan konkreettisia esimerkkejä tehtävistä.

Tällä hetkellä monet valtiot kannattavat matematiikan koulutusta ja tieteen tason pitämistä korkeana. Matematiikka on luonnontieteiden ja informatiivisten tieteiden yhteinen perusta. Tämä väite lienee kiistaton. Sen lisäksi matematiikka on ajattelun kehittämisen toiminnallinen työkalu. Itse asiassa se on ehkä ainoa oppiaine, jossa oppilaat perustelevat omia johtopäätöksiään. Sitä paitsi me ajattelemme, että matematiikka on yhteinen ja välttämätön osa ihmisten kulttuuria. Mutta kysely [1] ja arvovaltaisen PISA-tutkimuksen 2003 [2, diagrammi 5.1] tulokset osoittavat, että yläasteen oppilailla on matala kiinnostus matematiikkaa kohtaan. Tällainen tilanne vaikeuttaa opetus- ja oppimisprosessia, heijastuu saatujen tietojen laatuun ja sen seurauksena aiheutuu stressiä oppilaille. Näin PISA-tutkimuksen 2003 tulosten diagrammi 5.2 [2] esittää selvästi tietojen laadun riippuvuuden matematiikan kiinnostuksesta. Diagrammi 5.3 [2] näyttää suomalaisten oppilaiden korkeaa "vieroksunnan" tasoa matematiikan oppitunneilla. Meidän näkökulmastamme katsoen sen syyt ovat merkittävässä määrin piilossa koulun oppikirjoissa, joiden sivut on taitettu yksitoikkoisesti ja ne pitävät sisällään epäkiinnostavia mekaanisia harjoituksia. Ajatuksena on, että jos on mahdollisuus muuttaa sanalliset matematiikan tehtävät hauskoiksi ja lapsille miellyttäviksi, se pitäisi tehdä [3]. Alempana on hahmotettu väyliä ja reittejä, jotka johtavat pois ikävistä, pinttyneistä rutiineista.

Koulumatematiikka koostuu teoriasta ja käytännöstä. Tässä kirjoitelmassa jätetään teoreettinen osa käsittelemättä. Emme myöskään keskustele konkreettisten oppituntien rakenteista emmekä niiden kulusta. Se antaa meille mahdollisuuden keskittyä tehtäviin hyvin. Meidän tavoitteemme on kohottaa tavallisten oppilaiden kiinnostusta matematiikkaan. Ensisijaisesti tässä tarkoitetaan välinpitämättömiä tai matematiikkaan kielteisesti suhtautuvia oppilaita. Toisaalta on tärkeää huomioida lahjakkaammat tai motivoituneemmat oppilaat, mutta heistä puhutaan myöhemmin. Oppilaat voivat suhtautua matematiikkaan eri tavoin. He voivat ymmärtää vain, että on pakko käydä koulussa ja opiskella koulumatematiikkaa. Toisaalta he voivat tietää, että matematiikan osaaminen on hyödyllistä elämässä. Se, mitä haluaisimme korostaa, on että puhutaan erilaisesta suhtautumisesta matematiikkaan. Me uskomme, että on mahdollista herättää tavallisten oppituntien aikana kaikkien oppilaitten kiinnostus itse matematiikkaan. Seuraavaksi luetellaan tehtävien valinnan perusperiaatteet, jotka vastaavat yllämainittuun haasteeseen. Sen jälkeen me valaisemme niiden soveltamista konkreettisilla esimerkeillä.

Vaatimuksia tehtäviin:
1. *Tehtävän sisältö esitellään epätavallisessa, esimerkiksi epämatemaattisessa, sadun tai tarinan muodossa.*
2. *Tehtävän pitää olla monitasoinen.*
- On tarpeellista, että tehtävä sisältää ensimmäisen tason, joka on yksinkertainen kaikille. Tämän yksinkertaisen tason "ratkaisu", joka tulee mieleen, voi olla väärä.
- Tehtävässä on muita tasoja, jotka eivät tule mieleen heti ja jotka vain osa oppilaista ottaa huomioon.
3. *Eritasoisissa tehtävissä on eksoottisia, kauniita, outoja tai hauskoja ratkaisuja tai ratkaisuksi tulee yllättävä johtopäätös. Vähintään yksi niistä on hyvin vaikea.*
4. *Tehtävä antaa oppilaille mahdollisuuden koetella omia hoksottimiaan ja kehittää omaa ajattelukykyään.*
5. *Tehtävän muodossa on toinenkin vaihtoehto, joka riippuu oppilaiden konkreettisesta kiinnostuksesta (liite 1).*

