Matematiikkaolympialaiset 2008 – kuusi vaikeaa tehtävää

Matti Lehtinen
Maanpuolustuskorkeakoulu

49. Kansainväliset matematiikkaolympialaiset pidettiin Madridissa 14.–22. heinäkuuta 2008. Kilpailijoita oli 535 ja he edustivat 97:ää eri maata. Kilpailijoilla oli tavan mukaan edessään kahtena päivänä pidetyissa neljän ja puolen tunnin mittaisissa kokeissa kuusi tehtävää.

Tehtävien laadintaprosessi on kolmivaiheinen. Kaikilla olympialaisiin osallistuvilla mailla, käytännössä henkilöillä, jotka eri maissa osallistumista hoitavat, on mahdollisuus lähettää tehtäväehdotuksia. Ehdotuksia käsittelee asiantuntijakomitea, joka valitsee tehtävistä noin 30 esiteltäviksi kaikkien joukkueiden johtajista koostuvalle siis noin satajäseniselle tuomaristolle. Komitea ryhmittelee ehdotuksensa neljään aihealueeseen: algebra, kombinatoriikka, geometria ja lukuteoria. Tuomaristo saa tutustua tehtäviin ensin ilman ratkaisuja ja sitten komitean toimittamien ratkaisuehdotusten kera. Tämän jälkeen tuomaristo valitsee parin päivän aikana perusteellisten keskustelujen jälkeen kuusi tehtävää yrittäen pitää silmällä sekä eri aihealueiden edustusta että vaikeustason vaihtelua. Käsillä olevaan sarjaan päätyi kaksi geometrian tehtävää, kaksi algebran kategoriasta valittua, yksi kombinatorinen ja yksi lukuteoreettinen tehtävä. Jakauma oli tavanomainen.

Käsittelen seuraavassa tehtävät vaikeusjärjestyksessä helpoimmasta alkaen. Järjestys perustuu kilpailijoiden suorituksiin, mutta se käy myös yksiin tuomariston ajatusten kanssa. Tapana on asettaa helpoimmat tehtävät sarjan numeroiksi 1 ja 4, jolloin kumpanakin kilpailupäivänä ensimmäinen tehtävä on helpoin. Vaikeimmiksi arvioidut tehtävät saavat numerot 3 ja 6. Matematiikkaolympialaisiin on vakiintunut käytäntö, jonka mukaan kunkin tehtävän arvosteluasteikko on $0-7$. Kunkin tehtävän kohdalla jaossa oli siis $535 \cdot 7 = 3745$ pistettä.

Tehtävä 1: helppo geometrian tehtävä

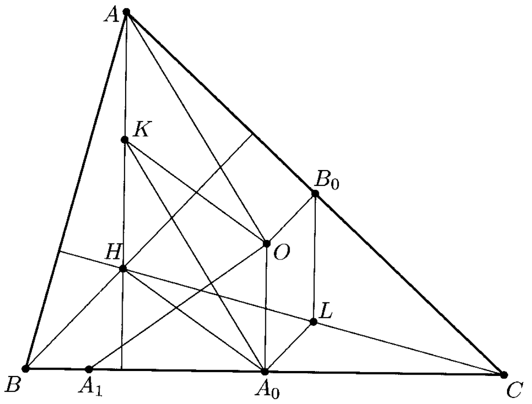
Arvostelussa eniten pisteitä, 2664 eli 71 % mahdollisista, kertyi tehtävälle 1, joka oli luonteeltaan geometrinen. Tehtävä oli alkuaan Venäjän ehdotus. Seitsemän pisteen suorituksia oli 321, nollan 59.

Teräväkulmaisen kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste on H. Pisteen H kautta kulkeva ympyrä, jonka keskipiste on sivun BC keskipiste, leikkaa suoran BC pisteissä A_1 ja A_2. Vastaavasti pisteen H kautta kulkeva ympyrä, jonka keskipiste on sivun CA keskipiste, leikkaa suoran CA pisteissä B_1 ja B_2, ja pisteen H kautta kulkeva ympyrä, jonka keskipiste on sivun AB keskipiste, leikkaa suoran AB pisteissä C_1 ja C_2. Osoita, että pisteet A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 ja C_2 ovat samalla ympyrällä.

