Solmu

Matematiikkalehti
1/2008

http://solmu.math.helsinki.fi/

Solmu 1/2008

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)
ISSN 1459-0395 (Painettu)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)
00014 Helsingin yliopisto

http://solmu.math.helsinki.fi/

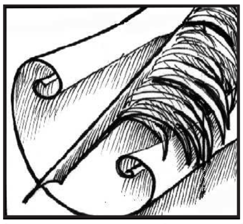
Numeroon 2/2008 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 15.4.2008 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.

Kannen kuvio liittyy kelttiläiseen solmuun. Kuvio oli suosittu 800–900 -luvuilla viikinkien keskuudessa.

Sisällys



Netissä nähtyä

Tällä kertaa pääkirjoituksen paikalla ei esitetä juhlavaa aatteellista sisältöä, vaan tosikertomus päätoimittajan elämästä. Siksi kirjoitus on ensimmäisessä persoonassa.

Nettisurffailu ei varsinaisesti ole harrastukseni. Joskus kuitenkin linkki vie toiseen, ja päätyy sivuille, joilla ei alunperin ole aikonutkaan käydä. Joulun alla satuin osumaan Opetushallituksen etälukiomateriaalien sivuille. Etälukioprojekti, jonka osapuolina olivat Opetushallitus ja Yleisradio, toimi vuosina 2000–2004. Katselin uteliaisuuttani, mitä lyhyen matematiikan otsikko Trigonometria mahtoi sisältää. Ensimmäisenä silmääni sattui hiukan yllättävä varoitus, joka kielsi käyttämästä trigonometrisia funktioita muissa kuin suorakulmaiseen kolmioon liittyvissä yhteyksissä. Sitten totesin, että valmiiksi lasketussa yksinkertaisessa esimerkissä, joka edellytti suorakulmaisen kolmion toisen kateetin laskemista toisen avulla tangenttifunktiota käyttäen, käytettiinkin siniä ja päädyttiin virheelliseen tulokseen. Nyt mieleeni muistui Solmun Sammakko-palsta: tällaisia pikku klömmähdyksiähän aina silloin tällöin tulee vastaan ja niille voi hyvätahtoisesti hymyillä.

Kiinnostuin sivuista kuitenkin sen verran enemmän, että päätin katsoa myös tarjolla olevaa pitkän matematiikan materiaalia. Sitä oli esillä erityisesti myös etälukioprojektin jälkeiseltä ajalta, vuoden 2005 opetussuunnitelmien mukaisesti. Ensimmäinen havaintoni oli omaperäinen kolmion alan kaava: jos kolmion sivut ovat a, b ja c ja sivua a vastassa oleva kulma α, niin kolmion ala on $\frac{1}{2}ab\sin\alpha$! Sammakkosivuille taitaa tulla lisää materiaalia, ajattelin. Mutta kun menin kurssiin Derivaatta ja ensimmäinen silmiin tullut kohta oli tämä:

”Funktio on jatkuva kohdassa $x = a$, jos

$$\lim_{x\to a} = f(x)\text{”}$$

(se oli juuri näin, kyseessä ei nyt ole Solmun virhe) aloin ns. nähdä hiukan punaista. Etsin sivuilta palautelinkin ja kerroin havaintoni sekä johtopäätökseni, joka oli ettei tällaista saisi pitää julkisesti nähtävänä, vaan että sivut olisi pikimmiten suljettava ja tarkistettava. Opetushallitus reagoikin palautteeseeni ripeästi epäillen, että olen lukenut vanhan projektin sivuja, joita ei enää päivitetäkään. Vastattuani, että kritiikkini koski ajankohtaista aineistoa sain ystävällisen puhelinsoiton, jossa vakuutettiin, että materiaalin on laatinut hyvä asiantuntija ja että käsikirjoitukset on vielä Opetushallituksessakin tarkastettu. Virheet mielellään korjataankin. Keskustelun mittaan liennyin ja lupasin joulukinkun sulattelun lomassa katsella sivuja lisää, ja jos vielä epäkohtia löytäisin, niistä kertoa.

Aloinkin lukea materiaalia systemaattisesti kurssista 1 alkaen. Kopioin havaitsemani epäkohdat omaan tiedostoonsa. Kun olin päässyt noin puoleen väliin, otsikkoon neliöjuuri asti, tiedostossani oli jo menossa kuudes sivu. Epäkohtien skaala oli laaja: kirjoitus- ja kielioppivirheistä laskuesimerkkien huolimattomuuksiin, loogisiin epäjohdonmukaisuuksiin ja täydellisiin väärinymmärryksiin. Päätin lopettaa.

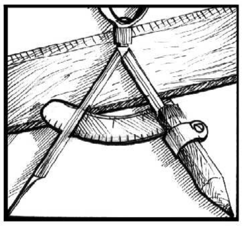
Pääkirjoitus

Aika usein korostetaan, että netissä on paljon tietoa, mutta kaikkeen ei tule luottaa. Sanotaan, että nuorille tulisi antaa mediakasvatusta. Jos tietoa tarjoaa valtion viranomainen, on oletusarvo, että tieto on luotettavaa. Kuvattu esimerkki näyttää, että näin ei tarvitse olla. Parasta mediakasvatusta on tieto.

Yleistäminen yksittäistapauksesta ei ole suotavaa. Opetushallituksen laadunvalvonnan räikeä pettäminen juuri matematiikan kohdalla lisää kuitenkin sitä mielialaa, jonka valtaan tulee seuratessaan matematiikan ylioppilaskirjoitusten tasoa ja läpäisyrajaa ja opettajakunnan yleistä välinpitämättömyyttä tilanteesta, Pisatutkimuksen "matematiikan" osion kritiikitöntä vastaanottoa ja monia muita aikamme ilmiöitä: matematiikalla ei oikeastaan ole väliä. Mikä neuvoksi?

Matti Lehtinen

Pääkirjoitus



Ensimmäisten kuuluisien naismatemaatikkojen henkilökuvia, Sofia Kovalevskaja

Vadim Kulikov

Johdanto

Sofia Kovalevskaja syntyi Moskovassa vuonna 1850. Hän oli keskimmäinen Vasilij ja Elisaveta Korvin-Krukovskien kolmesta lapsesta. Isä oli tykistöupseeri ja äiti F. F. Schubertin tytär ja F. I. Schubertin lapsenlapsi. Molemmat Schubertit olivat akateemikkoja, toinen matemaatikko.

Sofian ensimmäinen tutustuminen matematiikkaan tapahtui, kun perhe muutti uuteen asuntoon ja lastenhuoneen seinä oli tilapäisesti tapetoitu vanhoilla matematiikan luennoilta peräisin olevilla tapeteilla isän nuoruuden ajoilta. Tapetit kiinnostivat Sofiaa erityisesti, vaikkei hän niistä mitään ymmärtänyt.

Perheen lapsilla oli yksityisopettajat ja Sofia menestyi hyvin kaikissa aineissa. Setä Pietari Korvin-Krukovskij sai Sofian kiinnostumaan matematiikasta. Sofia muistelee, että setä kertoi Sofialle "asymptooteista, jotka eivät koskaan saavuta päämääräänsä ja monista muista asioista, joita en tietenkään silloin ymmärtänyt, mutta jotka vaikuttivat mielikuvitukseeni ja loivat mielikuvan matematiikasta ylellisenä ja mysteerisenä tieteenä, joka avautuu vain valituille".

Sofia Kovalevskaja (15.1.1850-10.2.1891)

Sofian isä ei aluksi hyväksynyt tyttärensä kiinnostusta. Hän ei halunnut, että hänen tyttärestään tulee musta lammas, sillä tiede ei sopinut naisille. Perheen naapuristossa asunut fyysikko Tyrtov sai ylipuhuttua Sofian isän palkkaamaan Sofialle yksityisen matematiikan opettajan. Joidenkin lähteiden mukaan hän vertasi Sofiaa Pascaliin ja tämä teki isään suuren vaikutuksen.

Venäjällä ei siihen aikaan nainen voinut valmistua yliopistosta, joten Sofian oli lähdettävä Eurooppaan opiskelemaan. Hän meni naimisiin Vladimir Kovalevskin kanssa vuonna 1868 ja he lähtivät yhdessä Sofian siskon Anytan kanssa Heidelbergiin, jossa Sofia pystyi opiskelemaan matematiikkaa.

Karl Weierstrass

Kahden vuoden päästä, vuonna 1870, Sofia muutti opiskelemaan Berliinin. Karl Weierstrass antoi Sofialle yksityistunteja, sillä naiset eivät saaneet osallistua julkisiin luentoihin. Vuonna 1874 Kovalevskaya väitteli matematiikan tohtoriksi ensimmäisenä naisena Euroopassa. Tämän jälkeen perhe muutti Pietariin ja Kovalevaskaja yritti saada töitä. Siitä ei tullut mitään. Joidenkin huhujen mukaan eräs yliopiston virkailija sanoi Sofialle: "Tähän asti miehet ovat pärjänneet työtehtävissään varsin hyvin emmekä me kaipaa mitään uudistuksia", johon Sofia vastasi "kun Pythagoras todisti lauseensa, hän uhrasi 100 härkää, sen jälkeen karja on pelännyt uudistuksia” (karja - venäjäksi myös haukkumasana).

Vuonna 1883 Kovalevskayan mies Vladimir Kovalevskij teki itsemurhan. Vuonna 1889 39-vuotias Sonya Kovalevskaya nimitettiin matematiikan professorin virkaan Tukholman yliopistossa. Näin hänestä tuli Euroopan ensimmäinen nainen matematiikan professorin virassa. Hänet hyväksyttiin Ranskalaisen tiedeakatemian jäseneksi ja Venäjän tiedeakatemian ensimmäiseksi naisjäseneksi Chebyshevin aloitteesta. Tämä oli ensimmäinen Kovalevskajan kotimaastaan saama tunnustus. Myöhemmin painettiin jopa postimerkkejä hänen kunniakseen.

Sofia Kovalevskaja todisti yleisen tapauksen lauseesta, joka nykyään tunnetaan Cauchy-Kovalevskaya-lauseena; se on olemassaolo- ja yksikäsitteisyystulos, joka liittyy osittaisdifferentiaaliyhtälöiden reuna-arvo-ongelmien ratkaisuihin. Hän oli myös hyvin kiinnostunut kirjallisuudesta. Jo pienenä hän kirjoitti runoja ja Ruotsissa asuessaan kirjoitti näytelmiä ja yhden romaanin. Sonya Kovalevskaya kuoli keuhkokuumeeseen 41-vuotiaana, vuonna 1891. Hänet on haudattu Ruotsiin, lähelle Tukholmaa.

Maria Montessori 1870–1952

Outi Suortti
Niipperin Montessori-leikkikoulu
http://www.niipperinmontessori.fi

Maria Montessori syntyi 1870 Italiassa varakkaaseen ja koulutettuun sukuun, joten hän pystyi aloittamaan yliopisto-opinnot luonnontieteessä ja matematiikassa. Myöhemmin hän hakeutui lääketieteen opiskelijaksi, joka oli tuohon aikaan yksinomaan miesten tieteenala. Hän valmistui lääketieteen ja kirurgian tohtoriksi 1896, ensimmäisenä naisena Italiassa.

Työskennellessään sairaalassa Montessori kiinnostui vajaamielisten ja heikkolahjaisten lasten ongelmista todeten, että näiden lasten koulutus oli pedagoginen eikä ainoastaan lääketieteellinen ongelma. Montessori alkoi perehtyä kasvatustieteeseen. Hänen kasvatuskäsitykseensä vaikuttivat mm. Rousseau (aistien kehittäminen), Pestalozzi (luonnonrakkaus), Fröbel (pienten lasten kasvatus), sekä Seguin (mm. matemaattisten välineiden kehittäminen).

1913

1936

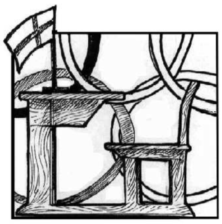
1951

Montessori päätteli, että menetelmä soveltuisi myös ”normaalilapsille”. Hän vei vammaisille lapsille kehittämiään välineitä Rooman slummialueelle perustamaansa "Lasten taloon"(Casa dei Bambiini) lahjoituksina saatujen lelujen lisäksi. Lapset olivat alle kouluikäisiä työväestön vähempiosaisia lapsia. Viittäkymmentä lasta hoiti opettajaopintonsa heti alussa keskeyttänyt käsityöläisnainen, jolla ei ollut aikaisempia kokemuksia lapsiryhmän ohjaamisesta.

Montessori näytti hänelle välineiden käytön, ja hänen ohjaaminaan lapset oppivat työskentelemään montessorivälineillä pitkäjänteisesti ja itsenäisesti, sekä menestyksellisesti mm. kirjoittamaan, lukemaan ja laskemaan. Heitä tultiin myöhemmin hämmästelemään eri puolelta maailmaa.

Montessorimenetelmä erosi humanistisuudessaan täysin niistä opettajan auktoriteettiin perustuvista ja tiukkaa kuria vaativista kasvatusmenetelmistä, joita Italiassa ja kaikkialla muuallakin käytettiin. Lapsen salaisuus onkin Montessorin mielestä ne suunnattomat voimavarat, jotka lapsella on kasvunsa ja kehityksensä ohjaamiseen. Lapsi luo itse itsensä, ja tätä luomisprosessia ei aikuinen voi määrätä. Lapsi ansaitsee tässä työssä aikuisen kunnioituksen.

Montessoripedagogia pohjautuu Montessorin työskentelyyn lasten kanssa, hänen lapsista tekemiinsä havaintoihin ja havaintojen tutkimiseen. Hänen työssään pääosassa on lapsi, hän itse kiistää luoneensa mitään metodia.



Rolf Nevanlinna -instituutin tukisäätiön väitöskirjapalkinto

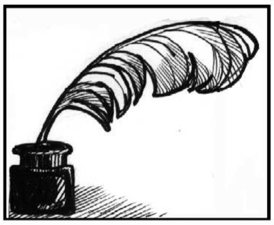
Marjatta Näätänen

Rolf Nevanlinna-instituutin tukisäätiön väitöskirjapalkinnon vuoden 2006 parhaasta matematiikan alaan kuuluvasta väitöskirjasta sai filosofian tohtori Mikko Stenlund Helsingin yliopistosta.

Väitöskirjan aihe liittyy kaaosteoriaan. 1800-luvun lopulla Henri Poincaré tutki kolmen kappaleen ilmiötä ja biasymptoottisia ratoja, toisin sanoen ratoja, jotka lähestyvät ajan suhteen sekä menneisyydessä että tulevaisuudessa asymptoottista rataa, jossa liike on säännöllistä. Tällaisten biasymptoottisten ratojen lähellä esiintyy kaoottista liikettä. Tästä Poincarén havainnosta voidaan katsoa kaaosteorian alkaneen.

V. I. Arnold osoitti 1960-luvulla, että kaoottista liikettä voi esiintyä jos asymptoottisten ratojen ns. stabiili ja epästabiili monisto leikkaavat transversaalisesti ja esitti fysikaalisen mallin, jossa tätä ilmiötä voi tutkia. Arnoldin malli koostuu heilurista, johon vaikuttaa useita ajan suhteen jaksollisia voimia. Tehtävänä on tutkia monistojen leikkausta kun voimien kokoa kuvaava parametri on pieni. Väitöskirjassa on osoitettu, että leikkauskulma on erittäin pieni tämän parametrin funktiona. Erityisesti muodollinen Taylorin kehitelmä häviää identtisesti. Työssä johdetaan asymptoottinen lauseke kulmalle ja todistetaan sille yläraja.

Teorian sovelluskohteena on esimerkiksi aurinkokunnan planeettojen liike. Tämä on hyvin säännöllistä inhimillisessä aikaskaalassa, mutta miljoonien vuosien kuluessa se näyttää olevan kaoottista. Stenlundin väitöskirjan ohjaajana on toiminut professori Antti Kupiainen. Stenlund on esittänyt työssään uusia menetelmiä ilmiön ymmärtämiseksi ja on nyt tutkijana New York Universityn Courant Instituutissa, joka on eräs maailman johtavia matematiikan laitoksia.



Matematiikka esillä Helsingin yliopiston museossa

Matti Lehtinen
Maanpuolustuskorkeakoulu

Helsingin yliopisto on vanha ja arvokas oppilaitos, ja sille on vuosisatojen kuluessa kertynyt melkoisesti Suomen kulttuurihistorian kannalta arvokasta asiakirjaa ja esinettä. Näiden esillä pitämiseksi yliopisto on perustanut museonkin. Sen tilat sijaitsevat Arppeanumiksi ristityssä entisessä geologian laitoksessa, Helsingin Senaatintorin kulmalla, osoitteessa Snellmaninkatu 3. (Arppeanumin nimen takana on 1800-luvun puolivälissä vaikuttanut kemian professori Adolf Edvard Arppe. Arppeanum rakennettiin alun perin Arppen aikana yliopiston kemian laitokseksi.) Monien muiden museoiden tapaan Helsingin yliopiston museossakin on pysyvän näyttelyn lisäksi vaihtuvia teemanäyttelyitä.

Marraskuun lopussa Arppeanumissa avattiin näyttely, jonka nimi on **Matematiikka – perinnettä ja sovelluksia**. Näyttely on avoinna maaliskuun 9:nteen 2008 saakka. Museo on auki tiistaista perjantaihin klo 11–17 ja viikonloppuisin klo 11–16.

