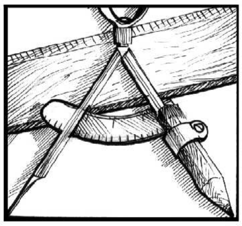
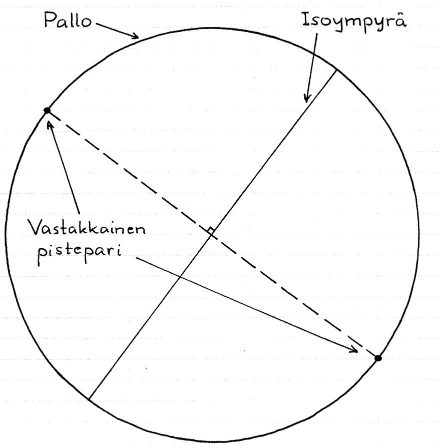


Käyrien välinen dualiteetti (projektiivisessa) tasossa

Georg Metsalo
georg.metsalo@tkk.fi

Tämä kirjoitus on yhteenveto kaksiosaisesta esitelmästä Maunulan yhteiskoulun matematiikkapäivänä 10.11.2007, jonka pidin yhteistyössä Simo Kivelän ja Mika Spåran kanssa (katso Solmu 1/2008). Kirjoitus on laadittu yhteistyössä Simo Kivelän kanssa.

Keskeinen idea tässä on, että jokaista vastakkaista pisteparia pallolla vastaa isoympyrä pallolla ja päinvastoin.



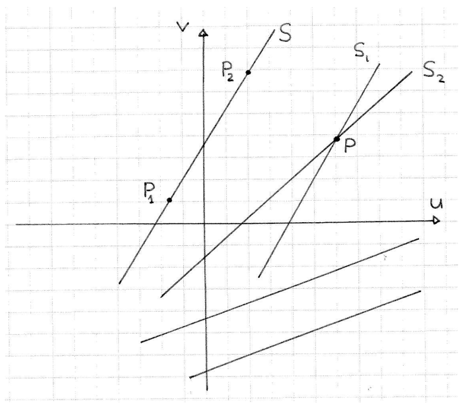
Kun yhdistämme pisteparin suoralla (jolloin se kulkee pallon keskipisteen kautta) ja otamme tason, joka myös kulkee pallon keskipisteen kautta ja on kohtisuora suoraa vastaan, niin taso leikkaa palloa pitkin isoympyrää.

Samalla tavalla saamme isoympyrästä vastakkaisen pisteparin.

Maapallolla esimerkiksi pohjois- ja etelänapaa vastaa päiväntasaaja ja vastaavasti päiväntasaajaa vastaavat navat.

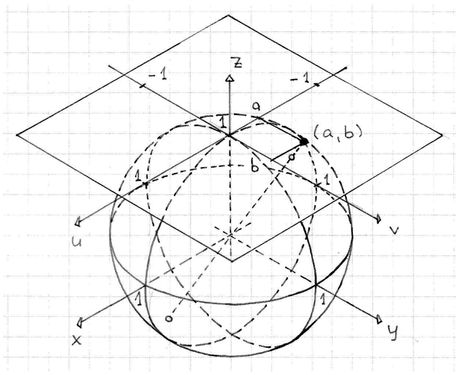
Projektiivinen taso: meno-paluu äärettömyyteen

Tason kaksi eri pistettä P_1 ja P_2 määräävät tason suoran S, ja kaksi erisuuntaista suoraa S_1 ja S_2 määräävät pisteen P.



Jos suorat ovat lähes yhdensuuntaiset, on piste hyvin kaukana, joten sanomme, että kaksi yhdensuuntaista suoraa määrää *äärettömyyspisteen.* Kaksi äärettömyyspistettä määrää puolestaan *äärettömyyssuoran* ja jos lisäämme tasoon äärettömyyspisteet ja äärettömyyssuoran, saamme *projektiivisen tason.*

Projektiivinen taso on helpompi ymmärtää pallon avulla:



Olkoon uv-taso taso $z = 1$ xyz-avaruudessa. Silloin jokainen piste uv-tasossa antaa vastakkaisen pisteparin yksikköpallolla xyz-avaruudessa, nimittäin pisteet, missä xyz-avaruuden origon ja uv-tason pisteen kautta kulkeva suora leikkaa yksikköpallon (keskusprojektio).