Yllämainittuja vaatimuksia vastaavien tehtävien joukko on esitelty jäljempänä. Muutamat korkeat tasot sisältävät suhteellisen vaikeita tehtäviä. Sellaisia tehtäviä voidaan suositella oppilaille, jotka ovat vakavasti innostuneita matematiikasta. Opettajan avustuksella huomattava osa oppilaista voi kuitenkin pärjätä sellaisten tehtävien parissa. Suurin osa alla olevista tehtävistä on tarkoitettu 7.-luokkalaisille. Tehtävien pääsuunta on algebra ja logiikka. Logiikan tehtävistä on paikallaan tehdä seuraava huomautus: logiikka on aine, jota ei opeteta koulussa, mutta logiikan perusteet pitää osata edes intuitiivisella tasolla. Sitä paitsi logiikka on kaikkien tiedeaineiden tärkeä osa.

JALKAPALLOTURNAUS

Tyttöjen ja poikien jalkapallojoukkueet pelaavat keskenään. Pojat pelaavat vain poikia vastaan, tytöt pelaavat vain tyttöjä vastaan. Jokainen joukkue osallistuu kuitenkin turnaukseen.
Huomio opettajalle: tässä tapauksessa saa muotoilla sekä suoranaiset (1-4), että käänteiset tehtävät (5-8).

1.1 *Kuinka paljon oli otteluita, jos poikien joukkueita on kolme?*
Huomio: Haluttaessa voi tehtävän muotoilla konkreettisemmaksi antamalla joukkueille nimet (katso ratkaisu liitteessä 2). Kuten ratkaisusta näkyy, tehtävää voidaan käyttää opetettaessa kokonaislukujen kertomista ja jakamista. Tehtävä on yksinkertainen, mutta oikea ratkaisu ei löydy heti. Olisi hyvä esittää kolmen joukkueen turnaustaulukko.

	Leijonat	Tiikerit	Virtahevot
Leijonat	///////	2 : 2	0 : 1
Tiikerit	2 : 2	///////	3 : 4
Virtahevot	1 : 0	4 : 3	///////

Tätä tehtävää käsiteltäessä on hyödyllistä muistuttaa lukujen kertomisen merkitys.

1.2 *Kuinka paljon oli otteluita, jos vastakkain pelaavat neljä poikien joukkuetta?*

1.3 *...pelaavat viisi poikien joukkuetta?*

2. *Keksikää pelien määrän yhteinen kaava, jos turnaukseen osallistuu poikien joukkueita n kappaletta.*
Huomio: Liitteessä esitetty kaava saa aikaan lukujonon $\{0, 1, 3, 6, 10, \ldots\}$, ja siis tämä tehtävä havainnollistaa "Lukujonot"-teemaa.

3. *Kuinka monta peliä oli, jos turnaukseen osallistuu kaksi tyttöjen joukkuetta ja kolme poikien joukkuetta?*

4. *Keksikää tyttöjen ja poikien pelien määrän yleinen kaava, jos turnaukseen osallistuu n tyttöjen joukkuetta ja m poikien joukkuetta.*

5. *Montako poikien ja tyttöjen joukkuetta oli, jos pelattiin kymmenen peliä ja yhteensä oli viisi joukkuetta?*
Huomio: Tämä tehtävä (myös tehtävät 6-7) havainnollistaa "Yhtälöt" -teemaa (katso ratkaisu 5.2 liitteessä 2). Tehtäviä käsiteltäessä olisi hyvä kertoa oppilaille tehtävistä ja niiden ratkaisuista, jotka johtavat yksinkertaiseen toisen asteen yhtälöön.

6. *Mitä voidaan sanoa pelien määrästä, jos turnaukseen osallistuvien tyttöjen joukkueiden määrä on sama kuin poikien joukkueiden määrä?*

Huomio: Seuraavat kaksi tehtävää ratkaistaan toisen asteen yhtälön avulla. Tehtävässä 7 riittää formaalista tietoa ja itse asiassa se on kohtuullisen helppo. Tehtävä 8 on tarkoitettu matematiikkaa harrastaville oppilaille, se on vaikeampi.