Tehtävän ratkaisun kannalta olennainen on huomio, jonka mukaan ympyrän keskipiste on jokaisen ympyrän jänteen keskinormaalilla. Jos tehtävässä kysytty ympyrä on olemassa, sen keskipisteen on oltava janojen A_1A_2, B_1B_2 ja C_1C_2 keskinormaaleilla. Toisaalta näiden janojen keskipisteet A_0, B_0 ja C_0 ovat kolmion sivujen keskipisteet ja mainitut keskinormaalit ovat samalla kolmion sivujen keskinormaaleja. Tehtävässä vaaditun ympyrän keskipisteeksi käy siis ainoastaan keskinormaalien leikkauspiste eli kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste O. Pelkästään tämä havainto oikeutti arvostelukriteerien mukaan yhteen pisteeseen. Tehtävien esivalintakomitean tarjoama ratkaisu oli melko lailla laskentoa välttävä. Se jatkui jo mainitun havainnon jälkeen suunnilleen seuraavasti:

Olkoon kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän säde R. Koska $A_0H = A_0A_1$, Pythagoraan lauseesta saadaan

$$OA_1^2 = OA_0^2 + A_0A_1^2 = OA_0^2 + A_0H^2. \qquad (1)$$



Olkoot K ja L janojen AH ja CH keskipisteet. Kolmioista BCH ja CAH saadaan $A_0L \| BH$ ja $B_0L \| AH$. Koska $BH \perp AC$ ja $OB_0 \perp AC$, niin $A_0L \| OB_0$. Vastaavasti $B_0L \| OA_0$. Nelikulmio A_0LB_0O on siis suunnikas, joten $OA_0 = B_0L = KH$. Koska $KH \| OA_0$, HA_0OK on suunnikas. Samoin KA_0OA on suunnikas. Siis $A_0K = OA = R$. Sovelletaan suunnikaslausetta (jonka mukaan suunnikkaiden lävistäjien neliöiden summa on sama kuin suunnikkaan sivujen neliöiden summa) suunnikkaaseen HA_0OK; saadaan

$$2(OA_0^2 + A_0H^2) = OH^2 + A_0K^2 = OH^2 + R^2. \qquad (2)$$

Yhtälöistä (1) ja (2) saadaan heti $OA_1^2 = \frac{1}{2}(OH^2 + R^2)$. Tiedetään, että $OA_1 = OA_2$. Toisaalta sama lasku antaa saman arvon suureille OB_1^2 ja OC_1^2 ja $OB_1 = OB_2$, $OC_1 = OC_2$. Kysytyt pisteet ovat siis kaikki samalla O-keskisellä ympyrällä.

Samaan johtopäätökseen saattaa päätyä laskennollisemminkin. Suomen joukkueessa kilpailleet Janne Junnila ja Sylvester Eriksson-Bique nojautuivat molemmat kosinilauseeseen. Suorakulmaisesta kolmiosta OBA_0 saadaan heti

$$OA_0^2 = R^2 - \frac{1}{4}a^2. \qquad (3)$$

Olkoot kolmion kulmat α, β ja γ. Koska $\angle BCH = 90^\circ - \beta$, niin kosinilause sovellettuna kolmioon A_0CH antaa $A_0H^2 = \frac{1}{4}a^2 + HC^2 - a \cdot HC \cdot \sin\beta$. Yhtälöiden (1) ja (3) perusteella $OA_1^2 = R^2 + HC^2 - a \cdot HC \cdot \sin\beta$. Mutta $\angle HAC = 90^\circ - \gamma$ ja $\angle HCA = 90^\circ - \alpha$, joten $\angle AHC = \alpha + \gamma = 180^\circ - \beta$. Sinilause sovellettuna kolmioon AHC antaa siis

$$\frac{HC}{\cos\gamma} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Kun muistetaan laajennetun sinilauseen mukainen $2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, saadaan

$$\begin{aligned} OA_1^2 &= R^2 + \frac{b^2\cos^2\gamma}{\sin^2\beta} - ab\cos\gamma \\ &= R^2 + 4R^2\cos^2\gamma - ab\cos\gamma \\ &= R^2(1 + 4\cos\gamma(\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta)). \end{aligned}$$

Otetaan huomioon se, että $\cos\gamma = \cos(180^\circ - (\alpha+\beta)) = -\cos(\alpha+\beta)$ ja käytetään kosinin yhteenlaskukaavaa. Saadaan $OA_1^2 = R^2(1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$. Koska lauseke on symmetrinen kolmion kulmien vaihtelujen suhteen, on oltava $OA_1 = OA_2 = \cdots = OC_2$.