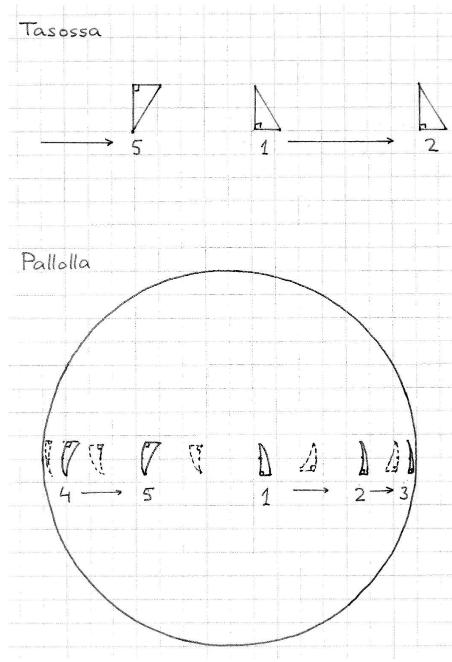
Piste (a,b) uv-tasossa antaa pisteet

$$\pm\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right)$$

xyz-avaruuden yksikköpallolla. Suora uv-tasossa antaa isoympyrän pallolla, äärettömyyspisteet *projektiivisessa* uv-tasossa antavat vastakkaiset pisteparit pallon päiväntasaajalla (xy-tasossa) ja äärettömyyssuora antaa pallon päiväntasaajan.

Jos ajattelee palloa projektiivisen tason kaksinkertaisena versiona, niin huomaa, että äärettömyyspisteet ja äärettömyyssuora eivät ole sen kummallisempia kuin muutkaan pisteet ja suorat:
- Vastakkaiset pisteparit päiväntasaajalla ovat kuten kaikki muutkin vastakkaiset pisteparit pallolla, joten pisteet äärettömyydessä projektiivisessa uv-tasossa ovat kuten kaikki muutkin pisteet.
- Päiväntasaaja on samanlainen kuin kaikki muutkin isoympyrät pallolla, joten äärettömyyssuora projektiivisessa uv-tasossa on samanlainen kuin kaikki muutkin suorat.

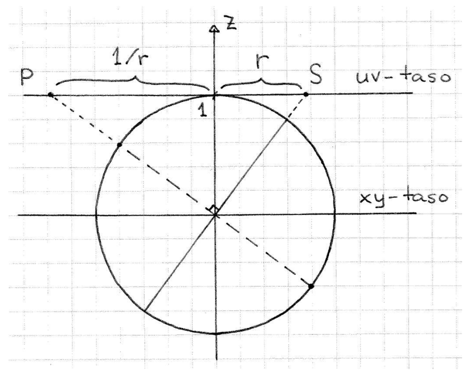
Projektiivisella tasolla on kuitenkin eräs yllättävä ominaisuus:

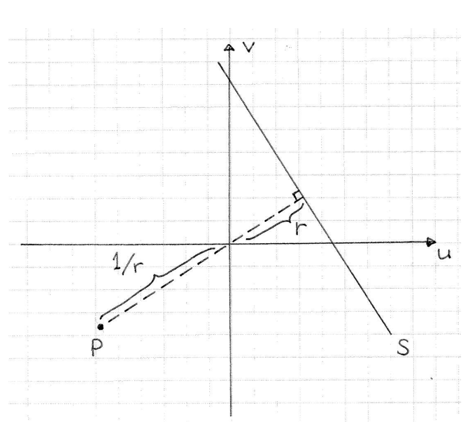


Jos menee äärettömyyteen ja palaa takaisin toiselta puolelta, ovat vasen ja oikea vaihtuneet! Matka äärettömyyden kautta aiheuttaa peilauksen!

Tasokäyrien välinen dualiteetti

Jokaista suoraa S projektiivisessa uv-tasossa vastaa *duaalipiste* P projektiivisessa uv-tasossa.





Suora S antaa isoympyrän pallolla, isoympyrää puolestaan vastaa vastakkainen pistepari pallolla (kuten aikaisemmin kuvattiin), ja tämä pistepari pallolla antaa puolestaan suoran *duaalipisteen* P projektiivisessa uv-tasossa.

Jos suoran S (lyhin) etäisyys uv-tason origosta on r, niin sen duaalipisteen P etäisyys origosta on $1/r$ ja P on origon toisella puolella.

Jos suora kulkee uv-tason origon kautta, sen duaalipiste on jokin äärettömyyspiste ja jos suora on äärettömyyssuora, sen duaalipiste on uv-tason origo.