7. *Onko mahdollista, että oli viisi joukkuetta ja neljä peliä?*

8. *Mitä voi kertoa poikien ja tyttöjen joukkueiden määrän suhteesta, jos joukkueiden määrä on sama kuin pelien määrä?*

TESTEJÄ

Kolme tyttöystävää Anu, Birgitta ja Catarina päättivät kokeilla heidän ystävänsä loogista ajattelua. He seisoivat rivissä tyhjässä huoneessa ja kutsuivat häntä luokseen. Hän näki ystävät samassa järjestyksessä Anu, Birgitta, Catarina, vasemmalta oikealle. Tytöt sanoivat, että hänen pitää tehdä kolme testiä. Jokaisessa testissä on arvattava, kuka heistä puhuu totta, kuka valehtelee.

Ensimmäinen testi. *Tytöt sanoivat, että testissä yksi heistä puhuu totta, muut valehtelevat. Anu sanoi: kaikki vasemmalla seisovat ystäväni valehtelevat. Birgitta sanoi: kaikki vasemmalla ja oikealla seisovat ystäväni puhuvat totta. Catarina sanoi: oikealla seisova ystäväni puhuu totta.*

Toinen testi. *Tytöt sanoivat, että testissä yksi heistä puhuu totta ja ainakin yksi valehtelee. Anu sanoi: kaikki vasemmalla seisovat ystäväni valehtelevat. Birgitta sanoi: kaikki ystävät puhuvat totta. Catarina sanoi: oikealla seisova ystäväni puhuu totta.*

Kolmas testi. *Tytöt seisoivat järjestyksessä: ensimmäisenä Catarina, sitten Birgitta ja Anu. He sanoivat, että testin aikana yksi heistä puhuu totta ja ainakin yksi valehtelee. Anu sanoi: kaikki vasemmalla seisovat ystäväni valehtelevat. Birgitta sanoi: kaikki vasemmalla ja oikealla seisovat ystäväni puhuvat totta. Catarina sanoi: oikealla seisova ystäväni puhuu totta.*

KESKINOPEUS

Pekka matkusti puolet matkasta Tampereelta Helsinkiin nopeudella 40 km/h. Millä nopeudella hänen pitää matkustaa toinen puoli matkasta, jotta hänen koko matkan keskinopeutensa on a) 70 km/h, b) 80 km/h, c) 90 km/h?
Tavoite: *pitää ymmärtää, mikä on numeerisen laskun fysikaalinen merkitys. Onko aina niin yksinkertaisesti ja selvästi annettuun tehtävään olemassa luonnollinen ratkaisu?*
Huomio: oppilaille on helpompaa ratkaista tehtävä, jos sanotaan kuinka monta kilometriä on Tampereelta Helsinkiin, esimerkiksi 200 km.

MAITOA KAHVIIN JA KAHVIA MAITOON

Meillä on kaksi samanlaista lasia. Toisessa on maitoa, toisessa on kahvia. Otetaan lusikallinen maitoa ensimmäisestä lasista ja kaadetaan sen toiseen lasiin.
1. *Sekoitetaan maito kahviin toisessa lasissa. Sen jälkeen otetaan lusikallinen nestettä tästä lasista ja kaadetaan se ensimmäiseen lasiin. Kumpaa on enemmän: maitoa kahvissa vai kahvia maidossa?*
2. *Emme sekoita maitoa kahviin toisessa lasissa. Otetaan lusikallinen nestettä tästä lasista ja kaadetaan se ensimmäiseen lasiin. Kumpaa on enemmän tässä tapauksessa: maitoa kahvissa vai kahvia maidossa?*

Monet lapset (ja aikuiset!) nopeasti antavat väärän vastauksen: maitoa on kahvissa enemmän, koska ensin kaadetaan puhdasta maitoa ja sitten kaadetaan seosta.
Huomio: kannattaa varmasti aloittaa ensimmäisestä tasosta. *Ei sekoiteta maitoa kahviin toisessa lasissa. a) Kaadetaan toisesta lasista ensimmäiseen lusikallinen maitoa ja otetaan sama lusikallinen takaisin tai b) kaadetaan toisesta lasista ensimmäiseen lusikallinen puhdasta kahvia, tai c) kaadetaan toisesta lasista ensimmäiseen puoli lusikallista maitoa ja puoli lusikallista kahvia.*