Edellinen lasku – ja sen monenlaiset variaatiomahdollisuudet – vaativat jossain määrin trigonometrista silmää. Tehtävästä selviää kuitenkin aivan raa'alla työlläkin, jos asettaa kolmion koordinaatistoon. Luonnollinen ja aina mahdollinen valinta olisi sijoittaa kolmion kärjet näin: $A = (a, b)$, $B = (0, 0)$ ja $C = (1, 0)$. Silloin $A_0 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $B_0 = \left(\frac{1}{2}(1+a), \frac{b}{2}\right)$ ja $C_0 = \left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right)$. Sivun AB keskinormaalin yhtälö on $y - \frac{b}{2} = -\frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{2}\right)$ ja pisteen O y-koordinaatti saadaan sijoittamalla tähän $x = \frac{1}{2}$. Tästä saadaan $O = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2b}(a^2 + b^2 - a)\right)$. Vastaavasti piste H saadaan suorien $x = a$ ja $y = -\frac{a}{b}(x-1)$ leikkauspisteenä. Näin ollen $H = \left(a, \frac{a(1-a)}{b}\right)$. Kun kaikki tarvittavat koordinaatit tiedetään, on helppo laskea suureet O:n etäisyydet pisteistä $A_1, \ldots C_2$; edellä sanotun perusteella näiden etäisyyksien neliöt ovat $OA_0^2 + A_0H^2$, $OB_0^2 + B_0H^2$ ja $OC_0^2 + C_0H^2$. (Ne on kaikki laskettava, koska kolmion kärjet eivät nyt ole suoraan vaihdettavissa.) Sieventelyjen jälkeen jokaisesta neliösummasta tulee sama, nimittäin

$$\frac{1}{4b^2}(5a^4 + b^4 + 6a^2b^2 - 10a^3 - 6ab^2 + 5a^2 + b^2).$$

Tehtävä 4: funktionaaliyhtälö pienen koukun kera

Toisen kilpailupäivän ensimmäinen tehtävä tuotti kilpailijoille pisteitä 2355 eli lähes saman verran kuin ensimmäisenkin päivän helppo tehtävä. Seitsemän pisteen suorituksia kirjattiin 227 ja nollan 69. Tehtävä oli Etelä-Korean ehdotus. Tuomariston etukäteisarvioissa tätä tehtävää arveltiin kaikkein helpoimmaksi. Tehtävä oli seuraava:

Määritä kaikki funktiot $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ (f on siis positiivisten reaalilukujen joukossa määritelty funktio, jonka arvot ovat positiivisia reaalilukuja), joille pätee

$$\frac{\big(f(w)\big)^2 + \big(f(x)\big)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla w, x, y ja z, jotka toteuttavat ehdon $wx = yz$.

Tehtävän alkuperäisversiossa esiintyi vain funktion määrittely $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, mutta tuomaristossa esitetyt epäilyt merkinnän outoudesta koululaiskilpailijoille aiheuttivat selittävän lisäyksen tekstiin. Matematiikkaolympialaisten perinteisiin toimintatapoihin kuuluu mahdollisuus esittää kirjallisia kysymyksiä tuomaristolle kilpailun alussa. Selityksenkin jälkeen merkintä aiheutti lukuisia tiedusteluja, joissa udeltiin merkinnän $(0, \infty)$ sisältöä. Joissakin tehtävien kieliversioissa olikin käytetty bourbakilaista avoimen välin merkintää $]0, \infty[$.

Funktionaaliyhtälötehtävien normaalin ratkaisumetodiikan mukaan tehtävää ratkaistaessa oletetaan funktion f toteuttavan tehtävän ehdon, ja haetaan funktion ominaisuuksia. Yksi perustilanne on tutkia funktion arvoa yksinkertaisilla argumentin arvoilla. Tässä yksi ilmeinen tarkasteltava argumentin arvo on 1. Asettamalla $w = x = y = z = 1$ saadaan

$$\frac{2f(1)^2}{2f(1)} = 1,$$

josta seuraa $f(1) = 1$. Tämä havainto arvioitiin yhden pisteen arvoiseksi. Kun funktion määrittelyehdossa esiintyy toisia potensseja, on melko luonnollinen yrite sijoittaa argumenteiksi neliöjuuria. Olkoon siis $w > 0$, $x = 1$, $y = z = \sqrt{w}$. Nyt

$$\frac{f(w)^2 + 1}{2f(w)} = \frac{w^2 + 1}{2w}.$$

Tämä $f(w)$:n toisen asteen yhtälö sievenee muotoon

$$(wf(w) - 1)(f(w) - w) = 0.$$

Siis joko $f(w) = w$ tai $f(w) = \frac{1}{w}$. On helppo todentaa, että funktiot $f(x) = x$ ja $f(x) = \frac{1}{x}$ (kaikilla $x > 0$) toteuttavat yhtälön. Ratkaisu, jossa oli edetty tähän asti, arvioitiin neljän pisteen arvoiseksi.

