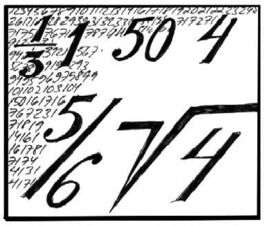


Dynamiikkaa, derivaattoja ja ennustavia kuumemittareita

Mikko Malinen
TkK, opiskelija
Teknillinen korkeakoulu

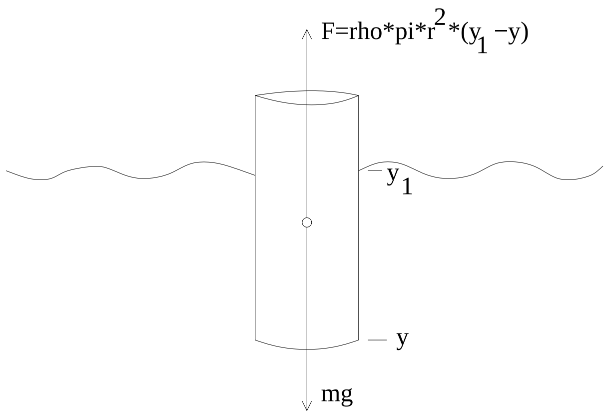
Johdanto

Dynamiikka on mekaniikan osa, joka käsittelee kappaleiden liikkeitä ja niihin liittyviä voimia. Tämän artikkelin ensimmäisessä osassa esitetään mielenkiintoinen dynamiikan sovellus: vedenkorkeuden laskeminen, kun vedenkorkeutta ei suoraan voida mitata, vaan käytetään massaa omaavaa kohoa. Artikkelissa osoitetaan, että vedenkorkeus voidaan laskea, jos tiedetään kohon asema ja kohon aseman toinen derivaatta. Artikkelin toisessa osassa käsitellään lämmön johtumista, aineen lämpenemistä lämmittimen ansiosta. Artikkelissa johdetaan yhtälö aineen loppulämpötilalle. Tämän yhtälön avulla aineen loppulämpötila voidaan laskea, kun tiedetään aineen lämpötila hetkellä t sekä sen lämpötilan ensimmäinen ja toinen derivaatta. Lämmittimen lämpötilaa ei tarvitse tietää. Artikkelin molemmat osat ovat erinomaisia esimerkkejä siitä, miten hyödyllisiä derivaatat ovat.

Vedenkorkeusesimerkki

Tarkastellaan ympyräsylinterin muotoista kohoa vedessä (kuva 1). Haluamme tietää veden korkeuden ja laskea sen kohon aseman avulla. Kohoon vaikuttava kokonaisvoima on kuvan 1 voimien summa:

$$F_1 = \rho \cdot \pi r^2 \cdot (y_1 - y) - mg \tag{1}$$



Kuva 1. Koho vedessä. Muuttujat kuvassa: ρ veden tiheys, r kohon säde, y_1 veden taso, y kohon asema (pystysuunnassa).

Veden vastusta ei oteta huomioon. Newtonin ensimmäinen laki sanoo, että

$$F_1 = ma. \tag{2}$$

(1):stä ja (2):sta seuraa

$$ma = \rho \cdot \pi r^2 (y_1 - y) - mg.$$

Koska kiihtyvyys a on toinen aikaderivaatta y:stä, voidaan kirjoittaa

$$my'' - \rho \cdot \pi r^2 (y_1 - y) - mg = 0.$$

Ratkaisemalla tämä y_1:n suhteen saadaan

$$y_1 = \frac{my''}{\rho\pi r^2} + y - \frac{mg}{\rho\pi r^2}.$$

Tämä voidaan kirjoittaa

$$\boxed{y_1 = by'' + y - c}$$

yksinkertaisuuden vuoksi. Tässä b ja c ovat tunnettuja vakioita. Tämä on tuloksemme. Veden taso riippuu kohon aseman toisesta derivaatasta ja itse kohon asemasta.

Kappaleen loppulämpötila voidaan ennustaa

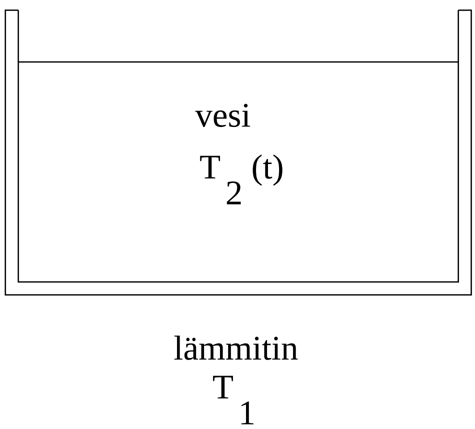
Lämmönvaihtoa kahden kappaleen välillä voidaan mallintaa yhtälöllä

$$\frac{dQ}{dt} = kA\frac{T_H - T_C}{L}$$

(ks. [1]). Tässä Q on kappaleen 2 lämpöenergia, k on lämmönjohtavuus, A on välissä olevan johtavan materiaalin läpileikkauspinta-ala, T_H on kappaleen 1 lämpötila, T_C on kappaleen 2 lämpötila ja L on kappaleiden 1 ja 2 välinen etäisyys. Tämä voidaan kirjoittaa lyhyesti

$$\frac{dQ}{dt} = a(T_1 - T_2(t))$$

missä Q on kappaleen 2 lämpöenergia, a on positiivinen verrannollisuuskerroin ja T_1 ja T_2 ovat kappaleiden 1 ja 2 lämpötilat. Katso esimerkkiasetelma kuvassa 2.