Museossa kun ollaan, näyttelyn painopiste on lähempänä otsikon sanaa perinne. Erityinen syy järjestää näyttely juuri vuonna 2007 on *Lars Ahlforsin* syntymän satavuotismuisto (Solmu 1/2008). Kunniapaikalla näyttelyssä onkin merkittävin suomalaisen matematiikan kautta aikojen saama tunnustus, Lars Ahlforsille vuonna 1936 luovutettu *Fieldsin mitali*, "matematiikan Nobel-palkinto". Näyttelyn avajaisissa puhunut akateemikko *Olli Lehto* siteerasi mitalin luovutukseen liittynyttä lausuntoa, joka osoitti huomionosoituksen ajatellun Ahlforsin ohella myös sille suomalaiselle funktioteorian koulukunnalle, jonka kasvatti Ahlfors oli.

Lars Ahlforsin perikunta on lahjoittanut mitalin Helsingin yliopistolle. Alkuperäistä mitalia säilytetään yleensä kassakaapissa, ja sen jäljennös on esillä yliopiston matematiikan laitoksen ala-aulassa Kumpulan kampuksella. Sen oikean ja alkuperäisen voi nyt siis jonkin aikaa nähdä Arppeanumissa, ennen kuin se taas kätketään lukkojen taakse. Lukot kuuluvat olevan tehtäväänsä sopivat, sillä kaapin oven avaaminen ja mitalin esiin saaminen näyttelyä varten oli tuottanut ongelmia.

Suurmiehiä

Matematiikkanäyttelyn perinneosuus esittelee pähkinänkuoressa Suomen matematiikan historian merkkipylväät kahdensadan vuoden ajalta muotokuvin, arkistoista ja kirjastoista saaduin asiakirjoin ja julkaisuin sekä Olli Lehdon laatimin ytimekkäin esittelyteksten. Esitellyt henkilöt ovat kaikki olleet sidoksissa Helsingin yliopistoon tai sen edeltäjään, Turun Akatemiaan. Näyttelyn historiallinen kaari alkaa *Anders Lexellistä* (1740–84). Lexell opiskeli ja tuli dosentiksi Turun Akatemiassa. Hän siirtyi kuitenkin pian Pietariin, siellä tuolloin vaikuttaneen suuren *Leonhard Eulerin* assistentiksi ja seuraajaksikin. Lexell nimitettiin professoriksi myös Turkuun, mutta hän ei koskaan ehtinyt palata Suomeen virkaansa hoitamaan. Nykyaikana

Lexell muistetaan ennen kaikkea tähtitieteellisistä laskuistaan. Hän oli itse asiassa ensimmäinen, joka määritti Uranus-planeetan kiertoradan, vaikka kunnia tästä yleensä annetaan kuuluisalle ranskaiselle Pierre Simon Laplacelle.

Seuraavan virstanpylvään Suomen matematiikan historiassa muodostaa *Lorenz Lindelöf* (1827–1908). Lindelöfin aikana yliopisto oli jo siirtynyt Helsinkiin ja saanut nimekseen Keisarillinen Aleksanterin-yliopisto. Lindelöf kävi ahkerasti Pariisissa ja hän alkoi integroida Suomea kansainväliseen matemaattiseen yhteisöön. Lorenz Lindelöfiä edustaa näyttelyssä hänestä yliopiston rehtorina maalattu muotokuva ja monografia *Leçons de Calcul des Variations*. Tämä vuonna 1861 Pariisissa painettu teos on ensimmäinen suomalaisen kirjoittama kansainvälisesti merkittävä matemaattinen kirja. Lindelöf, vaatimattomista oloista lähtenyt kappalaisen poika, oli yhteiskunnallisesti aktiivinen ja lopulta hänet aateloitiinkin. Matematiikan professorin tehtävistä hän siirtyi Kouluylihallituksen, Opetushallituksen edeltäjän, johtajaksi. Ruotsinkielisen Lindelöfin julkaisema "suomalais-muukalainen"matematiikan sanasto, lajissaan ensimmäinen, on myös näyttelyssä esillä.

Lindelöfin seuraajaa matematiikan professuurissa, *Magnus Gustav* eli *Gösta Mittag-Leffleriä* (1846–1927) edustaa näyttelyssä mm. valokuva komeasta vaaleanpunaisesta linnaa muistuttavasta rakennuksesta. Ruotsalainen Mittag-Leffler oli matemaatikkona nuori lahjakkuus hakiessaan Lindelöfiltä vapautunutta virkaa, mutta hän ei osannut suomea. Tunteita nostattaneen kiistan jälkeen hänelle myönnettiin erivapaus suomen kielen taidosta – tätä koskevat asiakirjat saamme näyttelyssä nähdä. Mittag-Leffler toi Suomeen funktioteorian. Hän oli Helsingissä vain muutaman vuoden. Niiden saldoa on matemaattinen jälkikasvu, oppilas *Hjalmar Mellin*, jonka nimi edelleen on esillä matemaattisessa kirjallisuudessa Mellinin muunnoksen takia, ja suomalainen vaimo, jonka mukanaan tuoma varallisuus merkittästi vaikutti siihen, että Mittag-Leffler saattoi rakentaa Tukholman Djursholmiin edellä mainitun linnansa. Linna on kuitenkin yhä matematiikalle ja Suomenkin matematiikalle merkittävä paikka. Siellä toimii matemaattinen tutkimuslaitos Mittag-Leffler-instituutti, jonka suojissa monet nykyään vaikuttavat suomalaismatemaatikot ovat saattaneet harjoittaa työtään. Mittag-Leffler perusti matemaattisen julkaisusarjan *Acta Mathematica*, jossa vuosikymmenten mittaan on ilmestynyt monia tärkeitä matematiikan kehitystä viitoittaneita tutkimuksia.

Suomen matematiikan tutkimuksen varsinainen isä tai kummisetä on Lorenz Lindelöfin poika *Ernst Lindelöf* (1870–1946). Ernst Lindelöf tunnetaan maailmalla monista merkittävistä tutkimustuloksista jotka ulottuvat funktioteoriaan, lukuteoriaan ja topologiaankin. Suomen vanhempi matemaatikkopolvi tuntee Lindelöfin parhaiten loistavasta yliopistomatematiikan oppikirjasarjasta, *Johdatus korkeampaan analyysiin* ja *Differentiaali- ja integraalilasku ja sen sovellutukset I – IV*. Ernst Lindelöfiä edustaa näyttelyssä mm. hänen oppikoulun päästötodistuksensa, jonka kympeissä ei todellakaan ole häpeämistä, ja vuoden 1919 promootiokulkueesta otettu valokuva, jossa promoottori Lindelöf astelee juuri kunniatohtoriksi promovoidun, tuolloin Suomen valtionhoitajana toimineen *C.G. Mannerheimin* edellä.

Lindelöfin yliopistonopettajatoiminnan tuotosta oli loistelias tieteellinen jälkikasvu, jota näyttelyssä edustavat *Rolf Nevanlinna* (1895–1980), *Pekka Juhana Myrberg* (1882–1976), Lars Ahlfors (1907–1996) ja *Kalle Väisälä* (1893–1968). Nevanlinnaa edustavat näyttelyssä muotokuvan lisäksi mm. Nevanlinnan teorian eli kompleksimuuttujan niin sanottujen meromorfifunktioiden arvojen jakautumisen teorian vuonna 1925 Acta Mathematicassa ilmestynyt perusjulkaisu, 1936 ensi kerran ilmestynyt monografia *Eindeutige analytishce Funktionen*, useat kunnianosoituksiin liittyvät dokumentit ja aikanaan televisiossa esitetty dokumenttivideo.

Pekka Myrberg eteni yliopistourallaan aina yliopiston korkeimpaan halintotehtävään, kansleriksi. Kanslerintehtävät jättivät matematiikalle vain rajoitetusti aikaa, ja Riemannin pintojen kansainvälisesti arvostettu tutkija käytti sen pääasiassa kompleksimuuttujan funktioiden iterointia koskeviin selvittelyihin. Myrberg ei ehtinyt nähdä, että hänen hiukan vasemman käden puuhailuina pitämänsä tutkimukset nousivat suureen arvoon, kun kaaosteoria ja fraktaalien teoria löysivät niistä tärkeitä työkaluja itselleen.

Lars Ahlforsin elämää ja työtä valaisevat näyttelyssä paitsi Fieldsin mitali myös vuonna 1935 Acta Mathematicassa ilmestynyt julkaisu *Zur Theorie der Überlagerungsflächen*, joka suoranaisesti oli Fieldsin mitalin myöntämisen perusteena, ja Ahlforsin akateemista uraa pyykittävät nimitysasiakirjat. Ahlfors ehti 1930-luvulla olla nimitettynä Harvardin yliopistoon niin, että nimityskirjassa Helsinkiin vuodelta 1938 Ahlfors nimetään Harvardin professoriksi. Esillä on myös se pöytäkirjanote Harvardista vuodelta 1948, jossa Ahlforsin loppuiän virkasuhde Harvardiin vahvistetaan.

Toisin kuin edellä mainitut matemaatikot, Kalle Väisälä ei ollut funktioteoreetikko eikä Helsingin yliopiston professorikaan, vaan väitöskirjassaan viidennen asteen yhtälön ratkaisumahdollisuuksia selvitellyt algebran tutkija ja professori Tarton ja Turun yliopistoissa sekä Teknillisessä korkeakoulussa. Monet pitävät Väisälän oppikoulua varten kirjoittamia algebran ja geometrian oppikirjoja edelleen parhaina lajeissaan.

Nykyaikaa

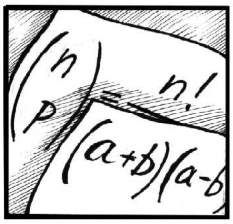
Arppeanumin matematiikkanäyttelyn tilat eivät ole sallineet nykymatematiikan ja sen sovellusten koko kirjon esittelyä. Muutama mielenkiintoinen esimerkki nykymatemaatikkojen työstä saa edustaa koko suurta kenttää. Helsingin yliopistossa kun ollaan, esille ovat päässeet professorien *Lassi Päivärinta* ja *Mika Seppälä* ryhmät.

Lievästi hammaslääkärin potilastuolia muistuttava laite osoittautuukin koneeksi, jolla voidaan läpivalaista hampaita. Matematiikka astuu sananmukaisesti kuvaan, kun sitä käsitellään Helsingin yliopiston sovelletun matematiikan tutkijoiden kehittämin nykyaikaiseen matemaattiseen inversioteoriaan perustuvin keinoin: melko epämääräinen hammashahmo muuttuu hämmästyttävän teräväksi ja varmaankin mahdollisten vikojen diagnosoinnin kannalta huomattavan käyttökelpoiseksi kuvaksi. Inversioteorian sovelluksena esitellään myös, miten asteroidin muotoa voidaan päätellä sen maahan heijastaman valon pienistä vaihteluista. Toinen esiin otettu matematiikan sovellus ovat maan kaarevan pinnan ja karttalehden tasopinnan vastaavuudet. Karttaprojektioiden teoria on läheistä sukua suomalaisen funktioteorian tutkimuksen yhden päälinjan, kvasikonformisten kuvausten teorian kanssa.

Monille kansalaisille matematiikka on tuttu siksi, että sitä opetetaan ja opiskellaan. Tämäkin matematiikan piirre tulee näyttelyssä esiin: kävijä saa kokeilla Helsingin yliopistossa kehitteillä olevaa järjestelmää, joka muodostaa automaattisesti ja rajattomasti matematiikan harjoitustehtäviä, vieläpä erikielisiä. Matematiikan oppimisen pääprosessin on tapahduttava itse kunkin pään sisällä, joten järjestelmää, joka automaattisesti ratkaisisi kaikki harjoitustehtävät, ei liene syytä kehittää.

Käykää itse katsomassa!

Arppeanumin matematiikkanäyttely ei ole puuduttavan laaja. Se tarjoaa kuitenkin monta mielenkiintoista kosketuspistettä sinänsä abstraktiin ja näyttelykohteeksi ensi ajatuksessa huonosti sopivaan kohteeseensa.



Lukuteorian helmiä lukiolaisille

Jukka Pihko
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Taustaa

Sain 24.4.2007 Marjatta Näätäseltä sähköpostiviestin, jonka aihe oli "Fwd: yhteistyökurssi, Jukka, kiinnostaako?" Eteenpäin lähetetyn viestin olivat allekirjoittaneet Ressun lukion matematiikan opettajat Hilkka Taavitsainen, Mika Spåra ja Susanna Moksunen. Sen sisältönä oli ehdotus matematiikan kurssin järjestämiseksi Ressun lukiossa, tarkoituksena tarjota oppilaille mielenkiintoista matematiikkaa lukiokurssien ulkopuolelta. Mahdollisena aiheena mainittiin mm. lukuteoria. Hetkeäkään harkitsematta nielaisin syötin ja ilmoitin olevani halukas pitämään lukuteorian kurssin. Olen nimittäin usein ajatellut, että olisi hauskaa päästä esittelemään alaani koululaisille, mutta tähän suuntaavat pyrkimykseni oli aina enemmän tai vähemmän tylysti tyrmätty sillä seurauksella että olin jo kokonaan luopunut toivosta.

Hilkka Taavitsainen kutsui minut koululle 3.5.2007 ideoimaan kurssin sisältöä. Paikalla olivat myös muut edellä mainitut opettajat. Minulla oli valmis ehdotus kurssin ydinkohdista: Lagrangen lause neljän neliön summista (joka sanoo, että jokainen positiivinen kokonaisluku voidaan esittää neljän kokonaisluvun neliön summana) ja Fermat'n Suuren Lauseen tapaus $n = 4$. Näistä edellinen on suurimpia suosikkejani: pidin siitä dosenttikoeluennon vuonna 1994. Mitä taas tulee jälkimmäiseen, niin se on ollut mielessäni sopivana aiheena Solmu-lehden kirjoitukseen, jota minulta on joskus pyydetty mutta jota en ole saanut aikaiseksi. Opettajilla ei ollut mitään ehdotustani vastaan vakuutettuani, että kyseiset melko 'kovat' tulokset voidaan todistaa suhteellisen helposti (vaikka ei ihan lyhyesti) lukuteorian peruskäsitteiden avulla. Palaverimme päättyi siihen, että Hilkka Taavitsainen lainasi minulle koulussa käytetyn oppikirjan [3] ja lupasin palata kurssin tarkempaan sisältöön tutustuttuani teokseen tarkemmin.

Kirjassa [3] mainitaan Aritmetiikan peruslause (joka sanoo, että jokainen ykköstä suurempi kokonaisluku voidaan esittää alkulukujen tulona, vieläpä tekijöiden järjestystä vaille yksikäsitteisesti), mutta jostakin syystä sitä ei todisteta. Kuten tulemme näkemään, todistus ei ole kovinkaan vaikea, mutta tätä lausetta, joka todella on nimensä veroinen, ei voi mitenkään pitää itsestään selvänä. Samassa kirjassa mainitaan myös täydelliset luvut ja Mersennen alkuluvut, mutta ei kerrota, että niiden välillä vallitsee läheinen yhteys. Koska kirjassa mainitaan Lagrangen lause (ilman todistusta) ja Fermat'n Suuri Lause ((tietenkin!) ilman todistusta), niin saatoin todeta, että kurssini, jonka pääkohdat olisivat 1) Aritmetiikan peruslauseen todistus, 2) Täydelliset luvut, Mersennen alkuluvut ja niiden välinen yhteys, 3) Lagrangen lause neljän neliön summista ja 4) Fermat'n Suuri Lause tapauksessa $n = 4$, lähes saumattomasti liittyi Ressun lukiossa käytettyyn oppikirjaan [3]. Huomattakoon, että kurssin sisältö muodostui subjektiivisten mieltymysten ja sattuman vaikutusten tuloksena; jonkun toisen pitämä lukuteorian kurssi olisi todennäköisesti ollut täysin erilainen.

Kurssille piti sitten vielä keksiä vetävä nimi ja iskulauseita, joiden avulla sitä voisi mainostaa. Nimen ”Lukuteorian helmiä” lainasin Khintsinin tunnetusta teoksesta [5]. Iskulauseita olivat mm. ”koulukurssin ylittävää mutta kaikille ymmärrettävää lukuteoriaa” ja ”kurssilla tehdään sukelluksia matematiikan historiaan”. Viimeksi mainitulla tarkoitin sitä, että matematiikan ohessa kertoisin myös aiheeseen liittyvistä matemaatikoista. Näitä tarinoita en ole ottanut tähän mukaan, jottei esityksestä tulisi liian laaja. Sen sijaan viittaan netissä olevaan helppokäyttöiseen MacTutor-arkistoon [4], josta lukija saa tarvittaessa tietoja (ja kuvia) matemaatikoista. Eräässä toisessa mielessä (jos ajattelemme matemaattisia käsitteitä ja tuloksia) kurssilla oltiin itse asiassa sukelluksissa matematiikan historiassa lähes koko ajan 1700-luvulla ja sitä varhaisemmalla ajalla; vain sillöin tällöin nousimme pintaan, kurkistamaan periskoopista mitä nykyään tapahtuu. Tätä ’aihe’-historiaa käsittelen esityksessäni jonkin verran.