On tietenkin olemassa äärettömän monta funktiota, jolle $f(x) = x$ joillain x ja $f(x) = \frac{1}{x}$ joillain toisilla x. Tehtävässä ei funktion f oletettu omaavan mitään säännöllisyysominaisuutta kuten esimerkiksi jatkuvuutta. Osoittautuu kuitenkin, että vain funktiot $f(x) = x$ kaikilla $x > 0$ ja $f(x) = \frac{1}{x}$ kaikilla $x > 0$ voivat tulla kysymykseen. Todistetaan tämä epäsuorasti. Tehdään siis vastaoletus, jonka mukaan olisi olemassa tehtävän ehdot toteuttava funktio f, joka ei olisi kumpikaan edellä mainituista funktioista. Silloin olisi olemassa positiiviset luvut a ja b, $a, b \neq 1$, niin että $f(a) = \frac{1}{a}$ ja $f(b) = b$. Asetetaan $w = a$, $x = b$, $y = z = \sqrt{ab}$. Saadaan

$$\frac{\frac{1}{a^2} + b^2}{2f(ab)} = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$$

eli

$$f(ab) = \frac{ab(a^{-2} + b^2)}{a^2 + b^2}.$$

Mutta $f(ab)$ on joko ab tai $\frac{1}{ab}$. Edellisessä tapauksessa on oltava $a^{-2} = a^2$ eli $a = 1$. Jälkimmäisessä tapauksessa $a^2b^2(a^{-2} + b^2) = a^2 + b^2$, josta seuraa $b = 1$. Kumpikin vaihtoehto johtaa ristiriitaan, joten vastaoletus on väärä.

Tehtävä 2: epäyhtälö – yhtäsuuruus eksoottinen

Kolmanneksi helpoin tehtävä oli ensimmäisen kilpailupäivän toinen tehtävä, sekin algebrallinen. Tehtävän ehdottaja oli Itävalta. Se tuotti 1371 pistettä eli 37 % maksimista. seitsemän pisteen suorituksia oli 94, nollan 110. Tehtävä oli kaksiosainen epäyhtälötehtävä:

(a) Todista, että

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

kaikille reaaliluvuille x, y ja z, jotka ovat eri suuria kuin 1 ja joille pätee $xyz = 1$.

(b) Osoita, että äärettömän monella rationaalilukukolmikolla x, y, z, missä kaikki luvut ovat eri suuria kuin 1 ja $xyz = 1$, edellisessä epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus.

Tehtävä arvosteltiin niin, että (a)-kohdan oikean ratkaisun arvo oli neljä ja (b)-kohdan kolme pistettä. Kun lukemattomissa epäyhtälötehtävissä yhtäsuuruusehto on yleensä jotenkin triviaali, niin erityisesti (b)-kohta tekee tästä tehtävästä mielenkiintoisen.

(a)-kohdan ratkaisumahdollisuuksista rajautuvat pois neliöllisen keskiarvon ominaisuuksien käyttö, koska mukana saattaa olla negatiivisia lukuja. Ratkaisuyrityksiä, joissa epäyhtälö todetaan päteväksi positiivisille luvuille, ei palkittu pistein. Ratkaisu onnistuu mukavasti, kun tehdään muuttujanvaihto

$$\frac{x}{x-1} = a, \quad \frac{y}{y-1} = b, \quad \frac{z}{z-1} = c$$

eli

$$x = \frac{a}{a-1}, \quad y = \frac{b}{b-1}, \quad z = \frac{c}{c-1}.$$

On siis todistettava, että $a^2+b^2+c^2 \geq 1$, kun $abc = (a-1)(b-1)(c-1)$ ja kun $a, b, c \neq 1$. Mutta viimeinen yhtälö on yhtäpitävä yhtälöiden

$$\begin{aligned} a+b+c-1 &= ab+bc+ca, \\ 2(a+b+c-1) &= (a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2), \\ a^2+b^2+c^2-2 &= (a+b+c)^2-2(a+b+c), \\ a^2+b^2+c^2-1 &= (a+b+c-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

kanssa. Väite on siis tosi.