TIETÄJISTÄ JA HIRMUISTA

Joka neljäs matematiikko on hirviö. Joka viides hirviö on matematiikko.
1. *Kumpia on enemmän – matemaatikoita vai hirviöitä?* (Yhteinen kysymys)
2. *Kumpia on enemmän – matemaatikoita vai hirviöitä, jos matemaatikoiden asumispaikka on Maa, mutta hirviöitä asuu toisella planeetalla, hyvin kaukana?* (Konkreettinen kysymys)
3. *Kumpia on enemmän – motemaatikoita vai hyrviöitä?* (Outo kysymys)
Tavoite: näytetään havainnollisesti joukko-opin peruskäsitteitä, esimerkiksi joukkojen leikkaaminen, tyhjä joukko. Yksinkertaisesti todistetaan algebrallisen ratkaisun ja joukko-opillisen ratkaisun vastaavuus.

Liite 1

TOINEN VAIHTOEHTO tehtävälle JALKAPALLOTURNAUS

HIENOILLA KUTSUILLA

Kun kaksi herrasmiestä tai kaksi hienoa naista tapaavat toisensa, he kättelevät. Silloin kun herrasmies tapaa hienon naisen, hän suutelee daamin kättä.

Suorat tehtävät:
1.1. *Kuinka monta kertaa käteltiin, kun kolme herrasmiestä tapaa?*
1.2. *Kuinka monta kertaa käteltiin, kun tapasi neljä herrasmiestä? . . . viisi herrasmiestä?*
2. *Keksikää kädenpuristuksien määrän yhteinen kaava, kun n herrasmiestä tapaa.*
3. *Kuinka monta kädenpuristusta ja käsisuudelmaa tapahtuu, kun kaksi hienoa naista ja kolme herrasmiestä tapaa?*
4. *Keksikää kädenpuristusten ja käsisuudelmien määrän yhteinen kaava, kun n daamia ja m herrasmiestä tapaavat.*

Käänteistehtävät:
5. *Montako herrasmiestä ja daamia oli, jos kädenpuristuksia oli kymmenen ja ihmisiä oli yhteensä viisi?*
6. *Mitä voidaan sanoa kädenpuristuksien määrästä, jos kutsutilaisuuteen osallistuvien daamien määrä on sama kuin herrasmiesten määrä?*
7. *Onko mahdollista, että oli viisi ihmistä ja neljä kädenpuristusta?*
8. *Mitä voi kertoa herrasmiesten ja daamien määrän*

suhteesta, jos ihmisten määrä on sama kuin kädenpuristuksien määrä?

Liite 2, ratkaisuja ja vastauksia

JALKAPALLOTURNAUS

1.1. Ratkaisu. Jos kolme poikien joukkuetta pelaa (Leijonat, Tiikerit ja Virtahevot), jokainen joukkue pelaa kahta joukkuetta vastaan. Esimerkiksi, Leijonat pelaavat Tiikereitä ja Virtahepoja vastaan, siitä voidaan todeta, että Leijonat pelaavat kaksi peliä. Samalla tavalla pelaavat muut joukkueet ja siitä seuraa, että pelien määrä on $3 \cdot 2 = 6$. Monet antavat vastaukseksi kuusi. Mutta tässä jokainen peli on laskettu kaksi kertaa. Esimerkiksi, Leijonien ja Tiikereiden peli laskettu kuin lasketaan sekä Leijonien otteluja että Tiikereiden otteluja, joten lopullinen pelien määrä on $(3 \cdot 2) : 2 = 3$.

1.2 Lyhyt ratkaisu. Neljän joukkueen pelien määrä lasketaan samalla tavalla, $(4 \cdot 3) : 2 = 6$.

1.3 Vastaus: 10.

2. Vastaus: $n \cdot (n-1) : 2$

3. Ratkaisu. Samoin kuin kohdassa yksi saadaan: $(2 \cdot 1 + 3 \cdot 2) : 2 = 4$.

4. Vastaus: $m \cdot (m-1) : 2 + n \cdot (n-1) : 2$

5.1 Ratkaisu. Kohdasta 1 saadaan kymmenen peliä, jos turnaukseen osallistuu viisi poikien tai viisi tyttöjen joukkuetta. Onko muita ratkaisuja? Kohdasta 1 nähdään, että suhde $4 : 1$ $(1 : 4)$ on epäreaalinen, tarkistetaan tapaus $3 : 2$. Käytetään kaavaa kohdasta 3: jos $m = 3$, $n = 2$ saadaan $(3 \cdot 2) : 2 + (2 \cdot 1) : 2 = 4$, tämä joukkueiden suhde on myös epäreaalinen.