Syksyllä 2007 pidetylle ”Lukuteorian helmiä”-kurssille ilmoittautui 14 oppilasta, joista kymmenkunta jaksoi seurata loppuun saakka. Osa oppilaista oli sellaisia, jotka eivät olleet suorittaneet ”Lukuteoria ja logiikka”-kurssia. Minun oli siis aloitettava aivan peruskäsitteistä. Käytettävissä oli 13 tuntia (missä yksi tunti sisälsi 75 minuuttia). Tunteja oli kolme viikossa, joten jos ajatellaan että ensimmäinen tunti kului kurssin esittelyyn, niin kurssin neljälle kohdalle oli kullekin viikko varattuna. Aika riitti (omasta mielestäni) hyvin: sain sanottua sen mitä olin suunnitellut.

Kurssin päätyttyä mieleeni juolahti, että kurssimateriaali saattaisi kiinnostaa Solmun lukijoita. Sen lukeminen ei edellytä lukuteorian tuntemista, mutta vaatii ehkä hieman vaivannäköä. Tarkoitukseni on esittää yksityiskohtaiset todistukset, paitsi silloin kun asia on itsestään selvä tai kun todistus olisi samanlainen kuin joku aikaisemmin (tai myöhemmin) esitetty. Mitään yleiskuvaa lukuteoriasta en yritäkään antaa; kurssin nimeenkin viitaten tarkoitukseni on ainoastaan esitellä muutama tarkkaan valittu hieno tulos. (Luvussa 2 tämä on Eukleideen ja Eulerin antama karakterisointi parillisille täydellisille luvuille.) Luonnollisesti on eduksi, jos lukijalla on perustiedot lukuteoriasta tai käytettävissä [3] tai jokin vastaava lukion kirja (kahteen sellaiseen viitataan Apiolan Solmu-artikkelissa [1], joka on oheislukemisena myös paikallaan). Tukeudun esityksessäni pääasiassa Burtonin oppikirjaan [2], johon perustuvaa kurssia ”Johdatus alkeelliseen lukuteoriaan” olen kolme kertaa luennoinut Helsingin yliopistossa. Tätä kirjaa voin suositella (ensimmäiseksi) jatkolukemiseksi sellaisille, joiden tiedonnälkää tämä Ressun lukiossa pitämäni kurssi ei saa tyydytetyksi; muitakin hyviä oppikirjoja on mainittu (verkkoversion) viitteissä.

Loppukevennyksen antakoon matemaatikko ja kirjailija Klaus Vala (1930–2000). Teoksessa *Nikolai Kval* [6] hän kirjoittaa kertomuksen ”Kaksi, kolme ...” päätteeksi sivulla 87: ”Arvelen kuitenkin voivani päätellä mihin suuntaan maailmankuulu baijerilainen olutkulttuuri on menossa. Olen nimittäin opiskellut joskus niinkin turhaa asiaa kuin lukuteoriaa. Kaikki me haksahdamme elämämme aikana joihinkin hullutuksiin.”

Itse helmiin voi tutustua Solmun verkkoversiossa, osoitteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/2008/lukuteorian_helmia.pdf`

Viitteet

[1] Apiola, Heikki: Lukuteoriaa ja salakirjoitusta, osa 1, *Solmu* 3/2007, 7–13.

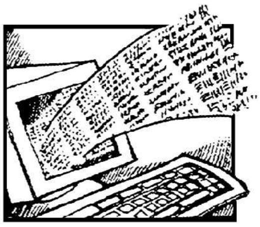
[2] Burton, David M.: *Elementary number theory*, Revised printing, Allyn and Bacon, Inc., 1980. Useita painoksia, esim. 6th. ed., McGraw-Hill, 2005.

[3] Hautajärvi, Ottelin, Wallin-Jaakkola: *Laudatur 11, Lukuteoria ja logiikka*, Otava, 2006.

[4] `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/`

[5] Khinchin, A. Y.: *Three pearls of number theory*, Graylock Press, 1952.

[6] Vala, Klaus: *Nikolai Kval*, Art House, 1955.



Matematiikkapäivät Maunulassa 9–10.11.2007

Riitta Liira
Maunulan yhteiskoulu
Helsingin matematiikkalukio

Maunulan yhteiskoulussa järjestettiin jo viidennen kerran matematiikkapäivät matematiikasta kiinnostuneille lukiolaisille. Järjestäjät olivat Maunulan yhteiskoulun opettajat ja dos. Marjatta Näätänen Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitokselta. Rahoituksesta huolehtivat LUMA-keskus ja Maunulan yhteiskoulu. Matematiikkapäiville voitiin ottaa yhteensä 30 lukion opiskelijaa Munkkiniemen yhteiskoulusta, Kaurialan lukiosta Hämeenlinnasta, Ressun lukiosta, Luonnontiedelukiosta sekä Maunulan yhteiskoulusta ja Helsingin matematiikkalukiosta

Perjantaina tutustuttiin matematiikkaohjelma Mathematicaan. Aluksi TKK:n matematiikan lehtori (emeritus) Simo Kivelä esitteli ohjelmaa, jonka jälkeen opiskelijat itse tekivät pieniä harjoituksia Kivelän ja Ressun lukion matematiikan lehtori Mika Spåran opastuksella. Lauantaina TKK:n matematiikan lehtori Georg Metsalo luennoi aiheesta projektiivinen taso: meno-paluu äärettömyyteen ja dualiteetti tasokäyrille. Maittavan lounaan jälkeen opiskelijat tutkivat tasokäyrien duaalikäyriä Mathematicaa käyttäen Kivelän ja Spåran opastuksella. Seuraavassa muutamia osallistujien kommentteja.

”Ohjelma oli haastava, mutta mielenkiintoinen ja laskuharjoitukset konkretisoivat teoriaa mukavasti. Toivottavasti voimme osallistua tulevinakin vuosina.”

”Oli hienoa tavata samanhenkisiä matematiikasta kiinnostuneita nuoria.”

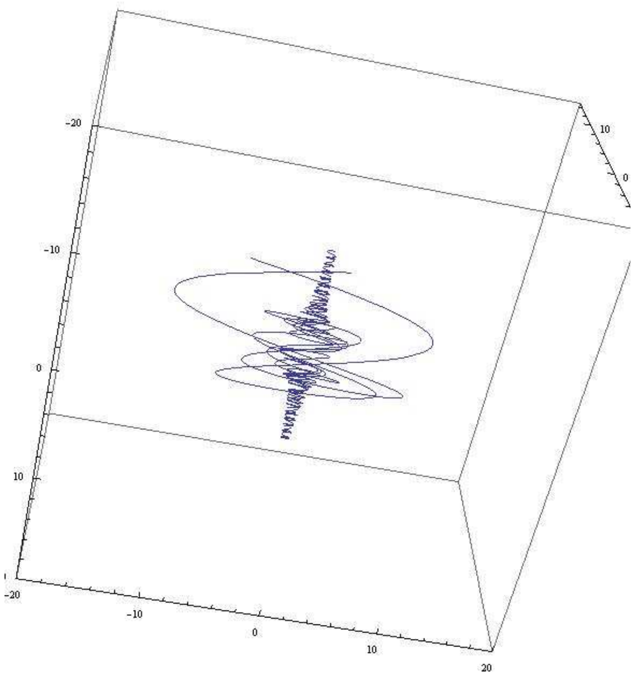
”Päivän anti oli kiinnostava ja innostava.”

”Maunula tarjosi hyvää ruokaa.”

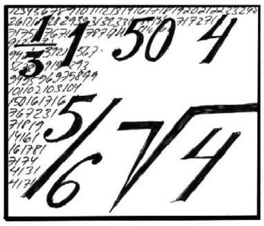
Ohessa muutama kuva tapahtumasta. Tuosta vieteristä saa evejulian yhtälön

$$(x, y, z) = \left(\frac{\sin(at)}{b}, \frac{\cos(bt)}{t}, ct\right)$$

muodon selville. Kerrointen a, b ja c arvoja ei ole tiedossa eikä muuttujan t saamia arvoja. Tytöt kokeilivat ja saivat tällaisen aikaan.



Myös Maunulan koulun nettisivuille tulee tapahtumasta lyhyt esitys. `http://www.mayk.edu.hel.fi`



Onko $\sqrt{-1}$ olemassa? Keskipituinen kertomus lukujen olemuksesta, 1. osa

Antti Valmari

Tiivistelmä

Tämän kirjoituksen tavoitteena on kertoa lukujen olemuksesta ja matemaattisen määrittelemisen luonteesta tavallista helppotajuisemmin. Kirjoituksessa pohditaan muun muassa, miksi $\frac{1}{0}$ ei ole luku, mutta $\sqrt{-1}$ on. Myös selviää, miksi uusien lukujen keksiminen on loppunut kompleksilukuihin.

Lukuja ja lisää lukuja

Luonnolliset luvut 0, 1, 2, 3, ... tuntuvat koulun matematiikan opintojen jälkeen tutuilta ja turvallisilta. Murtoluvut on helppo ymmärtää vaikka kakkuviipaleiden avulla. Negatiivisia lukuja näemme lämpömittarissa ja huomaamme, että niissäkään ei ole kyse mistään omituisesta asiasta: nehän ovat vain muitten lukujen jatke nollasta alaspäin. Negatiiviset luvut tuntuvat hyvin todellisilta ainakin silloin, kun maksetaan asuntolainan lyhennystä!

Kaikkia näitä lukuja yhdessä kutsutaan *rationaaliluvuiksi*. Sana "murtoluku" lienee monille tutumpi. Jos ollaan tarkkoja, se ei tarkoita lukuarvoa vaan luvun esitystapaa. Esimerkiksi 2 ei ole murtoluku mutta $\frac{6}{3}$ on, vaikka ne molemmat esittävät samaa lukuarvoa. "Rationaaliluvut" tarkoittavat niitä lukuarvoja, jotka voidaan esittää murtolukuina.

Muinaiset kreikkalaiset huomasivat, että neliön lävistäjän pituuden suhde sivun pituuteen ei ole esitettävissä murtolukuna [1, ss. 118–120]. Toisin sanoen, $\sqrt{2}$ ei ole rationaaliluku. Rationaaliluvut eivät siis sisällä kaikkia lukusuoran lukuja. Niitä lukusuoran lukuja, jotka eivät ole rationaalilukuja, kutsutaan *irrationaaliluvuiksi*. Kaikki lukusuoran luvut yhdessä ovat *reaaliluvut*.

Sana "rationaalinen" tarkoittaa järkevää, suunnitelmallista ja tarkoituksenmukaista [3], siis tyhmän tai älyttömän vastakohtaa. Sanan "rationaaliluvut" voisi siis leikkimielisesti suomentaa "järjenmukaiset luvut", "irrationaaliluvut" ovat "järjenvastaisia" tai "älyttömiä" lukuja, ja "reaaliluvut" ovat "todelliset luvut". Nimet varmaankin kuvastavat sitä hämmennystä, mikä ihmisillä on joskus ollut uusien lukutyyppien edessä.

Irrationaaliluvut todella ovat hankala asia. Niitä on nimittäin aivan liikaa. Kokonaislukuja on niin vähän, että jokaiselle on riittänyt oma nimi. Tarkemmin sanoen, mikä tahansa kokonaisluku voidaan esittää päättyvänä jonona merkkejä siten, että ensimmäisenä on tai ei ole etumerkki "$-$", ja sen jälkeen on jokin äärellinen määrä numeromerkkejä "0", "1", "2", ..., "9". Itse asiassa tämä esitystapa antaa jokaiselle kokonaisluvulle monta nimeä — esimerkiksi 0, 00 ja -0 ovat sama luku, mutta se ei haittaa. Tärkeää tässä on vain se, että jokaisella kokonaisluvulla on *ainakin* yksi nimi.

Myös jokaisella muulla rationaaliluvulla on ainakin yksi nimi — itse asiassa äärettömän monta nimeä. Ne saadaan kirjoittamalla vaakasuoran viivan päälle yksi ja sen alle toinen kokonaisluku, tai vaihtoehtoisesti kokonaisluku, "/" ja kokonaisluku. Esimerkiksi $\frac{-23}{456}$ ja $\frac{46}{-912}$ ovat saman luvun kaksi eri nimeä, ja ne voidaan esittää myös $-23/456$ ja $46/-912$.

Mutta jokaiselle irrationaaliluvulle ei riitä omaa nimeä, sillä nimiksi hyväksytään vain päättyvät merkkijonot. Jokainen irrationaaliluku voidaan tosin esittää päättymättömänä desimaalilukuna — harmi vain, että sellaisten kirjoittaminen joudutaan aina jättämään kesken, ja loppu korvaamaan kolmella pisteellä: $\sqrt{2} = 1,4142135\ldots$. Siksi sellaista esitystapaa ei kelpuuteta nimeksi. Päättyvien esitystapojen puutteesta aiheutuu ongelmia, joiden vuoksi matemaatikot alkoivat kunnolla ymmärtää irrationaalilukuja vasta 1800-luvulla [1, ss. 783–789].

Irrationaalilukujen ongelmat ovat niin vaikeita, että emme tarkastele niitä tällä kertaa tämän enempää. Tämän kirjoituksen pääaiheena on toinen, paljon helpompi ongelma: imaginaariluvut ja kompleksiluvut. Joku on ehkä joskus kuullut niistä huhuja, joku toinen ymmärtää ne hyvin.

"Imaginaarinen" tarkoittaa kuviteltua, epätodellista [3]. Siis nimikin jo kertoo, että imaginaariluvut ovat outoja kummajaisia. Ne eivät mahdu lukusuoralle, vaikka, kuten nähtiin, lukusuoralla on niin monta lukua, että jokaiselle ei edes riitä nimeä. Mihin niitä tarvitaan? Mitä niillä lasketaan tai mitataan? Ovatko ne edes oikeasti olemassa?

Laskulakeja

Luvut eivät olisi alkuunkaan niin hyödyllisiä kuin ovat, ellei olisi keksitty *laskutoimituksia*. Tärkeimmät laskutoimitukset ovat yhteenlasku ja kertolasku.

Kuten hyvin tiedetään, yhteenlaskun lopputulos on riippumaton siitä, missä järjestyksessä luvut lasketaan yhteen. Esimerkiksi $(8+5)+2 = 13+2 = 15$, $(8+2)+5 = 10+5 = 15$, $(2+5)+8 = 7+8 = 15$ ja niin edelleen. Tämä on tärkeä asia, sillä kaikilla laskutoimituksilla ei ole tätä ominaisuutta. Esimerkiksi $(8-5)-2 = 3-2 = 1$ ja $8-(5-2) = 8-3 = 5$, joten $(8-5)-2 \neq 8-(5-2)$. Myös $2^3 = 8 \neq 9 = 3^2$.

Yhteenlaskun lopputuloksen riippumattomuus laskujärjestyksestä koostuu oikeastaan kahdesta eri asiasta. Ensiksi, yhteenlasku on *vaihdannainen*, eli ovatpa a ja b mitä lukuja tahansa, aina pätee $a+b = b+a$. Edellä oleva esimerkki $2^3 \neq 3^2$ osoittaa, että potenssilasku ei ole vaihdannainen. Myöskään vähennyslasku ei ole vaihdannainen, koska $3-2 = 1 \neq -1 = 2-3$. Yhteenlasku on myös *liitännäinen*, eli $(a+b)+c = a+(b+c)$, missä nytkin a, b ja c saavat olla mitä lukuja tahansa. Vähennyslasku ja potenssilasku eivät ole liitännäisiä. Vähennyslaskusta oli jo esimerkki, ja potenssilaskusta esimerkiksi kelpaa $(2^1)^3 = 8 \neq 2 = 2^{(1^3)}$. Myös kertolasku on vaihdannainen ja liitännäinen, ja jakolasku ei ole kumpaakaan.

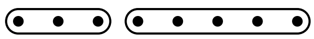
Lukujen peruslaskutoimitusten tapauksessa vaihdannaisuus ja liitännäisyys kulkevat käsi kädessä. Toisin sanoen, kukin peruslaskutoimitus on joko molempia tai ei kumpaakaan. Matemaatikot ovat kuitenkin havainneet hyödylliseksi erottaa vaihdannaisuuden ja liitännäisyyden eri asioiksi, koska matematiikassa on myös laskutoimituksia, joilla on vain toinen näistä ominaisuuksista. Esimerkiksi matriisien kertolasku ja funktioiden yhdistäminen ovat liitännäisiä mutta eivät vaihdannaisia, ja pyöristysvirheiden aiheuttamien ilmiöiden vuoksi taskulaskinten ja tietokoneiden käyttämien niinsanottujen liukulukujen yhteenlasku on vaihdannainen mutta ei liitännäinen. Sitäpaitsi vaihdannaisuus ja liitännäisyys on helpompi esittää kaavoina, kun ne määritellään erikseen.

Lukujen yhteen- ja kertolaskuun liittyy tärkeä ne yhdistävä sääntö, jota sanotaan *osittelulaiksi*. Jos a, b ja c ovat mitä tahansa lukuja, niin $a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c)$. Esimerkiksi $8\cdot(5+2) = 8\cdot 7 = 56$ ja myös $(8\cdot 5)+(8\cdot 2) = 40+16 = 56$. (Tässä on käytetty sulkuja enemmän kuin olisi välttämätöntä, jotta laskujärjestys näkyisi mahdollisimman selvästi.) Jos samaa yritetään toisinpäin, siis yhteen- ja kertolaskun roolit vaihdettuina, niin asia ei toimikaan: $8+(5\cdot 2) = 8+10 = 18$, mutta $(8+5)\cdot(8+2) = 13\cdot 10 = 130 \neq 18$.