Kuva 2. Esimerkkiasetelma.

Lämpöenergia on verrannollinen lämpötilaan

$$Q - Q_0 = cm(T - T_0)$$

missä Q_0 on juuri sulamislämpötilan yläpuolella olevan kappaleen lämpöenergia, T ja T_0 ovat Celsius-asteikolla ja T:n sallitaan saavan arvoja joissa kappale on nestefaasissa. Esimerkiksi vedellä $0 < T < 100^oC$. T_0 on kappaleen sulamislämpötila. Tästä saadaan

$$T - T_0 = \frac{Q - Q_0}{cm}.$$

Kun muistetaan myös, että

$$\frac{d(Q - Q_0)}{dt} = \frac{dQ}{dt}$$

ja

$$\frac{d(T - T_0)}{dt} = \frac{dT}{dt}$$

voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}\frac{dT_2(t)}{dt} &= \frac{d(T_2(t) - T_0)}{dt} = \frac{1}{cm}\cdot\frac{d(Q - Q_0)}{dt}\\ &= \frac{1}{cm}\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{cm}a(T_1 - T_2(t))\\ &= b(T_1 - T_2(t)), \quad b > 0, b \neq \infty.\end{aligned}$$

Tämä on differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisu on

$$T_2(t) = T_1 + e^{-bt}\cdot C. \tag{3}$$

Derivoimalla tulos saadaan

$$T_2'(t) = -be^{-bt}\cdot C. \tag{4}$$

Derivoimalla uudestaan saadaan

$$T_2''(t) = b^2e^{-bt}\cdot C. \tag{5}$$

(4):sta ja (5):sta saadaan

$$\frac{T_2'(t)}{-b} = \frac{T_2''(t)}{b^2}.$$

Ratkaisemalla b saadaan

$$b = -\frac{T_2''(t)}{T_2'(t)}, \quad T_2''(t) \neq 0, T_2'(t) \neq 0.$$

(4):stä ja sijoittamalla b saadaan

$$C = \frac{T_2'(t)}{\frac{T_2''(t)}{T_2'(t)}e^{\frac{T_2''(t)}{T_2'(t)}\cdot t}} = \frac{(T_2'(t))^2}{T_2''(t)e^{\frac{T_2''(t)}{T_2'(t)}\cdot t}}.$$

Hetkellä $t = 0+$ (juuri 0:n jälkeen) C:stä tulee

$$C_{t=0+} = \frac{(T_2'(0+))^2}{T_2''(0+)}.$$

(3):stä ja sijoittamalla $C_{t=0+}$ saadaan (hetkellä $t = 0+$)

$$\begin{aligned}T_1 = T_2(0+) - \frac{(T_2'(0+))^2}{T_2''(0+)},\\ T_2'(0+) \neq 0, \quad T_2''(0+) \neq 0.\end{aligned} \tag{6}$$

$T_2(t)$:n raja-arvo on (yhtälöstä (3)):

$$\lim_{t\to\infty} T_2(t) = \lim_{t\to\infty} T_1 + e^{-bt}\cdot C = T_1.$$

Tämä raja-arvo on loppulämpötila. Meillä on jo yhtälö (6) T_1:lle. Tämän yhtälön oikealla puolella on vain $T_2(0+)$ ja sen kaksi derivaattaa:

$$T_{2_{final}} = T_2(0+) - \frac{(T_2'(0+))^2}{T_2''(0+)}.$$

Koska mitä tahansa ajanhetkeä voidaan pitää uutena alkuajanhetkenä, voidaan kirjoittaa

$$\boxed{T_{2_{final}} = T_2(t) - \frac{(T_2'(t))^2}{T_2''(t)}, \quad t > 0}$$

joten kappaleen loppulämpötila voidaan ennustaa kun sen lämpötila ja lämpötilan kaksi derivaattaa voidaan mitata hetkellä $t > 0$. Lopuksi esitetään jo otsikossa mainittu sovellus: Menetelmää voitaisiin käyttää elektronisessa kuumemittarissa ennustamaan anturin loppulämpötila eli nopeuttamaan lämpötilan mittaamista.

Johtopäätökset

Tässä artikkelissa esitettiin kaksi menetelmää laskea muuttujan arvo silloin, kun sitä ei voida suoraan mitata. Kumpikin menetelmä on hyödynnettävissä käytännössä ja kummassakin derivaatat ovat merkittävässä osassa. Ne korostavat derivaattojen merkitystä.

Viitteet

[1] Hugh D.Young ja Roger A. Freedman, *University Physics*, 9. laitos, Addison-Wesley, 1996