5.2 Ratkaisu. Merkitään poikien joukkueiden määrää x:llä, saadaan tyttöjen joukkueiden määräksi $(5-x)$ ja pelien määräksi: $x \cdot (x-1) : 2 + (5-x) \cdot (4-x) : 2 = (x^2 - x + 20 - 9x + x^2) : 2 = (2x^2 - 10x + 20) : 2 = x^2 - 5x + 10$.

Ehdon mukaan viimeinen lauseke on 10. Siksi: $x^2 - 5x + 10 = 10$. Tästä seuraa, että $x^2 - 5x = 0$. Siis $x \cdot (x-5) = 0$. Lopulta saadaan seuraava vastaus: ainoa vaihtoehto on, että kaikki joukkueet ovat joko poikien tai tyttöjen joukkueita.

6. Ratkaisu. Vanhoissa merkityksissä $n = a/2$, missä a on yhteisten pelien määrä. Samalla tavalla kuin kohdassa 5 lasketaan pelien määrä: $a/2 \cdot (a/2 - 1) : 2 + (a - a/2) \cdot (a - a/2 - 1) : 2 = a/2 \cdot (a/2 - 1) : 2 + a/2 \cdot (a/2 - 1) : 2 = a/2 \cdot (a/2 - 1)$.

Merkitsemällä pelien määrää b:llä, saadaan $a/2 \cdot (a/2 - 1) = b$ (**)

Todistetaan, että kaavassa a on parillinen (ei negatiivinen) luku: $a^2/4 - a/2 = b \Rightarrow a^2 = 2(2b + a)$. Identtinen yhtälö näyttää, että a^2 on parillinen, siksi a on parillinen eikä se ole negatiivinen luku.

Vastaus: tässä tapauksessa pelien määrä $b = a/2 \cdot (a/2 - 1)$, missä a (joukkueiden määrä) $= 0, 2, 4, \ldots$

7. Ratkaisu. Merkitään poikien joukkueiden määrää x:llä, saadaan tyttöjen joukkueiden määräksi $(5-x)$. Kohdassa 5.2 oli laskettu, että pelien määrä on $x^2 - 5x + 10$. Ehdon mukaan viimeinen yhtälö on 4, siksi $x^2 - 5x + 10 = 4$ eli $x^2 - 5x + 6 = 0$. Ratkaisemalla se saadaan $x = 2$ tai $x = 3$. Vastaus: kaksi poikien ja kolme tyttöjen joukkuetta tai 3 poikien ja 2 tyttöjen joukkuetta.

8. Ratkaisu. Sovitaan, että poikien joukkueiden määrä on x, pelien määrä on a. Kohdan 4 mukaan saadaan: $x \cdot (x-1) : 2 + (a-x) \cdot (a-x-1) : 2 = (x^2 - x + a^2 - 2ax + x^2 - a + x) : 2 = (2x^2 - 2ax + a^2 - a) : 2$. Ehdon mukaan viimeinen lauseke on a. Siksi $2x^2 - 2ax + a^2 - 3a = 0$ (*)

Toisen asteen yhtälön diskriminantti D on: $D = 4a^2 - 8a^2 + 24a = -4a(a-6)$.

Kirjoitetaan kaikki kokonaiset luvut, jotka eivät ole negatiivisia ja antavat positiivisen D:n:

a	0	1	2	3	4	5	6
D	0	20	32	36	32	20	0

Jos a on 1, 2, 4, 5, yhtälöllä ei ole reaalista ratkaisua. Jos $a = 3$ $(D = 36)$ yhtälöstä (*) saadaan yhtälö $2x^2 - 6x = 0$ eli $x \cdot (x-3) = 0$. Tässä tapauksessa kaikki kolme joukkuetta ovat vain poikien tai vain tyttöjen joukkueita. Nyt jää viimeinen tapaus: $a = 6$ $(D = 0)$. Yhtälöstä (*) saadaan yhtälö: $2x^2 - 12x + 18 = 0$ eli $x^2 - 6x + 9 = 0$. Siis viimeisen yhtälön muoto on $(x-3)^2 = 0$. Kuudesta joukkueesta on poikien kolme ja kolme tyttöjen joukkueita.

Vastaus: joukkueiden määrä on sama kuin pelien määrä seuraavassa tapauksessa: 1) ei ole ollenkaan joukkueita, 2) on olemassa kolme joukkuetta, ja ne kaikki ovat joko poikien tai tyttöjen joukkueita, 3) on olemassa kuusi joukkuetta, joista kolme on poikien ja kolme tyttöjen joukkueita.