Miksi lukujen laskutoimitukset noudattavat näitä lakeja? Miksi ne toisaalta eivät noudata joitakin kaavoja, jotka näyttävät yhtä hyviltä kuin niiden noudattamat lait? Miksi esimerkiksi $a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c)$ toimii, mutta $a+(b\cdot c) = (a+b)\cdot(a+c)$ ei toimi? Tämän kysymyksen vastaus koostuu kahdesta osasta.

Ensiksi, luvut on otettu käyttöön esittämään kappalemääriä, pituuksia, pinta-aloja ynnä muita sellaisia, ja kokemuksemme mukaan kappalemäärät ja niin edelleen noudattavat näitä lakeja. Esimerkiksi yhteenlaskun $5+3$ vaihdannaisuutta voi havainnollistaa piirtämällä yhteenlaskettavat määrät vierekkäisinä pistejoukkoina:

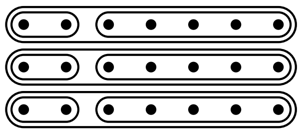
Kun kuvan kääntää ylösalaisin, se alkaakin esittää laskutoimitusta $3+5$:



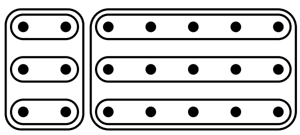
Meillä kaikilla on pienestä pitäen runsaasti kokemusta saman kuvan katsomisesta eri suunnista. Sen ansiosta olemme varmoja, että kuvassa olevien pisteiden määrä ei muutu siitä, että kuva käännetään ylösalaisin. Pelkkä ajatuskin muuttumisesta tuntuu ihan hullulta! Myös olemme varmoja, että asia ei johdu käyttämästämme pisteiden määristä 5 ja 3, vaan sama toimii mille määrille tahansa. Siis pistejoukkojen yhdistäminen tällä tavalla on vaihdannainen operaatio.

Kertolaskun vaihdannaisuutta voi havainnollistaa vastaavalla tavalla, mutta nyt pisteiden ryhmittely vaihdetaan:

Myös osittelulakia voi havainnollistaa kuvilla. Laskutoimitusta $3 \cdot (2 + 5)$ esittää kuva:



Toisella ryhmittelyllä siitä saadaan $(3 \cdot 2) + (3 \cdot 5)$:



Tämäntapainen mielikuviin vetoaminen ja sisäiseen varmuuteen luottaminen riitti matemaatikoille pitkään. Pikkuhiljaa kuitenkin paljastui, että mielikuvat johtavat joskus pahasti harhaan.

Esimerkiksi näyttää itsestään selvältä, että jatkuvalla käyrällä voi olla vain rajallisesti kulmapisteitä, eli pisteitä, joissa käyrän suunta muuttuu yhtäkkisesti. (Voidaan ajatella, että jatkuva käyrä tarkoittaa käyrää, jossa ei ole katkoskohtia, eli se voidaan piirtää nostamatta kynää paperista. Kulmapiste on piste, jossa käyrää esittävällä funktiolla ei ole derivaattaa.) 1800-luvun alkupuolella näin uskottiin yleisesti. Kuitenkin vuonna 1834 Bernhard Bolzano keksi jatkuvan käyrän, jonka jokainen piste on kulmapiste! [1, s. 723] Valitettavasti Bolzanon työt jäivät vähälle huomiolle, ja matemaatikot tulivat yleisesti tietoisiksi tällaisten kummajaisten olemassaolosta vasta Karl Weierstrassin keksittyä sellaisia uudelleen vuonna 1861 [1, s. 784].

Tilannetta kuvaa hyvin piispa George Berkeleyn jo vuonna 1734 kirjassaan "The Analyst" esittämä kiivas kritiikki [1, s. 606]. Berkeley oli suivaantunut, kun eräs "pakanallinen matemaatikko" oli väittänyt kristinuskoa kestämättömäksi. Hän pyrki osoittamaan, että silloinen tapa perustella differentiaali- ja integraalilaskenta ei ole sen parempi. Berkeley ei suinkaan väittänyt tuloksia vääriksi eikä hyödyttömiksi, mutta hän väitti, että tapa, jolla ne johdettiin, oli epäpätevä. Hän väitti, että päättelyssä tehdään raskaita virheitä, jotka kuitenkin kumoavat toisensa. Hän kirjoitti "kaksinkertaisen virheen seurauksena päädytään ei tieteeseen, mutta totuuteen". Nykypäivän näkökulmasta Berkeleyn kritiikki oli aivan oikeaa.

Jos jokin toimii yleensä mutta ei aina, on tilanne kiusallinen. Käytännöllisesti ajattelevan ihmisen näkökulmasta saattaa riittää, että se toimii yleensä. Autoja hajoaa tienposkeen ja tietokoneet takeltelevat, mutta se voidaan sietää, jos sitä ei tapahdu kovin usein. Tietokoneohjelmista ei yleensä edes yritetä saada virheettömiä, vaan testaaminen lopetetaan ja ohjelma toimitetaan markkinoille, kun ohjelma on läpäissyt valmistajan mielestä riittävän perusteelliset testit.

Matemaatikko haluaa kuitenkin olla tuloksistaan varma. Tämä pyrkimys äärimmäiseen varmuuteen on käytännöllisesti ajattelevista ihmisistä ja usein muista tiedemiehistäkin joskus turhauttavaa. Se kuitenkin on matemaatikkojen tapa toimia. Sillä on ollut omat etunsa. Se on pakottanut matemaatikot kohtaamaan silmästä silmään syvällisiä kysymyksiä, jotka käytännöllisemmän asenteen omaava ihminen olisi sysännyt syrjään mielenkiinnottomina. Ilman tätä työtä meillä tuskin olisi esimerkiksi tietokoneita. Toivottavasti ydinvoimaloiden turvajärjestelmien suunnittelijat eivät ajattele, että riittää, että se toimii suurimman osan aikaa!

Siksi matemaatikot ovat pyrkineet rakentamaan luvun käsitteen varmemmalle pohjalle kuin havainnolliset mielikuvat. Tätä työtä tehtiin erityisesti 1800-luvun lopulla. Esimerkiksi Giuseppe Peano esitti vuonna 1894 kuuluisat aksioomansa, joissa luonnolliset luvut rakennettiin kahdesta yksinkertaisesta peruskäsitteestä: nolla ja seuraava luku [1, s. 832]. Gottlob Frege määritteli vuonna 1884 luonnolliset luvut joukko-opin avulla lähtien siitä ajatuksesta, että kaksi joukkoa edustaa samaa lukua, jos ja vain jos niiden alkiot voidaan asettaa yksi–yhteen -vastaavuuteen keskenään [1, s. 831]. Toisin sanoen, tuoleja on sama määrä kuin istujia, jos jokaiselle istujalle riittää oma tuoli eikä tuoleja jää yli. Fregen määritelmä on sikäli erityisen hieno, että sen varaan voidaan rakentaa myös äärettömien lukumäärien teoria.

Kun luonnolliset luvut on saatu määriteltyä, niistä voidaan rakentaa negatiiviset kokonaisluvut ja rationaaliluvut yksinkertaisin keinoin ja reaaliluvut monimutkaisin keinoin. Palaamme tähän lukualueen laajentamiseen jäljempänä.

Yksi nykyisin usein käytetty tapa määritellä matemaattisia käsitteitä on luetella joukko lakeja. Esimerkiksi tietokoneiden ohjelmoinnissa käytetään jonkin verran käsitettä *matroidi*. Älä ole huolissasi, jos sen määritelmä näyttää vaikealta. Se on tässä kirjoituksessa vain havainnollistamassa, miltä nykyaikainen matemaattinen määritteleminen näyttää, eikä sen sisältöä tarvitse ymmärtää. Matroidi määritellään parina (S, ℓ), joka toteuttaa seuraavat ehdot [2, s. 345]:

1. S on äärellinen epätyhjä joukko.

2. ℓ on epätyhjä kokoelma S:n osajoukkoja siten, että jos $B \in \ell$ ja $A \subseteq B$, niin $A \in \ell$.

3. Jos $A \in \ell$, $B \in \ell$ ja A:ssa on vähemmän alkioita kuin B:ssä, niin on olemassa jokin alkio $x \in B - A$ siten, että $A \cup \{x\} \in \ell$.

Toinen, myös ohjelmointiin tiensä löytänyt esimerkki on *tiukka heikko järjestys*, jota merkitsemme "$\prec$" [4, s. 467]. Se on tapa verrata alkioita, ja on melko samantapainen kuin lukujen tuttu suuruusjärjestys "$<$". Sen määritelmä vaatii, että seuraavat ehdot pätevät jokaiselle kohteelle a, b ja c:

1. $a \prec a$ ei päde.

2. Jos $a \prec b$ ja $b \prec c$, niin $a \prec c$.

3. Otetaan käyttöön merkintä $a \asymp b$ tarkoittamaan, että $a \prec b$ ei päde eikä myöskään $b \prec a$ päde. Jos $a \asymp b$ ja $b \asymp c$, niin $a \asymp c$.

Tällainen tapa määritellä asioita voi tuntua aivan mielivaltaiselta — asetetaan vain joukko sääntöjä kuin šhakkipelissä. Mutta se toimii, jopa matematiikan ulkopuolella. Muutoin sitä ei käytettäisi ohjelmoinnissa.

Samaa tapaa voidaan käyttää myös lukujen määrittelemisessä. Silloin peruslaeiksi otetaan jo puheena olleet vaihdannaisuus, liitännäisyys ja osittelulaki. Esitämme ne tällä kertaa ilman tarpeettomia sulkuja. Kuten tavallista, jätämme kertolaskuoperaattorin "$\cdot$" merkitsemättä. Ei ole ennalta selvää, että laskutoimituksen voi aina suorittaa, sillä eihän esimerkiksi nollalla voi jakaa. Siksi tarvitaan säännöt sanomaan, että yhteen- ja kertolasku voidaan aina laskea.

Siis jokaiselle a, b ja c pätee:

(1) $a + b$ on olemassa.

(2) $a + b = b + a$

(3) $(a + b) + c = a + (b + c)$

(4) ab on olemassa.

(5) $ab = ba$

(6) $(ab)c = a(bc)$

(7) $a(b + c) = ab + ac$

Nämä lait eivät yksinään riitä määrittelemään, mitä lukuja on olemassa. Niiden puolesta voisi aivan hyvin olla, että vain parilliset luonnolliset luvut 2, 4, 6, ... ovat olemassa. Tämä johtuu siitä, että kahden parillisen luvun summa ja tulo ovat parillisia. Niinpä parilliset luvut toteuttavat lait (1) ja (4) yksinään — ilman, että mukana on muita lukuja. Muitten lakien toteutuminen seuraa suoraan siitä, että parillisetkin luvut ovat lukuja. (Sen sijaan lakikokoelmalle (1), ..., (7) ei kelpaa se, että vain parittomat luvut olisivat olemassa. Nehän eivät toteuta yksinään lakia (1), sillä $3 + 5 = 8$, ja 8 ei ole pariton.)

Annetut lait eivät siis takaa, että ykkönen on olemassa! Tämän korjaamiseksi lisätään uusi laki. Uudeksi laiksi ei riitä "on olemassa luku nimeltä 1", koska se kertoo ykkösestä vain nimen ja jättää kertomatta, mikä ominaisuus erottaa ykkösen muista luvuista. Määritelmähän ei sisällä ennakkotietoa, mitä mustetahra "1" tarkoittaa, joten sen näkökulmasta "on olemassa luku nimeltä 1" kertoo yhtä paljon kuin "on olemassa luku nimeltä ‡".

Mikä tekee ykkösestä ykkösen? Se, että sillä kertominen ei muuta kerrottua lukua.

(8) On olemassa luku 1 siten, että jokaisella luvulla a pätee $a \cdot 1 = a$.

Lakikokoelma ei ole vieläkään täydellinen. Se ei esimerkiksi riitä takaamaan, että $1 + 1 \neq 1$, kuten tulemme näkemään kohdassa "Mitä luvut ovat?". Se riittää kuitenkin hyvin pitkälle määräämään, miten luvuilla lasketaan. Jos esimerkiksi annetaan luvulle $1 + 1$ nimeksi 2, luvulle $2 + 1$ nimeksi 3 ja niin edelleen, ja jos oletetaan, että luvut 1, 2, 3, ... ovat keskenään erisuuret, niin nämä lait määräävät niiden yhteen- ja kertolaskujen tulokset yksikäsitteisesti. Kaikki tulokset ovat ne mitä olemme koulussa oppineet. Koko tarina on liian pitkä tässä kerrottavaksi, mutta otetaan kaksi esimerkkiä. Määritelmän $2 = 1 + 1$, lain (3) sekä määritelmien $3 = 2 + 1$ ja $4 = 3 + 1$ nojalla pätee $2 + 2 = 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4$. Lakien (7) ja (8) nojalla $2 \cdot (1 + 1) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2 + 2$, mikä edellisen tuloksen ja tiedon $2 = 1 + 1$ kanssa kertoo, että $2 \cdot 2 = 4$.

Pääsemme nyt vihdoin ja viimein toiseen osaan vastauksessamme sivulla 19 esittämäämme kysymykseen: miksi luvut noudattavat niitä lakeja joita ne noudattavat, eikä muita lakeja? Tähän mennessä olemme todenneet, että ne asiat, joista puhumista varten luvut on otettu käyttöön — kappalemäärät, pituudet, pinta-alat ja niin edelleen — noudattavat juuri niitä lakeja, ainakin siinä määrin kuin ylipäänsä on järkevää puhua laeista tällaisten havainnollisiin mielikuviin perustuvien kohteiden yhteydessä.

Nyt kuitenkin olemme luopuneet lukujen rakentamisesta tällaisten mielikuvien varaan ja olemme korvaamassa sen täsmällisellä määritelmällä. Kun lukuja määritellään antamalla laskulakeja, laskulait pätevät siitä yksinkertaisesta syystä, että määritelmässä julistetaan, että ne pätevät! Eikö tämä ole kehäpäätelmä? Eikö tämä ole tyhjän päälle rakentamista?

Ei ole. Matemaatikko saa asettaa mitkä lait tahansa ja tutkia niin syntyvää järjestelmää. Toisinaan käy niin, että lait ovat keskenään ristiriidassa. Määritelty käsite on silloin mahdoton eikä sitä ole olemassa. Tilanne on samankaltainen kuin yhtälöllä, jolla ei ole ratkaisua. Mikä on se luku x, jolle pätee $x = x + 2$? Ei sellaista lukua ole. Jos lait eivät ole keskenään ristiriidassa, niin määritelty käsite on silloin matematiikoiden mielestä olemassa. Kohdissa ""Velkaluvut"" ja "Lopuksi" pohditaan tätä asiaa lisää.

Mutta eikö tästä seuraa, että luonnollisten lukujen lait on valittu mielivaltaisesti, kuten šakkipelin säännöt? Ei. Lakeja ei ole valittu mielivaltaisesti. Ne on valittu sen mukaan, miten uskomme kappalemäärien, pituuksien ja pinta-alojen käyttäytyvän. Luvut noudattavat lakeja (1), ..., (8), koska olemme tahallamme määritelleet luvut niin, että ne noudattavat niitä, ja olemme tahallamme määritelleet ne niin, jotta ne käyttäytyisivät samalla tavalla kuin asiat, joita haluamme esittää luvuilla.

Asiassa on vielä yksi tärkeä puoli. Vaikka määritelmiä voi asettaa miten vain, silti ei saada aikaan minkälaisia lukujärjestelmiä tahansa. Jatkossa tulemme esimerkiksi näkemään, että jos halutaan lukujärjestelmä, joka sisältää kaikki reaaliluvut ja jotain muutakin, niin vaihtoehtoja on vain yksi. (Täsmennämme jatkossa, mitä tarkoitamme sanoilla "luku" ja "lukujärjestelmä".) Vaihtoehtoisia määritelmiä on monta. Kuitenkin, kun niiden tuottamia järjestelmiä katsotaan tarkasti, huomataan, että ne ovat yksi ja sama järjestelmä esitettynä eri tavoin.

Siis luvut noudattavat niitä lakeja mitä noudattavat, koska vain sellaisia lukujärjestelmiä on olemassa. Muita lakeja noudattavia järjestelmiä on olemassa, mutta ne ovat ominaisuuksiltaan niin toisenlaisia, että niiden alkioita ei kutsuta luvuiksi.

"Velkaluvut"

Intialainen Brahmagupta oli esittänyt negatiivisten lukujen laskusäännöt jo 600-luvun alkupuoliskolla [1, s. 316]. Silti negatiiviset luvut vaivasivat eurooppalaisia matemaatikkoja vielä yli tuhat vuotta myöhemmin. Vuosina 1629–1704 elänyt Johann Hudde näyttää olleen heistä ensimmäinen, joka kohteli niitä yhtä luontevasti kuin positiivisia [1, s. 525–526]. Jotkut oppikirjojen kirjoittajat kielsivät kahden negatiivisen luvun kertomisen keskenään vielä 1700-luvulla [1, s. 645].