Lukijan todistettavaksi jää seuraava:

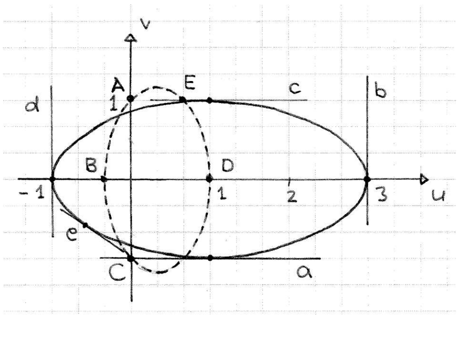
Propositio: Suoran $au + bv + 1 = 0$ duaalipiste on uv-tason piste (a,b).

uv-tason käyrän voi esittää muodossa $v = h(u)$ (funktion h *kuvaaja*). Yleisempi tapa esittää käyrä on *parametrisoitu käyrä* $(u,v) = (f(t),g(t))$, missä f ja g ovat funktioita. Jos ajattelemme, että meillä on piste, joka liikkuu uv-tasossa, niin sen u-koordinaatti on ajan funktio: $u = f(t)$. Samalla tavalla myös sen v-koordinaatti on ajan funktio: $v = g(t)$. Tässä olemme kuitenkin kiinnostuneita itse käyrästä geometrisena objektina.

Funktion h kuvaajan voi esittää myös parametrisoituna käyränä $(u,v) = (t,h(t))$, joten parametrisoidut käyrät ovat yleisemmät kuin funktioitten kuvaajat. Voimme myös ajatella, että parametrisoitu käyrä on projektiivisessa uv-tasossa. Silloin sitä vastaa kaksi vastakkaista käyrää yksikköpallolla xyz-avaruudessa (keskusprojektion avulla).

Jos nyt otamme parametrisoidun käyrän projektiivisessa uv-tasossa ja piirrämme *tangenttisuoran* käyrän jokaiseen pisteeseen, on jokaisella tangenttisuoralla oma duaalipisteensä. Nämä duaalipisteet muodostavat projektiivisessa uv-tasossa uuden käyrän, jota voimme (väliaikaisesti) sanoa alkuperäisen käyrän *kaverikäyräksi*.

Esimerkki 1:



Ellipsin $\dfrac{(u-1)^2}{2^2} + \dfrac{v^2}{1^2} = 1$ voi antaa parametrisoituna käyränä muodossa $(u,v) = (1 + 2\cos t, \sin t)$. Sillä on mm. tangenttisuorat a, b, c, d ja e ja niitä vastaavat duaalipisteet ovat A, B, C, D ja E. Kaikkien tangenttisuorien duaalipisteet muodostavat ellipsin kaverikäyrän, joka näyttää olevan toinen, pienempi ellipsi. Sillä puolestaan on oma kaverikäyrä, jolla taas on oma kaverikäyrä jne.

Näemme, että jos käyrä on symmetrinen origon kautta kulkevan suoran suhteen, myös kaverikäyrä on symmetrinen saman suoran suhteen.

Jotta saisimme käyrän tangenttisuoran (ja siitä suoran duaalipisteen), tarvitsemme *derivaatan.*

Pisteessä $(u_0,v_0) = (f(t_0),g(t_0))$ on käyrän kulmakerroin $g'(t_0)/f'(t_0)$, joten tähän pisteeseen asetetun tangenttisuoran yhtälö on

$$v - g(t_0) = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)} \cdot (u - f(t_0)) \quad \text{eli}$$

$$g'(t_0)\cdot u - f'(t_0)\cdot v - f(t_0)\cdot g'(t_0) + f'(t_0)\cdot g(t_0) = 0 \quad \text{eli}$$

$$\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)\cdot g(t_0) - f(t_0)\cdot g'(t_0)}\cdot u + \frac{-f'(t_0)}{f'(t_0)\cdot g(t_0) - f(t_0)\cdot g'(t_0)}\cdot v + 1 = 0$$

Tämän (tangentti-)suoran duaalipiste on silloin proposition mukaan

$$\left(\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)\cdot g(t_0) - f(t_0)\cdot g'(t_0)}, \frac{-f'(t_0)}{f'(t_0)\cdot g(t_0) - f(t_0)\cdot g'(t_0)}\right).$$

Kun t_0 muuttuu, liikumme pitkin käyrää, jolloin tangenttisuora muuttuu ja myös sen duaalipiste muuttuu.

Jos $(f_1(t),g_1(t))$ on alkuperäinen käyrä, on kaverikäyrän parametriesitys

$$(f_2(t),g_2(t)) =$$
$$\left(\frac{g_1'(t)}{f_1'(t)\cdot g_1(t) - f_1(t)\cdot g_1'(t)}, \frac{-f_1'(t)}{f_1'(t)\cdot g_1(t) - f_1(t)\cdot g_1'(t)}\right) \quad (*)$$

Lukijan todistettavaksi (käyttämällä tunnettuja derivoimissääntöjä) jää seuraava keskeinen tulos:

Lause: Kaverikäyrän kaverikäyrä on alkuperäinen käyrä, ts.

$$\left(\frac{g_2'(t)}{f_2'(t)\cdot g_2(t) - f_2(t)\cdot g_2'(t)}, \frac{-f_2'(t)}{f_2'(t)\cdot g_2(t) - f_2(t)\cdot g_2'(t)}\right) = (f_1(t),g_1(t))$$

Käyrä ja sen kaverikäyrä muodostavat siis *tasaarvoisen parin*! Sanomme siksi kaverikäyrää alkuperäisen käyrän *duaalikäyräksi* (ja lauseen perusteella alkuperäinen käyrä on puolestaan duaalikäyränsä duaalikäyrä).