(b) Edellisen yhtälöketjun viimeinen yhtälö osoittaa, että alkuperäisessä yhtälössä vallitsee yhtäsuuruus jos ja vain jos $a^2+b^2+c^2 = a+b+c = 1$. Yhtäsuuruus pätee siis abc-avaruudessa koko sillä ympyrällä, joka syntyy pallon $a^2+b^2+c^2 = 1$ ja tason $a+b+c = 1$ leikkauksena. Tältä ympyrältä on nyt löydettävä rationaalikoordinaattisia pisteitä. Koska $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$, yhtäsuuruuden ehto on yhtälöiden $a+b+c = 1$ ja $ab+bc+ca = 0$ yhtäaikainen voimassaolo, sekä $a, b, c \neq 1$. Kun yhtälöistä eliminoidaan c, saadaan $a^2+ab+b^2 = a+b$. Tulkitaan tämä b:n toisen asteen yhtälöksi. Yhtälön diskriminantti on $D = (a-1)^2-4a(a-1) = (1-a)(1+3a)$. Saamme rationaalisia ratkaisuja, jos valitsemme a:n niin, että $1-a$ ja $1+3a$ ovat rationaaliluvun neliöitä; tällöin diskriminantti ja b ovat myös rationaalisia ja samoin $c = 1-a-b$. Asetetaan $a = \frac{k}{m}$, missä k ja m ovat kokonaislukuja. Jos $m = k^2-k+1$, niin $m-k = (k-1)^2$ ja $m+3k = (k+1)^2$. Tällöin $D = \frac{(k^2-1)}{m^2}$ ja $b = \frac{1}{2m}(m-k \pm (k^2-1))$ ja $c = \frac{1-k}{m}$. Kun $k \neq 1$, niin $a, b, c \neq 1$. Kun k käy läpi luonnolliset luvut > 1, saadaan tällä tavoin äärettömän monta yhtälön $a^2+b^2+c^2 = 1$ toteuttavaa rationaalilukukolmikkoa (a, b, c). Koska x, y ja z ovat a:n, b:n ja c:n rationaalilausekkeita (ja eri a:t, b:t ja c:t vastaavat eri x:iä, y:itä ja z:ja), saadaan äärettömän monta tehtävän yhtälön toteuttavaa rationaalilukukolmikkoa (x, y, z).

Tehtävä 5: lamppuja sytytellään ja sammutellaan

Odotusten mukaisesti tehtävä 5, toisen päivän keskimmäinen tehtävä ja sarjan ainoa kombinatoriikan edustaja, osoittautui vaikeusjärjestyksessä neljänneksi. Pisteitä kertyi 1111, 30 % maksimista. Tehtävä oli joko osattu tai ei: seitsemän pisteen vastauksia oli 132 ja nollan 295. Tehtävä oli Ranskan ehdottama. Tehtävässä tarkasteltiin $2n$ bitin systeemin tilanmuutoksia. Systeemi oli visualisoitu lamppuina.

Olkoot n ja k, $k \geq n$, positiivisia kokonaislukuja, ja olkoon $k-n$ parillinen. Olkoon annettuna $2n$ lamppua, jotka on varustettu numeroin $1, 2, \ldots, 2n$ ja joista jokainen voi palaa tai olla pimeänä. Aluksi kaikki lamput ovat pimeinä. Tarkastellaan askelista koostuvia jonoja. Jokaisella askeleella jonkin lampun tila vaihdetaan päinvastaiseksi (lamppu sytytetään tai sammutetaan).

Olkoon N kaikkien sellaisten k:sta askeleesta muodostuvien jonojen lukumäärä, jotka johtavat tilaan, jossa lamput 1, $\ldots$, n palavat ja lamput $n+1$, $\ldots$, $2n$ ovat pimeinä.

Olkoon M kaikkien sellaisten k:sta askeleesta muodostuvien jonojen lukumäärä, jotka johtavat tilaan, jossa lamput 1, $\ldots$, n palavat ja lamput $n+1$, $\ldots$, $2n$ ovat pimeinä, mutta lamppuja $n+1$, $\ldots$, $2n$ ei ole kertaakaan sytytetty.

Määritä suhde N/M.