Negatiivisia lukuja pyrkii tupsahtelemaan esiin erilaisten tehtävien ratkaisemisen tuloksena. Silloin voi kuitenkin ottaa sen kannan, että ratkaisua ei ole. Harmillista kyllä, ratkaisumenetelmät tuottavat niitä välivaiheina silloinkin, kun lopullinen ratkaisu on positiivinen. Negatiivisia lukuja välttelevä matemaatikko tarvitsi monta eri ratkaisutapaa siinä missä nykypäivän matemaatikko selviää yhdellä, koska hänen täytyi aina ohjata laskut sellaista reittiä, että negatiivisia lukuja ei esiinny.

Tehdäänpä ajatuskoe, että tietokoneet olisi keksitty ennen negatiivisia lukuja. Kaikki tietokoneet osaisivat laskea vain positiivisilla rationaaliluvuilla ja nollalla. Jos $x < y$, niin vähennyslasku $x - y$ aiheuttaisi ajonaikaisen virheen aivan kuten nollalla jako todellisissa tietokoneissa. (Ajatuskoe toimii myös kokonaisluvuilla, jos jakolasku jätetään pois. Reaaliluvuilla ajatuskoe ontuu, koska tietokoneita ei voi ohjelmoida laskemaan reaaliluvuilla tarkasti.)

Eräänä päivänä joku neropatti keksii, että olisi parempi, että pienempi miinus suurempi ei aiheuttaisi virhettä vaan tuottaisi tulokseksi uudentyyppisen, velkaa esittävän luvun. Hän päättää laatia ohjelman, joka osaa laskea myös näillä uusilla luvuilla. Olisiko sellainen vaikeaa?

Italialaiset kauppiaat käyttivät 1400-luvulla merkkiä "+" ilmaisemaan ylijäämää ja "−" alijäämää [1, s. 397], joten esitetään luku ohjelmassamme parina $(x_\mathsf{e}, x_\mathsf{i})$, jossa x_e on "+" tai "−" ja x_i on positiivinen luku tai nolla. (Ohjelmoija käyttäisi parin sijasta tietuetta tai luokkaa, mutta vältämme ohjelmointikielitermejä tässä kirjoituksessa.) Tämä on itse asiassa nykyinen esitystapamme vain kirjoitettuna hieman eri tavalla. Alaviitteet "e" ja "i" viittaavat sanoihin "etumerkki" ja "itseisarvo".

Esimerkiksi -3 esitetään $(\text{“}-\text{”}, 3)$ ja 5 esitetään $(\text{“}+\text{”}, 5)$. Nolla ei oikeastaan ole säästöä eikä velkaa, mutta valitaan yksinkertaisuuden vuoksi, että nolla esitetään muodossa $(\text{“}+\text{”}, 0)$, ja paria $(\text{“}-\text{”}, 0)$ ei käytetä. Eihän $(\text{“}-\text{”}, 0)$ varsinaisesti väärin olisi, koska se vastaa tavallisen matematiikan merkintää -0, joka myös on arvoltaan 0. Mutta vältetään sekaannuksia, jos ohjelma esittää nollan aina samassa muodossa.

Laskutoimitukset voidaan ohjelmoida koulussa opittujen etumerkkisääntöjen mukaan. Yhteenlasku $x+y = z$ sujuu näin:

- Jos $x_\mathsf{e} = y_\mathsf{e}$, niin $z_\mathsf{e} = x_\mathsf{e}$ ja $z_\mathsf{i} = x_\mathsf{i} + y_\mathsf{i}$.
- Jos $x_\mathsf{e} \neq y_\mathsf{e}$ ja $x_\mathsf{i} > y_\mathsf{i}$, niin $z_\mathsf{e} = x_\mathsf{e}$ ja $z_\mathsf{i} = x_\mathsf{i} - y_\mathsf{i}$.
- Jos $x_\mathsf{e} \neq y_\mathsf{e}$ ja $x_\mathsf{i} = y_\mathsf{i}$, niin $z_\mathsf{e} =$ "+" ja $z_\mathsf{i} = 0$.
- Jos $x_\mathsf{e} \neq y_\mathsf{e}$ ja $x_\mathsf{i} < y_\mathsf{i}$, niin $z_\mathsf{e} = y_\mathsf{e}$ ja $z_\mathsf{i} = y_\mathsf{i} - x_\mathsf{i}$.

Vähennyslasku $x - y$ tapahtuu vaihtamalla y_e plussasta miinukseksi tai päinvastoin ja sitten käyttämällä yhteenlaskua, paitsi jos y on alunperin $(\text{“}+\text{”}, 0)$. Jos y on alunperin $(\text{“}+\text{”}, 0)$, niin tulokseksi annetaan x.

Kertolasku $x \cdot y = z$ on jopa helpompi kuin yhteenlasku:

- $z_\mathsf{i} = x_\mathsf{i} \cdot y_\mathsf{i}$.
- Jos $x_\mathsf{e} = y_\mathsf{e}$ tai $x_\mathsf{i} = 0$ tai $y_\mathsf{i} = 0$, niin $z_\mathsf{e} =$ "+".
- Jos $x_\mathsf{e} \neq y_\mathsf{e}$ ja $x_\mathsf{i} \neq 0$ ja $y_\mathsf{i} \neq 0$, niin $z_\mathsf{e} =$ "−".

Jakolasku $z = x/y$ saadaan edellisestä korvaamalla ensimmäinen kohta kaavalla $z_\mathsf{i} = x_\mathsf{i}/y_\mathsf{i}$.

Tarkoitus on tietysti, että silloin kun kaikki etumerkit ovat "+", ohjelmamme laskee kuten positiivisilla luvuilla ja nollalla lasketaan. Siis esimerkiksi jos

$$x + y = z\ ,$$

niin täytyy olla

$$(\text{“}+\text{”}, x)\ +\ (\text{“}+\text{”}, y)\ =\ (\text{“}+\text{”}, z)\ .$$

Tarkastamalla kaikki edellä annetut $(x_\mathsf{e}, x_\mathsf{i})$-lukujen laskusäännöt on helppo nähdä, että tämä puoli asiasta on kunnossa. Ainoa poikkeus on $x-y$ silloin kun $x < y$. Positiivisten lukujen ja nollan laskusäännöillä tämä on kielletty lasku, mutta $(x_\mathsf{e}, x_\mathsf{i})$-luvuilla lasku onnistuu ja tulos on $(\text{“}-\text{”}, y - x)$. Mutta tämähän oli tarkoituskin. $(x_\mathsf{e}, x_\mathsf{i})$-luvut ovat siis positiivisten lukujen ja nollan laajennos, eikä jokin kokonaan uusi lukujärjestelmä.

Me tiedämme, että yhteen- ja kertolasku ovat vaihdannaisia ja liitännäisiä ja osittelulaki pätee, vaikka mukana olisi negatiivisiakin lukuja. Ohjelmoijamme ei sitä kuitenkaan vielä tiedä, koska ajatuskokeessamme negatiivisia lukuja ollaan vasta keksimässä.

Mutta, jos luotetaan siihen, että vaihdannaisuuslaki pätee positiviisille luvuille ja nollalle, niin on helppo kokeilemalla huomata, että se pätee myös ohjelman käsittelemille pareille $(x_\mathsf{e}, x_\mathsf{i})$. Otetaan esimerkiksi tapaus $a + b$, missä $a_\mathsf{e} \neq b_\mathsf{e}$ ja $a_\mathsf{i} < b_\mathsf{i}$. Olemme ottaneet käyttöön uudet nimet a ja b, jotta emme menisi nimien kanssa sekaisin. Näinpäin laskettaessa $x = a$ ja $y = b$, joten "$a_\mathsf{e} \neq b_\mathsf{e}$ ja $a_\mathsf{i} < b_\mathsf{i}$" tarkoittaa "$x_\mathsf{e} \neq y_\mathsf{e}$ ja $x_\mathsf{i} < y_\mathsf{i}$". Lasku vie siis neljänteen tapaukseen ja tulokseksi tulee $(y_\mathsf{e},\ y_\mathsf{i} - x_\mathsf{i})$ eli $(b_\mathsf{e},\ b_\mathsf{i} - a_\mathsf{i})$. Laskettaessa $b + a$ pätee $x = b$ ja $y = a$. Siis $y_\mathsf{e} \neq x_\mathsf{e}$ ja $y_\mathsf{i} < x_\mathsf{i}$. Tämä tarkoittaa samaa kuin $x_\mathsf{e} \neq y_\mathsf{e}$ ja $x_\mathsf{i} > y_\mathsf{i}$, joten lasku vie toiseen tapaukseen ja tuottaa vastaukseksi $(x_\mathsf{e},\ x_\mathsf{i} - y_\mathsf{i})$ eli $(b_\mathsf{e},\ b_\mathsf{i} - a_\mathsf{i})$. Tuli siis sama vastaus, kuten pitääkin.

Liitännäisyyslait ja osittelulaki voidaan tarkastaa samaan tapaan.

Ajatuskokeemme havainnollistaa kolmea tärkeää asiaa. Ensiksi, olisi mahdollista — jopa helppoa — opettaa tietokoneet laskemaan kaikilla rationaaliluvuilla, vaikka ne alunperin osaisivat laskea vain positiivisilla rationaaliluvuilla ja nollalla. Silloin kun vain ihmiset laskivat luvuilla, oli ainakin jossain määrin järkevää väittää, että jotkin epäilyttävän tuntuiset luvut eivät "oikeasti ole olemassa" ja niillä laskeminen on samanlaista haihattelua kuin ikiliikkujan suunnittelu. Mutta siinä vaiheessa kun tietokoneetkin laskevat "velkaluvuilla" ilman ongelmia, on pakko myöntää ainakin sen verran, että velkalukujen toteutus tietokoneohjelmana on olemassa, joten niillä laskeminen ei ole haihattelua.

Seuraako tästä sitten, että myös velkaluvut itse — toteutuksensa lisäksi — ovat olemassa, on epäolennainen kysymys. Sanoilla ei yleensä ole tarkkaan sovittuja merkityksiä, vaan on harmaa alue, jossa toisten mielestä sopii käyttää jotakin sanaa ja toisten mielestä ei. Joidenkin mielestä lukujen ei voi sanoa olevan olemassa ainakaan ennen kuin ihmiset keksivät ne, koska ne ovat vain ajatusrakennelmia, ja ennen keksimistään ne eivät siis ole mitään.

Nykyajan matemaatikot käyttävät toisenlaista puhetapaa. He sanovat, että jokin matemaattinen käsite on olemassa, jos se ei ole sisäisesti ristiriitainen. "Pyöreä neliö" olisi sisäisesti ristiriitainen käsite. Sisäinen ristiriita voi olla myös paljon vähemmän ilmeinen. Kuitenkin, jos jokin käsite saadaan toimimaan tietokoneohjelmana, se ei voi olla sisäisesti ristiriitainen.

Sen sijaan, että alkaisi kinastella matemaatikon kanssa, ovatko velkaluvut "oikeasti" olemassa, on hyödyllisempää todeta, että hän käyttää sanaparia "olla olemassa" ehkä eri merkityksessä kuin minä. Joka tapauksessa velkalukuja voi käyttää laskelmissa. Käytännön näkökulmasta se on tärkeintä.

Toiseksi, velkalukuja ei rakennettu yksinään, vaan rakennettiin järjestelmä, joka sisältää sekä velkaluvut että tarkat vastineet entuudestaan tutuille luvuille. Kutsukaamme näitä vastineita "säästöluvuiksi". Ovatko säästöluvut "oikeasti" sama asia kuin entuudestaan tutut luvut on sekin epäolennainen kysymys. Ellei ohjelman käyttäjä yritä laskettaa vähennyslaskua pienempi miinus suurempi, hän ei voi mistään huomata, että ohjelma laskee säästöluvuilla. Vastaus on aina sama kuin entuudestaan tutuilla luvuilla laskettaessa olisi tullut.

Kolmanneksi, kaikki edellä annetut lait (1), ..., (8) pätevät kaikille $(x_\mathsf{e}, x_\mathsf{i})$-luvuille. Velkalukujen käyttöönotto ei vaadi, että vanhat laskulait unohdetaan ja opetellaan uusia. Tämä helpottaa velkalukujen käyttöönottoa huomattavasti. Velkaluvut käyttäytyvät niin samalla tavalla kuin entuudestaan tutut luvut, että on vaikea keksiä mitään muuta syytä olla kelpuuttamatta niitä luvuiksi kuin ennakkoluuloisuus. Ennakkoluuloisuus on ollut matematiikankin historiassa vahva voima, mutta hyvät uudet ajatukset on lopulta hyväksytty viimeistään silloin, kun vanhoihin ajatuksiin juuttunut sukupolvi on kuollut pois.

Tärkein velkalukujen — eli negatiivisten lukujen — mukanaan tuoma uutuus on se, että jokainen vähennyslasku on laskettavissa. Tämä asia voidaan ilmaista laillla "ovatpa a ja b mitä lukuja tahansa, niin $a - b$ on olemassa". Se ei kuitenkaan riitä yksinään, koska tähän mennessä annetuissa laeissa ei kerrota mitään siitä, mitä vähennyslasku tarkoittaa.

Äkkipäätä voi näyttää siltä, että tämä puute on helppo korjata: $a - b$ on tietenkin sellainen luku, että kun siihen lisätään b, saadaan a. Tämän voi ilmaista laillla $(a - b) + b = a$.

Valitettavasti asia ei ole näin yksinkertainen. Periaatteessa voisi olla olemassa kaksi tai useampia eri lukuja x siten, että $x + b = a$. Silloin ongelmaksi tulisi, mikä niistä on $a - b$. Siis $a - b$ ei ehkä ole *yksikäsitteinen*. Onneksi pystymme lopulta osoittamaan, että $a - b$ on yksikäsitteinen. Joudumme kuitenkin sitä ennen päättelemään määritelmän "$a - b$ on olemassa ja $(a - b) + b = a$" ja aikaisemmin annettujen yhteenlaskun lakien varassa tietämättä, että $a - b$ on yksikäsitteinen.

Koska $x = (x - y) + y$, on $x + (y - y) = ((x - y) + y) + (y - y)$. Liitännäisyyslakia käyttämällä oikea puoli voidaan muuttaa muotoon $(x - y) + (y + (y - y))$, josta vaihdannaisuuslailla päästään muotoon $(x - y) + ((y - y) + y)$. Koska $(a - b) + b = a$, sievenee tämä muotoon $(x - y) + y$ ja edelleen muotoon x. Siis ovatpa x ja y mitä lukuja tahansa, pätee $x + (y - y) = x$. Luku $y - y$ käyttäytyy kuten nolla!

Edelleen voidaan päätellä, että vaikka z olisi eri luku kuin y, niin $z - z$ ja $y - y$ ovat yhtäsuuret. Se on välitön seuraus yleisemmästä tuloksesta, jonka mukaan ei voi olla olemassa enempää kuin yksi luku, joka käyttäytyy kuten nolla. Tämän todistamiseksi oletetaan, että p ja q ovat kaksi lukua siten, että $x + p = x$ ja $x + q = x$ jokaisella x. Sijoittamalla ensimmäiseen yhtälöön x:n paikalle q saadaan $q + p = q$, josta vaihdannaisuuden avulla saadaan $p + q = q$. Toisaalta, sijottamalla jälkimmäiseen yhtälöön x:n paikalle p saadaan $p + q = p$. Niinpä $p = p + q = q$. Siis p ja q eivät voi olla eri luku.

Ei ole yllätys, että $y - y$ käyttäytyy kuin nolla. Olemme rakentamassa matemaattista määritelmää tutuille luvuille, ja tutuilla luvuilla $y - y = 0$. Jos rakennelmassamme $y - y$ olisi jotain muuta kuin 0, olisi rakennelmamme pielessä. On kuitenkin mielenkiintoista huomata, että ei tarvitse erikseen määritellä, että $y - y$ on nolla eikä edes, että nolla on olemassa. Nämä seuraavat automaattisesti siitä, että yhteen- ja vähennyslasku voidaan aina laskea, yhteenlasku on vaihdannainen ja liitännäinen, ja $(a - b) + b = a$.

Koska $y - y$:n tulos on y:n valinnasta riippumaton, käyttäytyy kuten nolla eikä muitakaan nollia voi olla, alamme merkitä sitä reilusti symbolilla "0". Olemme johtaneet seuraavan tuloksen:

(9) On olemassa luku 0 siten, että jokaisella luvulla a pätee $a + 0 = a$.

Sijoittamalla a:n paikalle 0 ja b:n paikalle a kaavassa $b + (a - b) = a$ saadaan $a + (0 - a) = 0$. Merkitsemällä lukua $0 - a$ yksinkertaisemmin $-a$ voidaan tämä tulos esittää seuraavana lakina:

(10) Jokaista lukua a kohti on olemassa luku $-a$ siten, että $a + (-a) = 0$.

Lukua $-a$ kutsutaan luvun a vastaluvuksi. Samaan tapaan kuin osoitettiin, että nollan lailla käyttäytyviä lukuja on vain yksi, voidaan osoittaa, että myös vastaluvun lailla käyttäytyviä lukuja on vain yksi. Nimittäin, olkoon myös $\bar{a}$ luku siten, että $a + \bar{a} = 0$. Vaihdannaisuuslain avulla saadaan $\bar{a} + a = 0$. Nyt voidaan laskea toisaalta, että $(\bar{a} + a) + (-a) = \bar{a} + (a + (-a)) = \bar{a} + 0 = \bar{a}$, ja toisaalta, että $(\bar{a} + a) + (-a) = 0 + (-a) = (-a) + 0 = -a$. Niinpä $\bar{a} = (\bar{a} + a) + (-a) = -a$.