(Todistuksessa kertoimet $f_1' \cdot g_1 - f_1 \cdot g_1'$ ja $f_1' \cdot g_1'' - f_1'' \cdot g_1'$ supistuvat pois. Projektiivisessa tasossa nolla nimittäjässä ei yleensä aiheuta ongelmia. Jos $f_1' \cdot g_1 = f_1 \cdot g_1'$, niin alkuperäisen käyrän tangenttisuora kulkee origon kautta, jolloin duaalikäyrä menee äärettömyyteen. Jos $f_1' \cdot g_1'' = f_1'' \cdot g_1'$, on alkuperäisellä käyrällä kaarevuus $= 0$ (mahdollinen *käännepiste*) ja duaalikäyrällä mahdollisesti *kärkipiste*.)

Duaalikäyrän parametriesityksestä $(*)$ näemme, että käyrän skaalaus skaalaa myös duaalikäyrän:

$$(f_1,g_1) \to (a \cdot f_1,g_1) \Rightarrow (f_2,g_2) \to (\frac{1}{a} \cdot f_2,g_2).$$

Vastaavasti jos skaalaus on v-suuntainen:

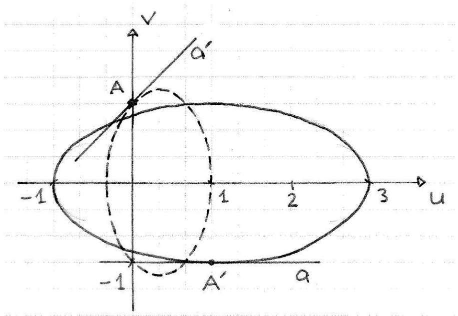
$$(f_1,g_1) \to (f_1,a \cdot g_1) \Rightarrow (f_2,g_2) \to (f_2,\frac{1}{a} \cdot g_2).$$

Sama pätee, jos skaalaus tapahtuu mielivaltaiseen suuntaan. Pätee myös että

$$(f_1,g_1) \to (a \cdot f_1,a \cdot g_1) \Rightarrow (f_2,g_2) \to (\frac{1}{a} \cdot f_2,\frac{1}{a} \cdot g_2).$$

Nyt voimme laskea eri käyrien duaalikäyriä:

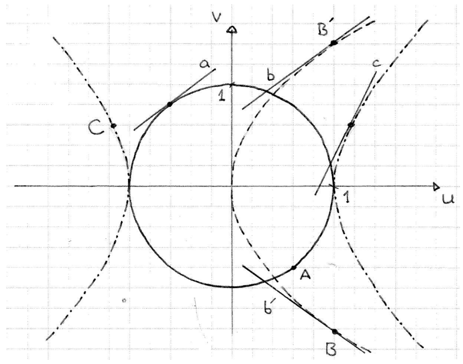
Jatkoa esimerkkiin 1:

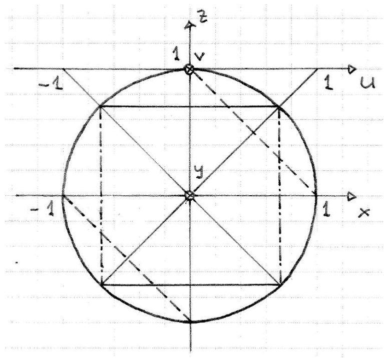


$$(f_1,g_1) = (1 + 2\cos t, \sin t)$$
$$\Rightarrow (f_2,g_2) = \left(-\frac{\cos t}{2+\cos t}, -\frac{2\sin t}{2+\cos t}\right),$$

joten duaalikäyrä on ellipsi $\dfrac{(u-1/3)^2}{(2/3)^2} + \dfrac{v^2}{(2/\sqrt{3})^2} = 1$. Alkuperäisen ellipsin tangenttisuora a antaa pisteen A duaalikäyrällä ja duaalikäyrän tangenttisuora a' antaa puolestaan pisteen A' alkuperäisellä ellipsillä.