Kilpailijoiden kyselymahdollisuus osoitti, että jonon olemus ei tullut tehtävän tekstistä kaikille lukijoille selväksi. (Eräs kilpailija huomasi myös kysyä, voidaanko olettaa, että lamput pysyvät ehjinä, kun niitä alinomaa sytytellään ja sammutellaan.)

Sanomme, että jono, jolla päästään alkutilasta tehtävän lopputilaan, on sallittu jono, ja sallittu jono, jolla päästään lopputilaan niin, että minkään lampun $n+1$, $\ldots$, $2n$ tilaa ei muuteta, on rajoitettu jono. Rajoitettuja jonoja on olemassa, koska on mahdollista sytyttää kukin lampuista 1, $\ldots$, n ja sen jälkeen sytyttää ja sammuttaa lamppua 1 $\frac{1}{2}(k-n)$ kertaa. On mahdollista laskea sallittujen jonojen lukumäärä ja rajoitettujen jonojen lukumäärä binomikerroinlausekkeina. Tehtävässä kysyttyyn suhteeseen pääsee kuitenkin luontevimmin liittämällä jokaiseen rajoitettuun jonoon tietyt sallitut jonot. Olkoon X mielivaltainen rajoitettu jono ja olkoon p mielivaltainen lamppu, $1 \leq p \leq n$. Oletetaan, että jonossa X tämän lampun tilaa on muutettu k_p kertaa; k_p on pariton, koska lamppu palaa lopputilassa. Valitaan mielivaltainen parillinen määrä jonon sellaisia askelia, joissa lampun p tilaa vaihdetaan ja korvataan jokainen askeleella, jossa lampun $n+p$ tilaa vaihdetaan. Täten saadaan 2^{k_p-1} jonoa, joiden askeleet yhtyvät jonon X askeliin muuten kuin valittujen p:n tilaa muuttavien askelten kohdalla. (k_p-alkioisella joukolla on 2^{k_p-1} parillisalkioista osajoukkoa.) Samalla tavalla voidaan jokaiseen lamppuun 1, $\ldots$, n liittyvät tilanvaihdot siirtää lamppujen $n+1$, $\ldots$, $2n$ tilanvaihdoiksi. Rajoitettuun jonoon X liittyy tällä tavoin $2^{k_1-1} \cdot 2^{k_2-1} \cdots 2^{k_n-1} = 2^{k-n}$ erilaista sallittua jonoa.

Osoitetaan kääntäen, että jokainen sallittu jono Y saadaan rajoitetusta jonosta kuvatulla tavalla: korvataan jokainen lampun $q > n$ tilan muuttava Y:n askel lampun $q-n$ tilan muuttavalla askeleella. Näin saadaan eräs rajoitettu jono X. Koska jonossa Y lamppujen $q > n$ tilaa on muutettu parillinen määrä kertoja, jonon Y ja jonon X lopputilat ovat samat. Selvästi Y saadaan X:stä edellä kuvatulla menetelmällä. Jokaista rajoitettua jonoa kohden on siis tasan 2^{k-n} samaan lopputilaan johtavaa sallittua jonoa. Siis $N/M = 2^{k-n}$.

Pelkästään lukumäärän 2^{k-n} ilmoittaminen tuotti arvostelussa yhden pisteen.

Tehtävä 3: suuria alkutekijöitä

Molempien kilpailupäivien viimeiset tehtävät oli tarkoitettu vaikeiksi, erottamaan jyvät akanoista. Etukäteisarvioinneissa nimenomaan lukuteoreettista tehtävää 3 arvioitiin jopa ylivoimaisen vaikeaksi. Tehtävä oli Liettuan ehdottama. Se tuotti kilpailijoille 430 pistettä eli 11 % mahdollisista. Täydet pisteet tehtävästä sai 46 kilpailijaa, 438 jäi nollille. Tehtävän muotoilu oli lyhyt:

Osoita, että on olemassa äärettömän monta sellaista positiivista kokonaislukua n, jolle luvulla n^2+1 on lukua $2n+\sqrt{2n}$ suurempi alkutekijä.