Nyt voimme viimein osoittaa, että on vain yksi luku x siten, että $x + b = a$. Nimittäin, jos x on sellainen luku, niin $x = x + 0 = x + (b + (-b)) = (x + b) + (-b) = a + (-b)$. Koska juuri näimme, että $-b$ on yksikäsitteinen ja olemme alusta saakka uskoneet, että yhteenlasku on yksikäsitteinen, on x:n arvo yksikäsitteinen.

Olemme tähän asti käyttäneet lakeja "$a - b$ on olemassa" ja "$(a - b) + b = a$" osana lukujen määritelmää, ja johdimme lait (9) ja (10) niistä ja kaavasta $-a = 0 - a$. Matemaatikoilla on kuitenkin tapana tehdä toisinpäin: (9) ja (10) sekä kaava $a - b = a + (-b)$ asetetaan osana määritelmää, josta vähennyslaskun ominaisuudet johdetaan. Näin määritelty $a - b$ on olemassa ovatpa a ja b mitä lukuja tahansa, koska $-b$ on olemassa lain (10) nojalla ja yhteenlaskun tulos on olemassa lain (1) nojalla. Edelleen, määritelmän mukaan $(a - b) + b = (a + (-b)) + b$, josta liitännäisyyttä ja vaihdannaisuutta soveltamalla saadaan $a + ((-b) + b)$ ja $a + (b + (-b))$, josta (10) tuottaa $a + 0$, mistä (9) tuottaa a. Siis $(a - b) + b = a$.

Koska lait (9) ja (10) on johdettavissa laeista "$a - b$ on olemassa" ja "$(a - b) + b = a$" sekä toisinpäin, on lopputulos riippumaton siitä, kummat valitaan lähtökohdaksi. Lakien (9) ja (10) valitseminen lähtökohdaksi on sikäli mukavampaa, että niiden avulla ensimmäiset todistukset sujuvat näppärämmin. Sen jälkeen kun vaihtoehtoisen lähtökohdan lait on johdettu, ei asialla ole enää merkitystä.

Todistamme vielä yhden vastalukujen tutun ominaisuuden, jota tarvitaan jatkossa. Mitä on $-(-x)$? Määritelmän mukaan se on sellainen luku, että $(-x) + (-(-x)) = 0$. Toisaalta $x + (-x) = 0$, josta vaihdannaisuuslain avulla saadaan $(-x) + x = 0$. Niinpä x kelpaa luvuksi $-(-x)$. Koska vastaluku on yksikäsitteinen, täytyy olla niin, että $-(-x) = x$.

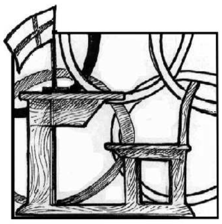
Viitteet

[1] Boyer, Carl: *Tieteiden kuningatar, matematiikan historia*. Osa I sivut 1–469. Osa 2 sivut 471–982. Suomentanut Kimmo Pietiläinen. Art House, 1994.

[2] Cormen, Thomas H. & Leiserson, Charles E. & Rivest, Ronald L.: *Introduction to Algorithms*. The MIT Press, 1990.

[3] Nurmi, Timo & Rekiaro, Ilkka & Rekiaro, Päivi: *Suomalaisen sivistyssanakirja*. Gummerus Kirjapaino Oy, Jyväskylä 1995.

[4] Stroustrup, Bjarne: *The C++ Programming Language, Third Edition*. Addison-Wesley, 1997.



Miten nostaa yläasteen oppilaitten kiinnostusta matematiikan sanallisia tehtäviä kohtaan? Esimerkkejä, neuvoja, analyysi

Pavel Shmakov
MAFYKE-lehtori, Käpylän peruskoulu, Helsinki
shpavel@luukku.com

Nikolay Zimakov
Ph.D., Helsinki
zimanik@hotmail.com

Tiivistelmä

Kirjoituksessani kerrotaan oppilaiden kiinnostuksesta tehtäviä kohtaan. Tämä on ehkä yksi matematiikan opetuksen tärkeimmistä ongelmista yläasteella. Suositellaan, miten olisi mahdollista järjestää kouluopetuksesta mukavampaa ja sisällöltään rikkaampaa. Seuraavassa esitetään arkikäytäntöön liittyvien, sanallisten matematiikan tehtävien päävaatimuksia ja annetaan konkreettisia esimerkkejä tehtävistä.

Tällä hetkellä monet valtiot kannattavat matematiikan koulutusta ja tieteen tason pitämistä korkeana. Matematiikka on luonnontieteiden ja informatiivisten tieteiden yhteinen perusta. Tämä väite lienee kiistaton. Sen lisäksi matematiikka on ajattelun kehittämisen toiminnallinen työkalu. Itse asiassa se on ehkä ainoa oppiaine, jossa oppilaat perustelevat omia johtopäätöksiään. Sitä paitsi me ajattelemme, että matematiikka on yhteinen ja välttämätön osa ihmisten kulttuuria. Mutta kysely [1] ja arvovaltaisen PISA-tutkimuksen 2003 [2, diagrammi 5.1] tulokset osoittavat, että yläasteen oppilailla on matala kiinnostus matematiikkaa kohtaan. Tällainen tilanne vaikeuttaa opetus- ja oppimisprosessia, heijastuu saatujen tietojen laatuun ja sen seurauksena aiheutuu stressiä oppilaille. Näin PISA-tutkimuksen 2003 tulosten diagrammi 5.2 [2] esittää selvästi tietojen laadun riippuvuuden matematiikan kiinnostuksesta. Diagrammi 5.3 [2] näyttää suomalaisten oppilaiden korkeaa "vieroksunnan" tasoa matematiikan oppitunneilla. Meidän näkökulmastamme katsoen sen syyt ovat merkittävässä määrin piilossa koulun oppikirjoissa, joiden sivut on taitettu yksitoikkoisesti ja ne pitävät sisällään epäkiinnostavia mekaanisia harjoituksia. Ajatuksena on, että jos on mahdollisuus muuttaa sanalliset matematiikan tehtävät hauskoiksi ja lapsille miellyttäviksi, se pitäisi tehdä [3]. Alempana on hahmotettu väyliä ja reittejä, jotka johtavat pois ikävistä, pinttyneistä rutiineista.

Koulumatematiikka koostuu teoriasta ja käytännöstä. Tässä kirjoitelmassa jätetään teoreettinen osa käsittelemättä. Emme myöskään keskustele konkreettisten oppituntien rakenteista emmekä niiden kulusta. Se antaa meille mahdollisuuden keskittyä tehtäviin hyvin. Meidän tavoitteemme on kohottaa tavallisten oppilaiden kiinnostusta matematiikkaan. Ensisijaisesti tässä tarkoitetaan välinpitämättömiä tai matematiikkaan kielteisesti suhtautuvia oppilaita. Toisaalta on tärkeää huomioida lahjakkaammat tai motivoituneemmat oppilaat, mutta heistä puhutaan myöhemmin. Oppilaat voivat suhtautua matematiikkaan eri tavoin. He voivat ymmärtää vain, että on pakko käydä koulussa ja opiskella koulumatematiikkaa. Toisaalta he voivat tietää, että matematiikan osaaminen on hyödyllistä elämässä. Se, mitä haluaisimme korostaa, on että puhutaan erilaisesta suhtautumisesta matematiikkaan. Me uskomme, että on mahdollista herättää tavallisten oppituntien aikana kaikkien oppilaitten kiinnostus itse matematiikkaan. Seuraavaksi luetellaan tehtävien valinnan perusperiaatteet, jotka vastaavat yllämainittuun haasteeseen. Sen jälkeen me valaisemme niiden soveltamista konkreettisilla esimerkeillä.

Vaatimuksia tehtäviin:
1. *Tehtävän sisältö esitellään epätavallisessa, esimerkiksi epämatemaattisessa, sadun tai tarinan muodossa.*
2. *Tehtävän pitää olla monitasoinen.*
- On tarpeellista, että tehtävä sisältää ensimmäisen tason, joka on yksinkertainen kaikille. Tämän yksinkertaisen tason "ratkaisu", joka tulee mieleen, voi olla väärä.
- Tehtävässä on muita tasoja, jotka eivät tule mieleen heti ja jotka vain osa oppilaista ottaa huomioon.
3. *Eritasoisissa tehtävissä on eksoottisia, kauniita, outoja tai hauskoja ratkaisuja tai ratkaisuksi tulee yllättävä johtopäätös. Vähintään yksi niistä on hyvin vaikea.*
4. *Tehtävä antaa oppilaille mahdollisuuden koetella omia hoksottimiaan ja kehittää omaa ajattelukykyään.*
5. *Tehtävän muodossa on toinenkin vaihtoehto, joka riippuu oppilaiden konkreettisesta kiinnostuksesta (liite 1).*

Yllämainittuja vaatimuksia vastaavien tehtävien joukko on esitelty jäljempänä. Muutamat korkeat tasot sisältävät suhteellisen vaikeita tehtäviä. Sellaisia tehtäviä voidaan suositella oppilaille, jotka ovat vakavasti innostuneita matematiikasta. Opettajan avustuksella huomattava osa oppilaista voi kuitenkin pärjätä sellaisten tehtävien parissa. Suurin osa alla olevista tehtävistä on tarkoitettu 7.-luokkalaisille. Tehtävien pääsuunta on algebra ja logiikka. Logiikan tehtävistä on paikallaan tehdä seuraava huomautus: logiikka on aine, jota ei opeteta koulussa, mutta logiikan perusteet pitää osata edes intuitiivisella tasolla. Sitä paitsi logiikka on kaikkien tiedeaineiden tärkeä osa.

JALKAPALLOTURNAUS

Tyttöjen ja poikien jalkapallojoukkueet pelaavat keskenään. Pojat pelaavat vain poikia vastaan, tytöt pelaavat vain tyttöjä vastaan. Jokainen joukkue osallistuu kuitenkin turnaukseen.

Huomio opettajalle: tässä tapauksessa saa muotoilla sekä suoranaiset (1-4), että käänteiset tehtävät (5-8).

1.1 *Kuinka paljon oli otteluita, jos poikien joukkueita on kolme?*

Huomio: Haluttaessa voi tehtävän muotoilla konkreettisemmaksi antamalla joukkueille nimet (katso ratkaisu liitteessä 2). Kuten ratkaisusta näkyy, tehtävää voidaan käyttää opetettaessa kokonaislukujen kertomista ja jakamista. Tehtävä on yksinkertainen, mutta oikea ratkaisu ei löydy heti. Olisi hyvä esittää kolmen joukkueen turnaustaulukko.

	Leijonat	Tiikerit	Virtahevot
Leijonat	///////	2 : 2	0 : 1
Tiikerit	2 : 2	///////	3 : 4
Virtahevot	1 : 0	4 : 3	///////

Tätä tehtävää käsiteltäessä on hyödyllistä muistuttaa lukujen kertomisen merkitys.

1.2 *Kuinka paljon oli otteluita, jos vastakkain pelaavat neljä poikien joukkuetta?*

1.3 *...pelaavat viisi poikien joukkuetta?*

2. *Keksikää pelien määrän yhteinen kaava, jos turnaukseen osallistuu poikien joukkueita n kappaletta.*

Huomio: Liitteessä esitetty kaava saa aikaan lukujonon $\{0, 1, 3, 6, 10, \ldots\}$, ja siis tämä tehtävä havainnollistaa "Lukujonot"-teemaa.

3. *Kuinka monta peliä oli, jos turnaukseen osallistuu kaksi tyttöjen joukkuetta ja kolme poikien joukkuetta?*

4. *Keksikää tyttöjen ja poikien pelien määrän yleinen kaava, jos turnaukseen osallistuu n tyttöjen joukkuetta ja m poikien joukkuetta.*

5. *Montako poikien ja tyttöjen joukkuetta oli, jos pelattiin kymmenen peliä ja yhteensä oli viisi joukkuetta?*

Huomio: Tämä tehtävä (myös tehtävät 6-7) havainnollistaa "Yhtälöt" -teemaa (katso ratkaisu 5.2 liitteessä 2). Tehtäviä käsiteltäessä olisi hyvä kertoa oppilaille tehtävistä ja niiden ratkaisuista, jotka johtavat yksinkertaiseen toisen asteen yhtälöön.

6. *Mitä voidaan sanoa pelien määrästä, jos turnaukseen osallistuvien tyttöjen joukkueiden määrä on sama kuin poikien joukkueiden määrä?*

Huomio: Seuraavat kaksi tehtävää ratkaistaan toisen asteen yhtälön avulla. Tehtävässä 7 riittää formaalista tietoa ja itse asiassa se on kohtuullisen helppo. Tehtävä 8 on tarkoitettu matematiikkaa harrastaville oppilaille, se on vaikeampi.

7. *Onko mahdollista, että oli viisi joukkuetta ja neljä peliä?*

8. *Mitä voi kertoa poikien ja tyttöjen joukkueiden määrän suhteesta, jos joukkueiden määrä on sama kuin pelien määrä?*

TESTEJÄ

Kolme tyttöystävää Anu, Birgitta ja Catarina päättivät kokeilla heidän ystävänsä loogista ajattelua. He seisoivat rivissä tyhjässä huoneessa ja kutsuivat häntä luokseen. Hän näki ystävät samassa järjestyksessä Anu, Birgitta, Catarina, vasemmalta oikealle. Tytöt sanoivat, että hänen pitää tehdä kolme testiä. Jokaisessa testissä on arvattava, kuka heistä puhuu totta, kuka valehtelee.

Ensimmäinen testi. *Tytöt sanoivat, että testissä yksi heistä puhuu totta, muut valehtelevat. Anu sanoi: kaikki vasemmalla seisovat ystäväni valehtelevat. Birgitta sanoi: kaikki vasemmalla ja oikealla seisovat ystäväni puhuvat totta. Catarina sanoi: oikealla seisova ystäväni puhuu totta.*

Toinen testi. *Tytöt sanoivat, että testissä yksi heistä puhuu totta ja ainakin yksi valehtelee. Anu sanoi: kaikki vasemmalla seisovat ystäväni valehtelevat. Birgitta sanoi: kaikki ystävät puhuvat totta. Catarina sanoi: oikealla seisova ystäväni puhuu totta.*

Kolmas testi. *Tytöt seisoivat järjestyksessä: ensimmäisenä Catarina, sitten Birgitta ja Anu. He sanoivat, että testin aikana yksi heistä puhuu totta ja ainakin yksi valehtelee. Anu sanoi: kaikki vasemmalla seisovat ystäväni valehtelevat. Birgitta sanoi: kaikki vasemmalla ja oikealla seisovat ystäväni puhuvat totta. Catarina sanoi: oikealla seisova ystäväni puhuu totta.*

KESKINOPEUS

Pekka matkusti puolet matkasta Tampereelta Helsinkiin nopeudella 40 km/h. Millä nopeudella hänen pitää matkustaa toinen puoli matkasta, jotta hänen koko matkan keskinopeutensa on a) 70 km/h, b) 80 km/h, c) 90 km/h?

Tavoite: *pitää ymmärtää, mikä on numeerisen laskun fysikaalinen merkitys. Onko aina niin yksinkertaisesti ja selvästi annettuun tehtävään olemassa luonnollinen ratkaisu?*

Huomio: oppilaille on helpompaa ratkaista tehtävä, jos sanotaan kuinka monta kilometriä on Tampereelta Helsinkiin, esimerkiksi 200 km.

MAITOA KAHVIIN JA KAHVIA MAITOON

Meillä on kaksi samanlaista lasia. Toisessa on maitoa, toisessa on kahvia. Otetaan lusikallinen maitoa ensimmäisestä lasista ja kaadetaan sen toiseen lasiin.

1. *Sekoitetaan maito kahviin toisessa lasissa. Sen jälkeen otetaan lusikallinen nestettä tästä lasista ja kaadetaan se ensimmäiseen lasiin. Kumpaa on enemmän: maitoa kahvissa vai kahvia maidossa?*

2. *Emme sekoita maitoa kahviin toisessa lasissa. Otetaan lusikallinen nestettä tästä lasista ja kaadetaan se ensimmäiseen lasiin. Kumpaa on enemmän tässä tapauksessa: maitoa kahvissa vai kahvia maidossa?*

Monet lapset (ja aikuiset!) nopeasti antavat väärän vastauksen: maitoa on kahvissa enemmän, koska ensin kaadetaan puhdasta maitoa ja sitten kaadetaan seosta.

Huomio: kannattaa varmasti aloittaa ensimmäisestä tasosta. *Ei sekoiteta maitoa kahviin toisessa lasissa. a) Kaadetaan toisesta lasista ensimmäiseen lusikallinen maitoa ja otetaan sama lusikallinen takaisin tai b) kaadetaan toisesta lasista ensimmäiseen lusikallinen puhdasta kahvia, tai c) kaadetaan toisesta lasista ensimmäiseen puoli lusikallista maitoa ja puoli lusikallista kahvia.*

TIETÄJISTÄ JA HIRMUISTA

Joka neljäs matematiikko on hirviö. Joka viides hirviö on matematiikko.