Esimerkki 2: Yksikköympyrä $u^2 + v^2 = 1$ (parametrimuodossa esim. $(u,v) = (\cos t, \sin t)$), paraabeli $u = v^2/2$ (esim. $(u,v) = (t^2/2,t)$) ja hyperbeli $u^2 - v^2 = 1$ (esim. $(u,v) = (\frac{1}{\cos t}, \tan t)$) ovat *itsensä* duaalikäyriä.



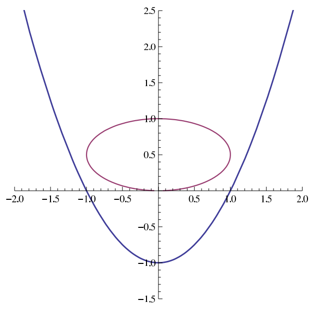


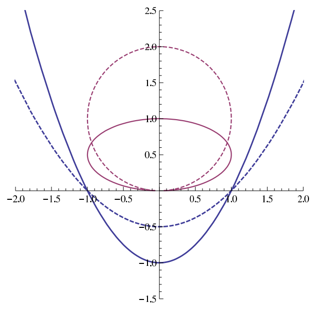
Ympyrän tangenttisuoran a duaalipiste on (vastakkainen) piste A. Paraabelin tangenttisuoran b duaalipiste on B ja tangenttisuoran b' duaalipiste on B'. Hyperbelin tangenttisuoran c duaalipiste on C.

Pallolla näkee, että nämä kolme käyrää ovat lähekkäistä sukua: jokainen vastaa (keskusprojektion kautta) kahta vastakkaista $\frac{\pi}{4}$-säteistä ympyrää yksikköpallolla, ja nämä kolme käyrää (projektiivisessa) uv-tasossa saadaan pyörittämällä yksikköpalloa xyz-avaruudessa y-akselin ympäri.

Jos pyöritämme yksikköpalloa xyz-avaruudessa, niin vastakkainen käyräpari ja sen (myös vastakkainen) duaalikäyräpari pyörivät. Vastaavat käyrät projektiivisessa uv-tasossa (käyrä ja sen duaalikäyrä) muuttuvat vastaavasti, mutta pysyvät toistensa duaalikäyrinä *(katso esimerkki 6' alhaalla).*

Esimerkki 3: Paraabeli $v = u^2 - 1$ ja ellipsi $u^2 + (2v-1)^2 = 1$ ovat toistensa duaalikäyriä. $(f_1(t),g_1(t)) = (t,t^2-1) \Rightarrow f_1' \cdot g_1 - f_1 \cdot g_1' = -(t^2+1) \Rightarrow (f_2(t),g_2(t)) = \left(\dfrac{-2t}{t^2+1}, \dfrac{1}{t^2+1}\right) \Rightarrow (f_2)^2 + (2g_2-1)^2 = 1$

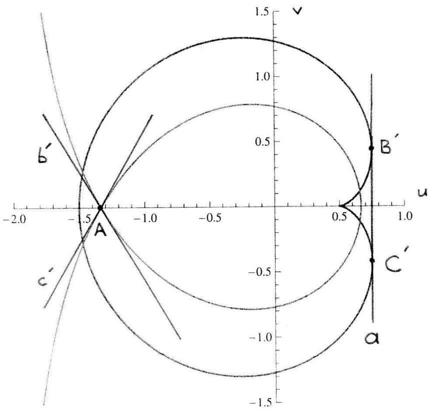




Esimerkki 3' (vertikaalinen skaalaus): Paraabeli $v = (u^2 - 1)/2$ ja ympyrä $u^2 + (v - 1)^2 = 1$ ovat toistensa duaalikäyriä.

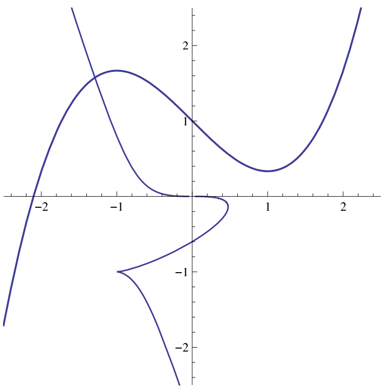
Esimerkki 4: $v = \dfrac{2u^3}{3\sqrt{3}}$ ja $v = -\dfrac{2u^3}{3\sqrt{3}}$ ovat toistensa duaalikäyriä.

Esimerkki 5: Kardioidi $(f_1(t),g_1(t)) = (\cos t - \cos(2t)/2, \sin t - \sin(2t)/2)$ syntyy, kun $\frac{1}{2}$-säteinen ympyrä kierii ympyrällä $u^2 + v^2 = (1/2)^2$ uv-tasossa. Sen duaalikäyrä on *silmukka*.