TESTI

1. Ratkaisu. On ilmeistä, että Birgitta ja Catarina valehtelivat. Siis Anu puhui totta.

2. Ratkaisu. Toinen tapaus (Birgitta puhui totta) on ristiriitainen, koska tässä tapauksessa Anun on pakko puhua totta. Siis Birgitta valehteli. Siitä johtuu, että myös Catarina valehteli.

3. Ratkaisu. Koska Anun puolelta vasemmalla ei ole ketään, Anu puhui totta, samoin Catarina puhui totta (tyhjä joukko kuuluu jokaiseen joukkoon, mm. ystävien joukkoon, jotka valehtelivat tai puhuivat totta). Siksi myös Birgitta puhui totta, mistä johtuu: ystävät valehtelivat sanoessaan, että yksi heistä puhuu totta.

KESKINOPEUS

Ratkaisu. a-tehtävä on ratkaistava oppikirjasta otetun kaavan mukaan. Varsin kiinnostava on b-tehtävä. Ensimmäisen puolimatkan Pekan aika on (80 km: 40

km/h) = 2 tuntia. Se on myös koko matkan aika. (160 km: 80 km/t) = 2 tuntia. Se tarkoittaa, että toisella puolimatkalla Pekan nopeus on ääretön. Sen ilmiön nimi on teleportaatio...

MAITOA KAHVIIN JA KAHVIA MAITOON

Voi olla, että ratkaisu on helpompi ymmärtää, jos ensin puhumme mielivaltaisista, mutta konkreettisista luvuista. Olkoon ensin jokaisessa lasissa kymmenen lusikallista nestettä. Silloin ensimmäisen kaatamisen jälkeen ensimmäiseen lasiin jäi yhdeksän lusikallista maitoa. Toisessa lasissa on kymmenen lusikallista kahvia ja lusikallinen maitoa, yhteensä yksitoista lusikallista nestettä. Koska sekoitamme nestettä toisesta lasista ensimmäiseen, me tuomme lusikassa $1/11$ lusikallista maitoa ja $10/11$ lusikallista kahvia. Lasketaan ja saadaan tulokseksi että toiseen lasiin jäi $(10 - 10/11) = 9$ ja $1/11$ lusikallista kahvia ja $(1 - 1/11) = 10/11$ lusikallista maitoa. Ensimmäisessä lasissa on $10/11$ tuotua lusikallista kahvia ja $(9 + 1/11)$ lusikallista maitoa. Nopeat oppilaat voivat sijoittaa x:n kymmenen asemesta ja ratkaista tehtävän yleisessä muodossa.

TIETÄJISTÄ JA HIRMUISTA

1.1 Ensimmäinen joukko-opin ratkaisu: Käsitellään kahta joukkoa, matemaatikoiden ja hirviöiden. Niiden joukkojen leikkaus (pitää piirtää paperilla kaksi erilaista ympyrää) on ensimmäisen joukon (ympyrän) neljäsosa, ja samanaikaisesti se on toisen joukon (ympyrän) viidesosa.

”Kumpia on enemmän – matemaatikoita vai hirviöitä?” Tietysti hirviöitä on enemmän.

1.2 Toinen ratkaisu on kovin tavallinen: Puhutaan matemaatikoista. Neljännes heistä on hirviöitä. Esimerkiksi, jos matemaatikoita on kuusitoista, siis joka neljäs heistä on hirviö, $16 : 4 = 4$. He neljä ovat viidesosa kaikista hirviöistä. Silloin kaiken kaikkiaan hirviöitä on $5 \cdot 4 = 20$.

1.3 Kolmas ratkaisu, algebrallinen: $M : 4 = H : 5 \Rightarrow M \cdot 5 = H \cdot 4 \Rightarrow M : H = 4 : 5$.

Lähteet

[1] *Shmakov, P., Selikhova, L. 2006 ”Hyöty vai kiinnostus?”, Dimensio 4, s. 36–39*

[2] *PISA-arviointien tulokset ja raportit (PISA 2003)* `http://ktl.jyu.fi/pisa/2tasoala.htm#kuviot`

[3] *Shmakov, P., Selikhova, L. 2006 ”Keksitään ratkaisu yhdessä oppilaiden kanssa”, Arkhimedes 4, s. 25-26*