1. *Kumpia on enemmän – matemaatikoita vai hirviöitä?* (Yhteinen kysymys)

2. *Kumpia on enemmän – matemaatikoita vai hirviöitä, jos matemaatikoiden asumispaikka on Maa, mutta hirviöitä asuu toisella planeetalla, hyvin kaukana?* (Konkreettinen kysymys)

3. *Kumpia on enemmän – motemaatikoita vai hyrviöitä?* (Outo kysymys)

Tavoite: näytetään havainnollisesti joukko-opin peruskäsitteitä, esimerkiksi joukkojen leikkaaminen, tyhjä joukko. Yksinkertaisesti todistetaan algebrallisen ratkaisun ja joukko-opillisen ratkaisun vastaavuus.

Liite 1

TOINEN VAIHTOEHTO tehtävälle JALKAPALLOTURNAUS

HIENOILLA KUTSUILLA

Kun kaksi herrasmiestä tai kaksi hienoa naista tapaavat toisensa, he kättelevät. Silloin kun herrasmies tapaa hienon naisen, hän suutelee daamin kättä.

Suorat tehtävät:

1.1. *Kuinka monta kertaa käteltiin, kun kolme herrasmiestä tapaa?*

1.2. *Kuinka monta kertaa käteltiin, kun tapasi neljä herrasmiestä? ... viisi herrasmiestä?*

2. *Keksikää kädenpuristuksien määrän yhteinen kaava, kun n herrasmiestä tapaa.*

3. *Kuinka monta kädenpuristusta ja käsisuudelmaa tapahtuu, kun kaksi hienoa naista ja kolme herrasmiestä tapaa?*

4. *Keksikää kädenpuristusten ja käsisuudelmien määrän yhteinen kaava, kun n daamia ja m herrasmiestä tapaavat.*

Käänteistehtävät:

5. *Montako herrasmiestä ja daamia oli, jos kädenpuristuksia oli kymmenen ja ihmisiä oli yhteensä viisi?*

6. *Mitä voidaan sanoa kädenpuristuksien määrästä, jos kutsutilaisuuteen osallistuvien daamien määrä on sama kuin herrasmiesten määrä?*

7. *Onko mahdollista, että oli viisi ihmistä ja neljä kädenpuristusta?*

8. *Mitä voi kertoa herrasmiesten ja daamien määrän*

suhteesta, jos ihmisten määrä on sama kuin kädenpuristuksien määrä?

Liite 2, ratkaisuja ja vastauksia

JALKAPALLOTURNAUS

1.1. Ratkaisu. Jos kolme poikien joukkuetta pelaa (Leijonat, Tiikerit ja Virtahevot), jokainen joukkue pelaa kahta joukkuetta vastaan. Esimerkiksi, Leijonat pelaavat Tiikereitä ja Virtahepoja vastaan, siitä voidaan todeta, että Leijonat pelaavat kaksi peliä. Samalla tavalla pelaavat muut joukkueet ja siitä seuraa, että pelien määrä on $3 \cdot 2 = 6$. Monet antavat vastaukseksi kuusi. Mutta tässä jokainen peli on laskettu kaksi kertaa. Esimerkiksi, Leijonien ja Tiikereiden peli laskettu kuin lasketaan sekä Leijonien otteluja että Tiikereiden otteluja, joten lopullinen pelien määrä on $(3 \cdot 2) : 2 = 3$.
1.2 Lyhyt ratkaisu. Neljän joukkueen pelien määrä lasketaan samalla tavalla, $(4 \cdot 3) : 2 = 6$.
1.3 Vastaus: 10.

2. Vastaus: $n \cdot (n-1) : 2$

3. Ratkaisu. Samoin kuin kohdassa yksi saadaan: $(2 \cdot 1 + 3 \cdot 2) : 2 = 4$.

4. Vastaus: $m \cdot (m-1) : 2 + n \cdot (n-1) : 2$

5.1 Ratkaisu. Kohdasta 1 saadaan kymmenen peliä, jos turnaukseen osallistuu viisi poikien tai viisi tyttöjen joukkuetta. Onko muita ratkaisuja? Kohdasta 1 nähdään, että suhde $4 : 1$ $(1 : 4)$ on epäreaalinen, tarkistetaan tapaus $3 : 2$. Käytetään kaavaa kohdasta 3: jos $m = 3$, $n = 2$ saadaan $(3 \cdot 2) : 2 + (2 \cdot 1) : 2 = 4$, tämä joukkueiden suhde on myös epäreaalinen.
5.2 Ratkaisu. Merkitään poikien joukkueiden määrää x:llä, saadaan tyttöjen joukkueiden määräksi $(5-x)$ ja pelien määräksi: $x \cdot (x-1) : 2 + (5-x) \cdot (4-x) : 2 = (x^2 - x + 20 - 9x + x^2) : 2 = (2x^2 - 10x + 20) : 2 = x^2 - 5x + 10$.
Ehdon mukaan viimeinen lauseke on 10. Siksi: $x^2 - 5x + 10 = 10$. Tästä seuraa, että $x^2 - 5x = 0$. Siis $x \cdot (x-5) = 0$. Lopulta saadaan seuraava vastaus: ainoa vaihtoehto on, että kaikki joukkueet ovat joko poikien tai tyttöjen joukkueita.

6. Ratkaisu. Vanhoissa merkityksissä $n = a/2$, missä a on yhteisten pelien määrä. Samalla tavalla kuin kohdassa 5 lasketaan pelien määrä: $a/2 \cdot (a/2 - 1) : 2 + (a - a/2) \cdot (a - a/2 - 1) : 2 = a/2 \cdot (a/2 - 1) : 2 + a/2 \cdot (a/2 - 1) : 2 = a/2 \cdot (a/2 - 1)$.
Merkitsemällä pelien määrää b:llä, saadaan $a/2 \cdot (a/2 - 1) = b$ (**)
Todistetaan, että kaavassa a on parillinen (ei negatiivinen) luku: $a^2/4 - a/2 = b \Rightarrow a^2 = 2(2b + a)$. Identtinen yhtälö näyttää, että a^2 on parillinen, siksi a on parillinen eikä se ole negatiivinen luku.
Vastaus: tässä tapauksessa pelien määrä $b = a/2 \cdot (a/2 - 1)$, missä a (joukkueiden määrä) $= 0, 2, 4, \ldots$

7. Ratkaisu. Merkitään poikien joukkueiden määrää x:llä, saadaan tyttöjen joukkueiden määräksi $(5 - x)$. Kohdassa 5.2 oli laskettu, että pelien määrä on $x^2 - 5x + 10$. Ehdon mukaan viimeinen yhtälö on 4, siksi $x^2 - 5x + 10 = 4$ eli $x^2 - 5x + 6 = 0$. Ratkaisemalla se saadaan $x = 2$ tai $x = 3$. Vastaus: kaksi poikien ja kolme tyttöjen joukkuetta tai 3 poikien ja 2 tyttöjen joukkuetta.

8. Ratkaisu. Sovitaan, että poikien joukkueiden määrä on x, pelien määrä on a. Kohdan 4 mukaan saadaan: $x \cdot (x-1) : 2 + (a-x) \cdot (a-x-1) : 2 = (x^2 - x + a^2 - 2ax + x^2 - a + x) : 2 = (2x^2 - 2ax + a^2 - a) : 2$. Ehdon mukaan viimeinen lauseke on a. Siksi $2x^2 - 2ax + a^2 - 3a = 0$ (*)
Toisen asteen yhtälön diskriminantti D on: $D = 4a^2 - 8a^2 + 24a = -4a(a-6)$.
Kirjoitetaan kaikki kokonaiset luvut, jotka eivät ole negatiivisia ja antavat positiivisen D:n:

a	0	1	2	3	4	5	6
D	0	20	32	36	32	20	0

Jos a on 1, 2, 4, 5, yhtälöllä ei ole reaalista ratkaisua. Jos $a = 3$ $(D = 36)$ yhtälöstä (*) saadaan yhtälö $2x^2 - 6x = 0$ eli $x \cdot (x-3) = 0$. Tässä tapauksessa kaikki kolme joukkuetta ovat vain poikien tai vain tyttöjen joukkueita. Nyt jää viimeinen tapaus: $a = 6$ $(D = 0)$. Yhtälöstä (*) saadaan yhtälö: $2x^2 - 12x + 18 = 0$ eli $x^2 - 6x + 9 = 0$. Siis viimeisen yhtälön muoto on $(x-3)^2 = 0$. Kuudesta joukkueesta on poikien kolme ja kolme tyttöjen joukkueita.
Vastaus: joukkueiden määrä on sama kuin pelien määrä seuraavassa tapauksessa: 1) ei ole ollenkaan joukkueita, 2) on olemassa kolme joukkuetta, ja ne kaikki ovat joko poikien tai tyttöjen joukkueita, 3) on olemassa kuusi joukkuetta, joista kolme on poikien ja kolme tyttöjen joukkueita.

TESTI

1. Ratkaisu. On ilmeistä, että Birgitta ja Catarina valehtelivat. Siis Anu puhui totta.

2. Ratkaisu. Toinen tapaus (Birgitta puhui totta) on ristiriitainen, koska tässä tapauksessa Anun on pakko puhua totta. Siis Birgitta valehteli. Siitä johtuu, että myös Catarina valehteli.

3. Ratkaisu. Koska Anun puolelta vasemmalla ei ole ketään, Anu puhui totta, samoin Catarina puhui totta (tyhjä joukko kuuluu jokaiseen joukkoon, mm. ystävien joukkoon, jotka valehtelivat tai puhuivat totta). Siksi myös Birgitta puhui totta, mistä johtuu: ystävät valehtelivat sanoessaan, että yksi heistä puhuu totta.

KESKINOPEUS

Ratkaisu. a-tehtävä on ratkaistava oppikirjasta otetun kaavan mukaan. Varsin kiinnostava on b-tehtävä.
Ensimmäisen puolimatkan Pekan aika on (80 km: 40

km/h) = 2 tuntia. Se on myös koko matkan aika. (160 km: 80 km/t) = 2 tuntia. Se tarkoittaa, että toisella puolimatkalla Pekan nopeus on ääretön. Sen ilmiön nimi on teleportaatio...

MAITOA KAHVIIN JA KAHVIA MAITOON

Voi olla, että ratkaisu on helpompi ymmärtää, jos ensin puhumme mielivaltaisista, mutta konkreettisista luvuista. Olkoon ensin jokaisessa lasissa kymmenen lusikallista nestettä. Silloin ensimmäisen kaatamisen jälkeen ensimmäiseen lasiin jäi yhdeksän lusikallista maitoa. Toisessa lasissa on kymmenen lusikallista kahvia ja lusikallinen maitoa, yhteensä yksitoista lusikallista nestettä. Koska sekoitamme nestettä toisesta lasista ensimmäiseen, me tuomme lusikassa 1/11 lusikallista maitoa ja 10/11 lusikallista kahvia. Lasketaan ja saadaan tulokseksi että toiseen lasiin jäi $(10 - 10/11) = 9$ ja 1/11 lusikallista kahvia ja $(1 - 1/11) = 10/11$ lusikallista maitoa. Ensimmäisessä lasissa on 10/11 tuotua lusikallista kahvia ja $(9 + 1/11)$ lusikallista maitoa. Nopeat oppilaat voivat sijoittaa x:n kymmenen asemesta ja ratkaista tehtävän yleisessä muodossa.

TIETÄJISTÄ JA HIRMUISTA

1.1 Ensimmäinen joukko-opin ratkaisu: Käsitellään kahta joukkoa, matemaatikoiden ja hirviöiden. Niiden joukkojen leikkaus (pitää piirtää paperilla kaksi erilaista ympyrää) on ensimmäisen joukon (ympyrän) neljäsosa, ja samanaikaisesti se on toisen joukon (ympyrän) viidesosa.

”Kumpia on enemmän – matemaatikoita vai hirviöitä?” Tietysti hirviöitä on enemmän.

1.2 Toinen ratkaisu on kovin tavallinen: Puhutaan matemaatikoista. Neljännes heistä on hirviöitä. Esimerkiksi, jos matemaatikoita on kuusitoista, siis joka neljäs heistä on hirviö, $16 : 4 = 4$. He neljä ovat viidesosa kaikista hirviöistä. Silloin kaiken kaikkiaan hirviöitä on $5 \cdot 4 = 20$.

1.3 Kolmas ratkaisu, algebrallinen: $M : 4 = H : 5 \Rightarrow M \cdot 5 = H \cdot 4 \Rightarrow M : H = 4 : 5$.

Lähteet

[1] *Shmakov, P., Selikhova, L. 2006 ”Hyöty vai kiinnostus?”, Dimensio 4, s. 36–39*

[2] *PISA-arviointien tulokset ja raportit (PISA 2003)* `http://ktl.jyu.fi/pisa/2tasoala.htm#kuviot`

[3] *Shmakov, P., Selikhova, L. 2006 ”Keksitään ratkaisu yhdessä oppilaiden kanssa”, Arkhimedes 4, s. 25-26*

Opolle lukemista?

Matti Lehtinen
Maanpuolustuskorkeakoulu

Ian Stewart: Kirjeitä nuorelle matematiikolle. Suom. Juha Pietiläinen. Terra Cognita 2007, 215 s. Ovh. 25 euroa.

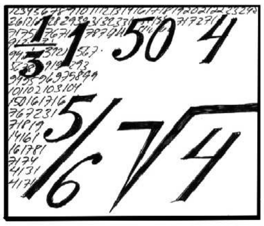
Peruskoulujen ja lukioiden ammatinvalinnanohjauksesta huolehtivat opinto-ohjaajat eli opot. Arvattavasti matemaatikon ammatti ei ole heille kovin tuttu, niin kuin se ei ole kovin tuttu useimmille oppilaillekaan. Opot ja matemaatikon ammattia harkitsevat nuoret voivat nyt täydentää tietojaan. Terra Cognita on nimittäin julkaissut suomeksi teoksen, joka luo kaikkien ymmärrettävällä tavalla kuvan siitä, miten ja miksi tullaan matemaatikoksi ja mitä matemaatikkona olo saattaisi olla.

Kirjan kirjoittaja on englantilainen Ian Stewart (s. 1945). Hän on itse matemaatikko, jonka tieteellinen julkaisutoiminta käsittelee mm. Lien algebroja ja katastrofiteoriaa. Tunnetumpi hän on kuitenkin matematiikkaa ja luonnontieteitä käsittelevänä populaarikirjoittajana. Virkatyönäänkin tämä Warwickin yliopiston matematiikan professori johtaa yliopistonsa matematiikan kansantajuistamislaitosta, *Mathematics Awareness Centreä*. Tällainen osasto Warwickissa tosiaan on.

Yksi Stewartin lähtökohta on häntäkin kuuluisamman matemaatikon G.H. Hardyn (1877–1947) vuonna 1940 ilmestynyt *Matemaatikon apologia*, jonka suomennos oli vuonna 1997 toimintansa alkaneen Kimmo Pietiläisen Terra Cognita -kustantamon ensimmäinen julkaisu. Hardyn kirja on pitkään ollut selkeimmin matematiikan olemusta yleistajuisesti, tyylikkäästi ja esteettisesti korkeatasoisesti esittelevä pikku teos. Stewart päivittää Hardyn tekstiä ja kertoo enemmän itse matemaatikon opinnoista ja työstä. Stewartin suomentaja Juha Pietiläinen kirjoittaa sujuvasti ja korrektisti – vävyn ja langon sekoittuminen on luettava ajan ilmiöksi, sukulaisuussuhteiden merkityshän taitaa ylimalkaan olla vähenemässä.

Ian Stewart rakentaa kirjansa 21 kuvitteellisesta kirjeestä nuorelle ystävälleen Megille, joka kirjan aikana etenee matematiikasta kiinnostuneesta lukiolaisesta matematiikan opiskelijaksi, jatko-opiskelijaksi, *postdociksi* ja viimein oikeaksi matemaatikoksi, yliopistovirkaan. Meg, arvattavasti Margaret, on sinänsä päivitys: yksi Hardyn lainatuimpia virkkeitä koskee matematiikkaa nuoren *miehen* alana. Stewart esittelee matematiikkaa itseään siten kuin siitä voisi ajatella olevan tarpeen kertoa vasta koulumatematiikkaan tutustuneelle ja kertoo siitä, miten hän itse tuli lähteneeksi alalle. Yliopisto-opiskelija Meg saa neuvoja matematiikan lukemisesta ja oppimisesta, todistuksen olemuksesta, soveltavan ja puhtaan matematiikan eroista sekä ajatuksia matematiikan filosofisesta rakenteesta. Jo tieteen portteja kolkuttelevalle neuvotaan tutkijoiden hierarkiaa ja yhteistyötä. Kerrotaanpa ammatin mukanaan tuomista pikku ongelmista kuten konferenssimatkoista eksoottisiin maailmankolkkiin omituisten lentoyhtiöiden kyydissä.

Harva matematiikasta kiinnostunut koululainen opoista puhumattakaan tietää omakohtaisesti kovinkaan paljon oikeasta matematiikasta, matematiikasta sellaisena, kuin matemaatikko sen kohtaa. Stewartin kirja antaa aika hyvät lähtötiedot.



Äidinkielenä luvut

Srinivasa Ramanujanin syntymästä 120 vuotta

Eero Raaste
Jatko-opiskelija
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto
eero.raaste@helsinki.fi

Vuoden 1913 tammikuun lopulla englantilainen matemaatikko Godfrey Harold Hardy sai omituisen kirjeen. Kirje oli suurikokoinen ja siinä oli intialaisia postimerkkejä. Sisällä oli nippu nuhjuisia papereita, jotka sisälsivät suuren määrän matemaattisia kaavoja. Itse kirje oli kirjoitettu kankealla englannilla. Lähettäjä oli tuntematon intialainen, joka pyysi Hardyn mielipidettä kirjeessä esitetyistä matemaattisista tuloksista.