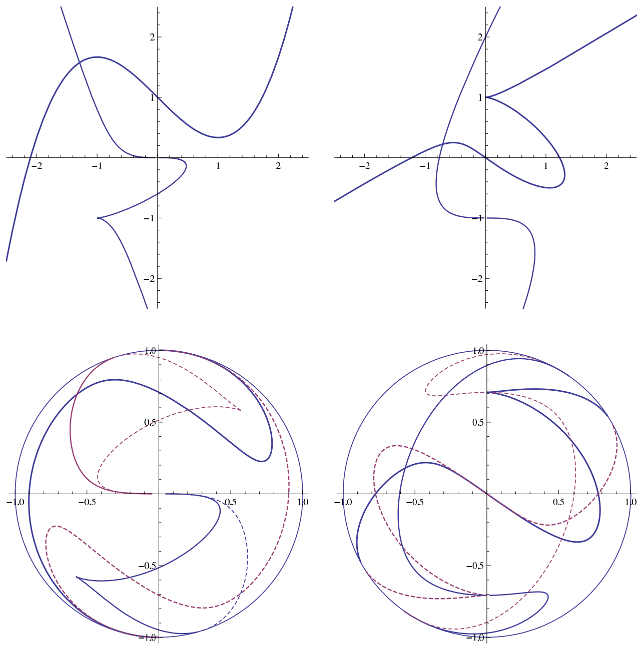
Kardioidin tangenttisuora a on kaksinkertainen tangentti ja sen duaalipiste on silmukan leikkauspiste A. Silmukan tangenttisuorien b' ja c' duaalipisteet ovat kardioidin pisteet B' ja C'.

Esimerkki 6: $v = h(u) = u^3/3 - u + 1$

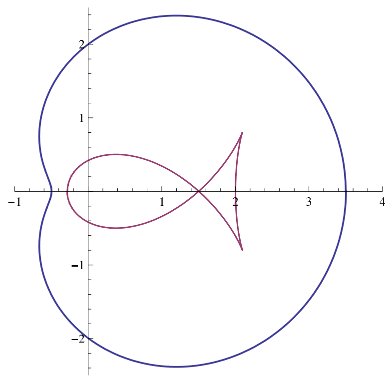


Käyrällä on yksi käännepiste ja duaalikäyrällä on kärkipiste. Käyrällä on tangentti, joka kulkee origon kautta ja duaalikäyrä menee äärettömyyteen. Duaalikäyrälläkin on tangentti, joka kulkee origon kautta ja alkuperäinen käyrä menee myös äärettömyyteen (mutta toiseen äärettömyyspisteeseen). Origo on duaalikäyrän käännepiste ja alkuperäisellä käyrällä on kärkipiste äärettömyydessä.

Esimerkki 6' (yksikköpallon pyöritys): Kun otamme käyrän ja sen duaalikäyrän, projisoimme ne yksikköpallolle, pyöritämme palloa 45° astetta x-akselin ympäri ja projisoimme takaisin uv-tasolle, saamme kaksi uutta käyrää, jotka *myös* ovat toistensa duaalikäyrät. Alkuperäisen käyrän kärkipiste on nyt pisteessä $(u,v) = (0,1)$ ja alkuperäisen duaalikäyrän kärkipiste on nyt äärettömyydessä.



Esimerkki 7: Pascalin simpukan $(f_1(t),g_1(t)) = ((2 + \frac{3}{2}\cos t)\cos t, (2 + \frac{3}{2}\cos t)\sin t)$ (*napakoordinaateissa* $r(\theta) = 2 + \frac{3}{2}\cos\theta$) duaalikäyrä on kalanmuotoinen. Simpukalla on kaksinkertainen tangenttisuora ja sen duaalipisteessä kala leikkaa itsensä. Simpukalla on kaksi käännepistettä ja kalalla on kaksi kärkipistettä.



Lisäys

Vastaavanlainen dualiteetti esiintyy myös pinnoilla (projektiivisessa) kolmiulotteisessa avaruudessa ja ilmeisesti myös $(n - 1)$-ulotteisilla n.s. *hyperpinnoilla* projektiivisessa n-uloitteisessa avaruudessa, mutta niiden käsittelyyn tarvitaan *osittaisderivaattoja* ja *Jacobin determinantteja*, jotka eivät kuulu lukion matematiikkaan. Annan kuitenkin yhden esimerkin duaalipinnoista (projektiivisessa) kolmiulotteisessa avaruudessa.