Tehtävä liittyy selvästi ainakin kirjoittajan tietämän mukaan yhä avoimeen ja tutkimuksen kohteena olevaan ongelmaan siitä, onko muotoa n^2+1 olevien lukujen joukossa äärettömän monta alkulukua. Esivalintakomitean ja arvattavasti tehtävän ehdottajan ratkaisu perustui tietoihin, jotka eivät ole alkeellisinta lukuteoriaa: siihen että muotoa $8k+1$ olevia alkulukuja on äärettömän paljon ja siihen, että kongruenssilla $x^2 \equiv -1 \mod p$ on ratkaisu, kun p on alkuluku. Edellinen tieto seuraa esimerkiksi tunnetusta mutta varsin epätriviaalista Dirichlet'n lauseesta, jonka mukaan jokaisessa päättymättömässä aritmeettisessa jonossa on äärettömän monta alkulukua, jälkimmäinen vaikkapa kohtalaisen alkeellisesta Wilsonin lauseesta, jonka mukaan $(p-1)!+1$ on jaollinen p:llä, kun p on alkuluku. Arvattavasti nämä asiat eivät olisi olleet vieraita kilpailijoiden hyvin valmentautuneelle parhaimmistolle. Tehtävää ei olisi kuitenkaan kelpuutettu, ellei sille olisi tuomaristossa löydetty myös sinänsä alkeellisia ratkaisuja. Sellainen on seuraava.

Tarkastellaan kokonaislukua $k \geq 20$. Olkoon p jokin luvun $(k!)^2+1$ alkutekijä. Silloin $p > 20$ eikä luvuilla p ja $k!$ ole yhteisiä tekijöitä. Olkoon $x \equiv k! \mod p$ ja $0 < x < p$. Jos $p/2 > x$, niin $p - x < p/2$ ja $p - x \equiv -k! \mod p$. Joka tapauksessa on olemassa n, $0 < n < p/2$, niin että $n^2 \equiv (k!)^2 \equiv -1 \mod p$. p on siis luvun n^2+1 tekijä. Tästä seuraa edelleen $(p-2n)^2 = p^2 - 4pn + 4n^2 \equiv 4n^2 \equiv -4 \mod p$. Siis $(p-2n)^2 \geq p-4$ eli $p \geq 2n + \sqrt{p-4} > 2n + \sqrt{2n}$, jos $p > 20$, sillä tällöin $p - 4 \geq 2n + \sqrt{p-4} - 4 > 2n$. On vielä osoitettava, että ehdon täyttäviä lukuja n on äärettömän monta. Olkoon n ja p edellä tuotetut luvut. Olkoon q jokin luvun $(p^2)!+1$ alkutekijä. Samoin kuin edellä löydetään n', $n' < q/2$, niin että q on n'^2+1:n tekijä ja $q > 2n' + \sqrt{2n'}$. Toisaalta $n'^2 + 1 > q > p^2 > 4n^2 > n^2 + 1$, joten $n' > n$. Jokaista ehdon täyttävää kokonaislukua kohden löytyy siis suurempi ehdon täyttävä kokonaisluku, joten ehdon täyttäviä kokonaislukuja on äärettömän monta.

Tehtävän antama alaraja alkutekijöiden koolle ei ole mitenkään paras mahdollinen. Pitemmälle menevin keinoin on todistettavissa, että alarajaksi voisi saada ainakin luvun $n \ln n$.

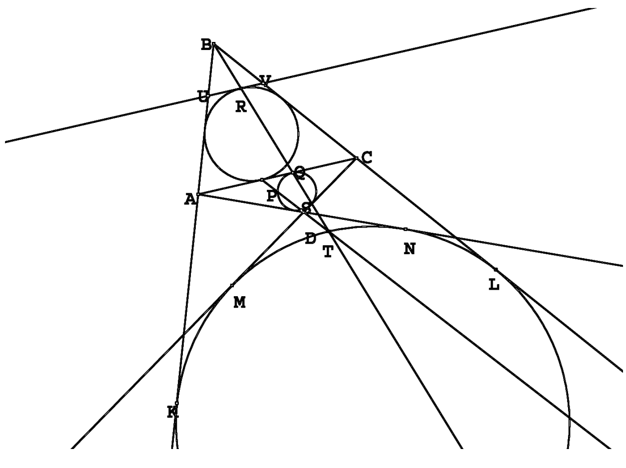
Tehtävä 6: erikoinen homotetia

Toinen geometrian tehtävä oli toisen kilpailupäivän viimeinen tehtävä. Se oli samoin kuin toinenkin sarjan geometriatehtävä Venäjän ehdottama. Tehtävä oli selvästi koko sarjan vaikein. Se tuotti kilpailijoille vain 137 pistettä eli alle 2 % mahdollisista. Täydet pisteet tehtävästä sai 12 kilpailijaa, nollille jäi 482. Tehtävässä tarkasteltiin geometrista konfiguraatiota, jonka hahmottaminen ei ole heti ihan helppoa:

Kuperassa nelikulmiossa $ABCD$ on $BA \neq BC$. Kolmioiden ABC ja ADC sisään piirretyt ympyrät ovat ω_1 ja ω_2. Oletetaan, että on olemassa ympyrä ω, joka sivuaa puolisuoraa BA eri puolella A:ta kuin B ja puolisuoraa BC eri puolella C:tä kuin B ja joka myös sivuaa suoria AD ja CD. Osoita, että ympyröiden ω_1 ja ω_2 yhteisten ulkopuolisten tangenttien leikkauspiste on ympyrällä ω.

Ratkaisu perustuu vahvasti homotetiakuvauksiin. Väitteen todistamiseksi riittää osoittaa, että ympyröiden ω_1 ja ω_2 välisen homotetiakuvauksen homotetiakeskus on ympyrällä ω.

Osoitetaan ensin, että ympyrän ω olemassa olo asettaa rajoituksen nelikulmion $ABCD$ muodolle. Olkoot ympyrän ω ja suorien BA, BC, CD ja AD sivuamispisteet K, L, M ja N. Nyt $AB + AD = (BK - AK) + (AN - DN) = BL - AN + AN - DM = BL - (CM - CD) = BL - CL + CD = BC + CD$.



Olkoon nyt P ympyrän ω_1 ja sivun AC yhteinen piste; olkoon R ympyrän ω_1 P:n kautta piirretyn halkaisijan toinen päätepiste ja Q BR:n ja AC:n leikkauspiste. Olkoot vielä U ja V R:n kautta piirretyn ω_1:n tangentin ja suorien BA ja BC leikkauspisteet. B-keskinen homotetia, joka kuvaa UV:n janaksi AC, kuvaa ympyrän

ω_1, joka on kolmion BUV sivuun UV liittyvä sivuympyrä, kolmion BAC sivuun AC liittyväksi sivuympyräksi. Q on näin ollen viimemainitun sivuympyrän ja sivun AC yhteinen piste. On helppo nähdä (ja tunnettua), että kolmion XYZ sisään piirretyn ympyrän sivuamispisteen etäisyys kolmion kärjestä X on sama kuin sivuun XY liittyvän sivuympyrän sivuamispisteen etäisyys kärjestä Y. Näin ollen $AP = CQ$.

Kolmion sisään piirretyn ympyrän sivuamispisteen ja kolmion kärjen etäisyys on laskettavissa tunnetun (ja helposti johdettavan) kaavan avulla. Sen mukaan $AP = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$. Vastaavasti kolmion ADC sisään piirretyn ympyrän ja sivun AC yhteiselle pisteelle Q' saadaan $CQ' = \frac{1}{2}(AC + CD - AD)$. Koska edellä sanotun mukaan tehtävän nelikulmiolle pätee $AB - BC = CD - AD$, on $CQ' = AP = CQ$. Q on siis ympyrän ω_2 ja suoran AC yhteinen piste. Vastaavalla tavalla nähdään, että ympyrän ω_2 pisteeseen Q piirretyn halkaisijan toinen päätepiste S, D ja P ovat samalla suoralla.

Olkoon sitten T ympyrän ω AC:n suuntaisen tangentin sivuamispiste (tarkemmin sanoen se niistä, joka on lähempänä suoraa AC). Homotetia, jonka keskus on B ja homotetiasuhde $\frac{BT}{PR}$, kuvaa ympyrän ω_1 ympyräksi ω. B, R, Q ja T ovat siis samalla suoralla. Vastaavasti homotetia, jonka keskus on D ja homotetiasuhde $-\frac{DT}{DS}$, kuvaa ympyrän ω_2 ympyräksi ω. P, S, D ja T ovat siis samalla suoralla. Mutta koska ympyröiden ω_1 ja ω_2 halkaisijat PR ja SQ ovat yhdensuuntaiset, ne kuvautuvat toisilleen T-keskisessä homotetiassa. Tästä seuraa, että itse ympyrät ω_1 ja ω_2 kuvautuvat toisilleen tässä homotetiassa. Mutta tällöin T:n on oltava ympyröiden yhteisten ulkopuolisten tangenttien leikkauspiste, ja todistus on valmis.