S. Ramanujan G.H. Hardylle, Madras 16. tammikuuta 1913:

”Hyvä herra,
pyydän esittäytyä Madrasin satamasäätiön tiliosaston virkailijana, joka ansaitsee vuodessa 20 puntaa. Olen nyt noin 23 vuoden ikäinen. Minulla ei ole yliopistollista koulutusta, mutta olen suorittanut tavanomaiset kouluopinnot. Koulun päätettyäni olen käyttänyt vapaa-aikani matematiikan parissa työskentelemiseen. En ole seurannut yliopistokurssien tavanomaista kulkua, vaan olen etsinyt uusia teitä. Olen tutkinut hajaantuvia sarjoja yleisesti. Paikalliset matemaatikot kuvailevat saavuttamiani tuloksia ’järisyttäviksi’.

Kuten alkeismatematiikassa annetaan merkitys a^n:lle, kun n saa negatiivisia ja murtolukuarvoja, mukailemaan sääntöä, joka pätee positiivisille kokonaisluvuille, samoin koko tutkimukseni pyrkii antamaan Eulerin toiselle integraalille merkityksen kaikilla n:n arvoilla. Yliopistossa opiskelleet ystäväni kertovat minulle, että $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx = \Gamma(n)$ pätee vain kun n on positiivinen. Heidän mukaansa tämä integraaliyhtälö ei päde negatiivisilla n:n arvoilla. Olettaen tämän olevan totta ainoastaan n:n positiivisilla arvoilla ja myös olettaen määritelmän $n\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$ olevan yleisesti tosi olen antanut merkityksen näille integraaleille.

Väitän, että näiden ehtojen pätiessä integraali on tosi myös kaikilla n:n negatiivisilla ja murtolukuarvoilla. Koko tutkimukseni perustuu tähän, ja olen kehitellyt tätä niin pitkälle, etteivät paikalliset matemaatikot pysty ymmärtämään korkealentoisia ajatuksiani.

Äskettäin sain käsiini julkaisemanne kirjoituksen *Orders of Infinity*, jonka sivulta 36 löysin väitteen, jonka mukaan annettua lukua pienempien alkulukujen määrälle ei ole olemassa eksplisiittistä lauseketta. Olen löytänyt kaavan, joka hyvin tarkasti approksimoi oikeaa tulosta. Virhe on häviävän pieni. Pyytäisin Teitä käymään läpi oheiset paperit. Olen köyhä, mutta jos olette vakuuttuneet niillä olevan jotakin arvoa, haluaisin saada teoreemani julkaistua. En ole kirjoittanut tutkimusteni tarkkaa kulkua enkä aina kaavojakaan, mutta olen hahmotellut suuntaviivoja, joita myöten olen edennyt.

Koska olen kokematon, arvostaisin erittäin suuresti mitä tahansa neuvoa, jonka voitte minulle antaa. Pyydän anteeksi vaivaa, jonka täten aiheutan Teille.

Kunnioittavasti Teidän
S. Ramanujan"

Hardy vilkaisi kirjeen mukana olleita tuloksia, jotka vaikuttivat hurjilta ja mielikuvituksellisilta. Mukana oli myös tuttuja tuloksia, jotka myös esitettiin uusina keksintöinä. Väitteiden tueksi ei ollut esitetty todistuksia.

Hardy työnsi kirjeen syrjään ja ryhtyi tavallisiin puuhiinsa. Matemaatikot saivat tuolloinkin jos jonkinlaisia kirjeitä, joissa enimmäkseen ei ollut paljonkaan järkeä.

Aamuinen kirje kuitenkin vaivasi Hardya. Palattuaan kotiin hän lähetti sanan ystävälleen ja kollegalleen John Edensor Littlewoodille ja pyysi tätä luokseen vilkaisemaan omituista kirjettä.

Iltayhdeksältä he ryhtyivät työhön ja jo saman vuorokauden puolella he olivat varmoja siitä, että kirjoittaja ei ollut mikään tavanomainen kaheli vaan matemaattinen nero. Heti seuraavana päivänä Hardy ryhtyi toimiin Ramanujanin saamiseksi Englantiin ja Cambridgeen.

Srinivasa Ramanujan Aiyangar syntyi 22. joulukuuta 1887 köyhään bramiiniperheeseen eteläintialaisessa Erodessa, jossa hänen äitinsä Komalatammalin vanhemmat asuivat. Ramanujanin isä Srinivasa oli pikkuvirkailija vaatekaupassa Kumbakonamissa, jonne myös äiti palasi Ramanujanin kanssa juuri ennenkuin tämä täytti vuoden.

Ramanujan sairastui kaksivuotiaana isorokkoon, ja arvet säilyivät hänen kasvoissaan koko iän. Ramanujanin jälkeen syntyneet kolme sisarta kuolivat kaikki parin kuukauden iässä. Vasta 1898 ja 1905 syntyneet veljet elivät aikuisiksi. Niinpä Ramanujan oli käytännössä ainoa lapsi. Äiti oli hänelle kaikki kaikessa. Hän leikki poikansa kanssa mutta opetti myös hindulaisuuden jumaltaruja ja perinteitä. Komalatammal ja Ramanujan pelasivat erilaisia pelejä, kuten "tiikerit ja vuohet" -strategiapeliä.

Vähän ennen viisivuotispäiväänsä koulun aloittanut Ramanujan oli kapinallinen oppilas, vaikka hän alkuvuosina oli luokkansa paras lähes kaikissa aineissa, minkä seurauksena hän saattoi opiskella stipendin turvin. Stipendi oli perheen elannolle tärkeä, ja lisäksi he tarjosivat täysihoitoa opiskelijoille. Nämä huomasivat pienen Ramanujanin kiinnostuksen matematiikkaan ja ruokkivat sitä.

Opiskelijapojat lainasivat Ramanujanille S. L. Loneyn kirjan *Trigonometry*, jonka hän hallitsi 13-vuotiaana. Varsinainen käänne oli tutustuminen G. S. Carrin kirjaan *A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics*. Se oli kokoelma tuloksia, jotka enimmäkseen esitettiin kokonaan ilman todistuksia tai todistuksista annettiin vain suuntaviivat. Näihin aikoihin Ramanujan myös sai stipendin lukiota vastaavaan Kumbakonam's Government Collegeen.

Carrin kirjaan uppoutuminen muokkasi myös Ramanujanin työskentelytapoja. Hardy yritti myöhemmin epätoivoisesti saada Ramanujanin oppimaan täsmällisten todistusten merkityksen. Tämä ei kuitenkaan halunnut ymmärtää miksi itsestäänselvyyksiä piti kirjata paperille.

Matematiikka alkoi vallata Ramanujanin kaiken ajan, ja hänen kouluarvosanansa heikkenivät (muissa aineissa). Hän menetti stipendinsä, mikä oli taloudellisestikin merkitsevä takaisku. Vielä enemmän se kolautti Ramanujanin itsetuntoa. Epätoivoisena hän karkasi kotoa. Joidenkin viikkojen kuluttua isä Srinivasa löysi poikansa ja toi hänet kotiin.

Yliopiston pääsykokeet kilpistyivät riittämättömään menestykseen englanninkielessä. Toisenkin yrityksen epäonnistuttua Ramanujanin oli keksittävä muuta. Hän käytti koko valveillaoloaikansa matematiikan tutkimiseen ja merkitsi tulokset muistikirjaan, jota hän käytti referenssinä työtä hakiessaan. Myöhemmin muistikirja täyttyi ja niitä tuli lisää. Ramanujanin muistikirjojen tulosten verifioiminen on jatkunut näihin päiviin saakka.

Vuoden 1908 lopulla äiti päätti, että Ramanujanin oli avioiduttava. Vaimoksi valittiin etäinen sukulaistyttö Janaki, joka tuolloin oli vasta 9-vuotias. Nuoripari ei vuosiin asunut saman katon alla, mutta uusi aviosääty pakotti Ramanujanin työnhakuun. Ongelmana oli vain se, että työn olisi pitänyt tarjota elannon lisäksi aikaa harrastaa matematiikan tutkimista.

Monen yrityksen jälkeen Ramanujan sai ystävien välityksellä toimen Madrasin satamasäätiön tilivirastosta. Palkka oli pieni, mutta tärkeämpää oli se, että vähitellen Ramanujan saattoi käyttää myös kaiken työaikansa matematiikkaan.

Vuonna 1911 Ramanujan sai ensimmäisen tieteellisen artikkelinsa julkaistua *Journal of the Indian Mathematical Societyssa*. Se käsitteli Bernoullin lukuja B_n, $n \geq 0$, jotka määritellään funktiolla

$$\frac{z}{e^z - 1} =: \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}, \ |z| < 2\pi.$$

Ramanujanin matemaattiset tulokset olivat niin vaikeita, että Intiasta oli hankalaa löytää ketään, joka olisi niitä ymmärtänyt. Madrasilainen professori Charles Griffith lähetti Ramanujanin puolesta kirjeen Lontooseen professori M. J. M. Hillille. Siihen hän liitti suuren joukon Ramanujanin tuloksia, joista hän pyysi professorin arviota.

Hill vastasi usean viikon odottelun jälkeen kirjeellä, jossa hän kehotti Ramanujania kiinnittämään erityistä huomiota selkeyteen ja virheettömyyteen. Hän neuvoi Ramanujania tutustumaan Bromwichin kirjaan *Theory of Infinite Series*, koska tuloksissa oli ollut selviä virheitä. Esimerkkinä seuraavat yhtäsuuruudet:

$$1 + 2 + \ldots + \infty = -\frac{1}{12}$$
$$1^2 + 2^2 + \ldots + \infty^2 = 0$$

ja

$$1^3 + 2^3 + \ldots + \infty^3 = \frac{1}{240}.$$

Hillin arvio oli odotettu, sillä hajaantuvia sarjoja vieroksuttiin yleisesti. Ramanujanin sarjojen voidaan tulkita edustavan Riemannin ζ-funktion arvoja pisteissä -1, -2 ja -3:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Funktio on joskus määritelty vain kompleksiluvuille s, joiden reaaliosa on ykköstä suurempi, mutta sen voi määritellä kaikille $s \neq 1$, missä s on kompleksiluku.

Seuraavaksi Ramanujan kirjoitti itse professori E. W. Hobsonille Cambridgeen, mutta palaute oli torjuvaa. Itse asiassa ei ole varmaa vastasiko Hobson lainkaan. Vihdoin, 16. tammikuuta 1913, Ramanujan kirjoitti Englannin ykkösmatemaatikoksi nousseelle Hardylle.

Hardyn ponnistelut Ramanujanin saamiseksi Englantiin olivat aluksi kaatua siihen, että tämä bramiinina ei katsonut voivansa lähteä tällaiselle matkalle. Taikauskoisen äiti-Komalatammalin unessa näkemä perhejumalatar Namagiri kuitenkin käski Ramanujanin lähteä, joten ongelmana oli enää raha. Intiassa vieraillut brittimatemaatikko E. H. Neville, ja Ramanujanin tukijat Intiassa, joista vaikutusvaltaisin oli Sir Francis Spring, saivat asiat järjestymään. 14. huhtikuuta 1914 Ramanujan saapui Englantiin S.S. Nevasalla.

Ramanujanin ja Hardyn yhteistyö alkoi Ramanujanin muistikirjojen tutkimisella. Työ oli hidasta, mutta vähitellen julkaisuja alkoi ilmestyä. Vuonna 1914 vain yksi Ramanujanin artikkeli *Modular Equations and Approximations to* π julkaistiin *Quarterly Journal of Mathematicsissa.*

Eräs Ramanujanin esitys piille oli seuraava:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)![1103 + 26390n]}{(n!)^4 396^{4n}}.$$

Valitettavasti maailmansota syttyi kesällä 1914 sen jälkeen, kun arkkiherttua Frans Ferdinand murhattiin Sarajevossa 28. kesäkuuta. Sota vaikutti myös elämään Cambridgessä, jossa alkoi näkyä sotilaita. Trinity College tyhjeni matemaatikoista, jotka astuivat palvelukseen. Ramanujan ja Hardy kuitenkin jatkoivat työtään.

Ankaran vegetaarista dieettiä noudattavan Ramanujanin oli ollut työlästä saada kunnon ravintoa Englannissa muutoinkin, mutta sodan syttyminen pahensi tilannetta. Vihdoin keväällä 1917 Ramanujan sairastui vakavasti. Hänen ollessaan parantolassa Putneyssa Hardy kävi tapaamassa häntä: ”Olin tullut taksilla numero 1729, ja huomautin tämän luvun (7x13x19) olevan harvinaisen tylsän, ja että toivoin, ettei se olisi huono enne. ’Ei,’ hän vastasi, ’se on hyvin mielenkiintoinen luku; se on pienin luku, joka kahdella eri tavalla voidaan ilmaista kahden kuution summana.’ Kysyin häneltä luonnollisesti tiesikö hän vastaavan neljänsien potenssien ongelman vastausta; ja hän hetken mietittyään vastasi, ettei voinut nähdä mitään ilmeistä esimerkkiä, mutta hän arveli tällaisen luvun olevan hyvin suuri.”

Ramanujan näytti paranevan syksyyn mennessä, mutta pian hän joutui taas sairaalaan. Tautia hoidettiin tuberkuloosina, ja vasta useita kymmeniä vuosia myöhemmin (1994) se on pystytty diagnosoimaan ameeban aiheuttamaksi maksasairaudeksi. Hän oli ilmeisesti saanut tartunnan nuoruudessaan, mutta ameeba oli koteloitunut oireettomaksi, kunnes aliravitsemus ja stressi laukaisivat sen puhkeamaan uudelleen.

Sairautta saattoi pahentaa Ramanujanin tuntema mielipaha siitä, että hänelle luvattu asema Trinityn fellowna ei toteutunut. Ramanujanin nimitystä vastustettiin myös syistä, jotka vaikuttavat rasistisilta. Hardy oli voimakkaasti ajanut nimitystä, ja hän toimi kaikin tavoin myös Ramanujanin nimittämiseksi fellowksi Royal Societyyn. F.R.S. oli arvostetuin kunnianosoitus, jonka matemaatikko saattoi saada.

Ramanujan ei saanut tietoa F.R.S. -nimitysaikeista ajoissa, vaan masentuneena hän yritti päättää päivänsä hyppäämällä metrojunan eteen. Hän ei vahingoittunut, mutta joutui pidätetyksi: itsemurhan yrittäminen oli rikos. Hardy pelasti Ramanujanin poliisin hoteista vetoamalla juuri F.R.S. -arvoon (joka myönnettiin virallisesti vasta vähän myöhemmin). Pian tämän jälkeen Ramanujan nimitettiin myös Trinityn fellowksi.

Ramanujanin paluuta Intiaan oli suunniteltu aikaisemminkin, mutta vasta sodan loppuminen teki matkan riittävän turvalliseksi. Lähes tunnistamattomaksi muuttunut kalpea ja riutunut Ramanujan saapui Bombayhin 27. maaliskuuta 1919. Hän työskenteli koko sairautensa ajan herkeämättä. Viimeisinä aikoinaan hänen tutkimuksensa koskivat ”vale”-ϑ-funktioita. Näitä havaintojaan hän selosti 20. tammikuuta 1920 päivätyssä pitkässä kirjeessä Hardylle.

Ramanujan kuoli kotikaupungissaan Kumbakonamissa varhain aamulla 26. huhtikuuta 1920 vaimonsa, vanhempiensa ja muiden sukulaisten ympäröimänä.

Ehkä Ramanujanin työn paras asiantuntija Bruce Carl Berndt luettelee katsauksessaan Ramanujanin muistikirjoihin kaksitoista aluetta, joita ne käsittelevät: 1. alkeismatematiikka, 2. lukuteoria, 3. äärettömät sarjat, 4. integraalit, 5. asymptoottiset ekspansiot ja approksimaatiot, 6. gammafunktio ja siihen liittyvät funktiot, 7. hypergeometriset funktiot, 8. q-sarjat, 9. ketjumurtoluvut, 10. thetafunktiot ja modulaariset yhtälöt, 11. Ramanujanin teoria elliptisistä funktioista ja 12. luokkainvariantit. Muistikirjojen tutkimus jatkuu yhä.

Hardy arvioi Ramanujanin merkitystä toteamalla aluksi hänellä olleen erinomaisen muistin, mikä ei kuitenkaan ollut poikkeuksellista matemaatikoilla: ”Hänen näkemyksensä algebrallisista kaavoista, äärettömien sarjojen muunnoksista, jne. oli hämmästyttävä. Tässä suhteessa en ole koskaan tavannut hänen veroistaan, ja voin verrata häntä vain Euleriin tai Jacobiin.” ... ”Muistillaan, kärsivällisyydellään ja laskentakyvyllään hän yhdisti tehokkaan yleistyksen, herkkyyden muodon hahmottamiseen ja kyvyn nopeasti muunnella oletuksiaan, mitkä olivat usein järisyttäviä tehden hänestä omalla erityisalallaan (osaajan), jolla ei ollut vertaa omana aikanaan.”