Idea on samankaltainen kuin tasossa: pinnalla on jokaisessa pisteessä *tangenttitaso* ja jokaisella tangenttitasolla on *duaalipiste*: jos tason (lyhyin) etäisyys origosta on r, on duaalipiste origon toisella puolella etäisyydellä $1/r$ (ja jos tangenttitaso kulkee origon kautta, on sen duaalipiste äärettömyydessä). Nämä duaalipisteet muodostavat uuden pinnan, jonka voimme sanoa alkuperäisen pinnan *kaveripinnaksi*. Mutta **kaveripinnan kaveripinta on alkuperäinen pinta**, joten meillä on tasa-arvoinen pintojen pari ja voimme puhua *duaalipinnoista*.

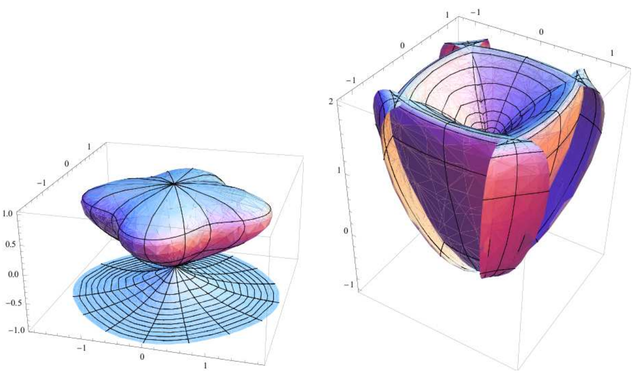
Olkoon $(u,v,w) = (f_1(s,t),g_1(s,t),h_1(s,t))$ *parametrisoitu* pinta. Sen duaalipinnan parametriesitys on silloin

$$(f_2(s,t),g_2(s,t),h_2(s,t)) = -\frac{\left(\frac{\partial(g_1,h_1)}{\partial(s,t)}, \frac{\partial(h_1,f_1)}{\partial(s,t)}, \frac{\partial(f_1,g_1)}{\partial(s,t)}\right)}{f_1 \cdot \frac{\partial(g_1,h_1)}{\partial(s,t)} + g_1 \cdot \frac{\partial(h_1,f_1)}{\partial(s,t)} + h_1 \cdot \frac{\partial(f_1,g_1)}{\partial(s,t)}}.$$

Esimerkki 8: Oheisessa kuvassa vasemmalla olevan pinnan parametriesitys on

$$(u,v,w) = \left(r\cos t, r\sin t, \frac{1-s^2}{1+s^2}\right),$$

missä $r = (\frac{s}{8} - \frac{2s}{(1+s^2)^2})(2 + e^{-s/3}\cos^2(2t))$, ja oikealla on sen duaalipinta.



Piste $(u,v,w) = (0,0,1)$ on tavallaan pinnan pohjoisnapa ja siellä sen tangenttitaso on taso $w = 1$. Sitä vastaa duaalipiste $(0,0,-1)$, joka on duaalipinnan etelänapa. Taso $w = -1$ on pinnan tangenttitaso äärettömyydessä ja sitä vastaa duaalipiste $(0,0,1)$ duaalipinnalla (jossa tangenttitasot puolestaan kulkevat origon kautta). Pinnalla on tangenttitasoja, jotka sivuavat pintaa kahdessa pisteessä ja duaalipinta leikkaa itsensä (kuten Pascalin simpukka ja kala esimerkissä 7 ylhäällä). Taso $w = 2$ sivuaa duaalipintaa pitkin käyrää ja tämän tangenttitason duaalipiste on kartiomainen piste $(0,0,-1/2)$ alkuperäisellä pinnalla.

Keskeinen idea tässä on *dualiteetti*: saamme alkuperäisen pinnan duaalipinnan monimutkaisen prosessin avulla, ja jos sovellamme *samaa* monimutkaista prosessia duaalipinnalle, saamme alkuperäisen pinnan takaisin!

Tehtäviä:

Mitä voimme sanoa duaalikäyrästä (kaverikäyrästä), jos alkuperäinen käyrä
a) kulkee origon kautta?
b) menee äärettömyyteen?
c) leikkaa itsensä?
d) on symmetrinen x-akselin suhteen?
e) on symmetrinen jonkin suoran suhteen?
f) pysyy samannäköisenä, jos se kierretään 180° origon ympäri?
g) pysyy samannäköisenä, jos se kierretään 120° origon ympäri?

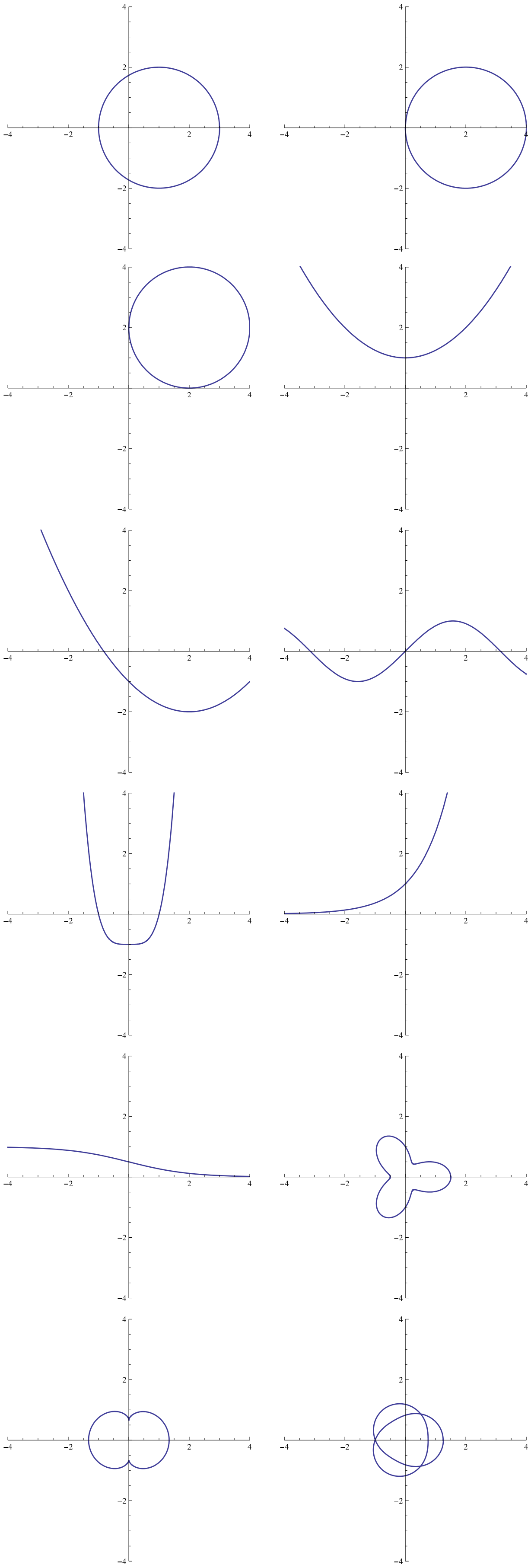
Mitä voimme sanoa alkuperäisestä käyrästä, jos duaalikäyrällä on
a) kärkipiste?
b) käännepiste?
c) origon kautta kulkeva tangenttisuora?

Oikein vai väärin?
a) Jos alkuperäinen käyrä on yksikköympyrän sisällä, niin duaalikäyrä on sen ulkopuolella.
b) Jos duaalikäyrä on yksikköympyrän sisällä, niin alkuperäinen käyrä on sen ulkopuolella.
c) Jos alkuperäinen käyrä on yksikköympyrän ulkopuolella, niin duaalikäyrä on sen sisällä.
d) Jos alkuperäinen käyrä on symmetrinen jonkun suoran suhteen, niin duaalikäyrä on symmetrinen suoran duaalipisteen suhteen.

Yhdistä alhaalla olevat käyrät pareittain. (Yhdellä annetulla alkuperäisellä käyrällä ei ole vastaavaa duaalikäyrää annettujen duaalikäyrien joukossa ja yhdellä annetulla duaalikäyrällä ei ole vastaavaa alkuperäistä käyrää annettujen alkuperäisten käyrien joukossa.) Tarkista vaikkapa Mathematican avulla.

Alkuperäiset käyrät:
1) Ympyrä
2) Ympyrä
3) Ympyrä
4) Paraabeli $v = 1 + u^2/4$ (eli $u = f(t) = t, v = g(t) = 1 + t^2/4$)
5) Paraabeli $v = \frac{1}{4}(u-2)^2 - 2$
6) $v = \sin u$
7) $v = u^4 - 1$
8) $v = \exp(u) = e^u$
9) $v = 1/(1+e^u)$
10) Kolmiapila $u = f(t) = (1 + \cos(3t)/2)\cos t, v = g(t) = (1 + \cos(3t)/2)\sin t$ (Napakoordinaateissa: $r = 1 + \cos(3\theta)/2$)
11) Nefroidi $u = f(t) = \sin t - \sin(3t)/3, v = g(t) = \cos t - \cos(3t)/3$ (Kahvikupin käyrä)
12) Kolmiapilasolmun projektio $u = f(t) = (1 + \frac{1}{4}\cos(3t/2))\cos t, v = g(t) = (1 + \frac{1}{4}\cos(3t/2))\sin t$ (Napakoordinaateissa: $r = (1 + \frac{1}{4}\cos(3\theta/2))$

Alkuperäiset käyrät:



Duaalikäyrät: