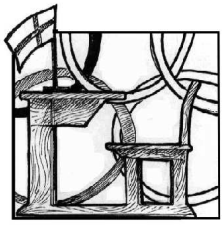

Mongolian opettajakilpailun tehtävien ratkaisut

Matti Lehtinen
Maanpuolustuskorkeakoulu

Janne Junnila
Uudenkaupungin lukio

Solmussa 3/2007 esitettiin leikkimielinen ajatus matematiikkakilpailusta opettajille. Kirjoituksen yhteydessä julkaistiin Mongoliassa vuosittain pidettävien opettajien matematiikkakilpailun vuoden 2007 tehtävät. Kirjoittaja ehdotti, että Solmun lukijat lähettäisivät omia ratkaisujaan Solmun toimitukselle.

Maaliskuuhun 2008 mennessä ratkaisuja on tullut vain tämän kirjoituksen toiselta kirjoittajalta. Oheisista ratkaisuista tehtävien 3, 4 ja 6 ratkaisut ovat Janne Junnilan, muut Matti Lehtisen. Tehtävissä 3 ja 6 tarvitaan jonkin verran alkeita pitemmälle menevää lukuteoriaa. Joko Mongolian opettajien oletetaan hallitsevan lukuteoriaa suomalaisia kollegojaan enemmän tai sitten emme ole keksineet yksinkertaisempia ratkaisuja. Niitä otetaan edelleen mieluusti vastaan. Tässä ratkaisuehdotuksemme.

1. *Kuinka monen joukon* $\{1, 2, 3, \ldots, 5n\}$ *osajoukon alkioiden summa on jaollinen viidellä?*

Ratkaisu. Olkoon a_n kysytty lukumäärä. Olkoot b_n, c_n, d_n ja e_n vastaavasti niiden joukon $\{1, 2, 3, \ldots, 5n\}$ osajoukkojen lukumäärät, joiden alkioiden summa mod 5 on 1, 2, 3 ja 4. Katsomme, että tyhjän joukon alkioiden summa on 0. Luettelemalla osajoukot nähdään heti, että $a_1 = 8$ ja $b_1 = c_1 = d_1 = e_1 = 6$. Osoitetaan, että

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{5}(2^{5n} + 2^{n+2}), \\ b_n &= \cdots = e_n = \frac{1}{5}(2^{5n} - 2^n). \end{aligned} \tag{1}$$

Selvästi (1) on oikein, kun $n = 1$. Oletetaan, että kaava on oikea, kun $n = k$. Joukon $\{1, 2, 3, \ldots, 5(k+1)\}$ jokainen osajoukko A voidaan jakaa osajoukoiksi $A_1 = A \cap \{1, 2, 3, \ldots, 5k\}$ ja $A_2 = A \cap \{5k+1, \ldots, 5(k+1)\}$. A:n alkioiden summa on jaollinen 5:llä jos ja vain jos joko A_1:n alkioiden summa on $\equiv p \mod 5$, A_2:n alkioiden summa on $\equiv (5-p) \mod 5$, $p = 0, 1, \ldots, 4$. Näin ollen osajoukkoja, joiden alkioiden summa on jaollinen 5:llä, on

$$\begin{aligned} &8a_k + 6b_k + 6c_k + 6d_k + 6e_k \\ &\quad = \frac{8}{5}(2^{5k} + 2^{k+2}) + \frac{24}{5}(2^{5k} - 2^k) \\ &\quad = \frac{1}{5}(32 \cdot 25k + 8 \cdot 2^k) = \frac{1}{5}(2^{5(k+1)} + 2^{(k+1)+2}). \end{aligned}$$

Osajoukot, joiden alkioiden summa on $\equiv 1 \mod 5$, ovat ne ja vain ne, joille (mod 5) A_1:n alkioiden summa on 1 ja A_2:n 0, tai A_1:n alkioiden summa 0 ja A_2:n 1, A_1:n alkiosumma 4 ja A_2:n 2, A_1:n 3 ja A_2:n 3 tai

A_1:n 2 ja A_2:n 4. Siis

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= 8b_1 + 6a_k + 6d_k + 6c_k + 6e_k \\ &= \frac{6}{5}(2^{5k} + 2^{k+2}) + \frac{26}{5}(2^{5k} - 2^k) \\ &= \frac{1}{5}(32 \cdot 2^{5k} - 2 \cdot 2^k) = \frac{1}{5}(2^{5(k+1)} - 2^{k+1}). \end{aligned}$$

c_{k+1}, d_{k+1} ja e_{k+1} lasketaan aivan samoin. Induktioaskel on otettu. Tehtävän ratkaisu on siis

$$a_n = \frac{1}{5}(2^{5n} + 2^{n+2}).$$

(n:n arvoja 1, 2, ..., 6 vastaavat a_n:n arvot ovat 8, 208, 6560, 209728, 6710912 ja 214748416.)

2. *On annettu 101 saman suoran janaa. Todista, että janojen joukossa on 11 sellaista, joilla on yhteinen piste tai 11 sellaista, joista millään kahdella ei ole yhteisiä pisteitä.*

Ratkaisu. Voimme olettaa, että suora on x-akseli ja että janat ovat välejä $[x_i, y_i]$, $i = 1, \ldots, 101$. Voimme vielä olettaa, että $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{101}$. Oletetaan vielä, että millään 11:llä janalla ei ole yhteistä pistettä. Silloin on oltava $y_{n_1} = \min\{y_i | 1 \le i \le 10\} < x_{11}$, $y_{n_2} = \min\{y_i | 11 \le i \le 20\} < x_{21}$, ..., $y_{n_{10}} = \min\{y_i | 91 \le i \le 100\} < x_{101}$. Koska $x_{11} \le x_{n_2}, \ldots, x_{91} \le x_{n_{10}}$, väleillä $[x_{n_1}, y_{n_1}]$, $[x_{n_2}, y_{n_2}]$, ..., $[x_{n_{10}}, y_{n_{10}}]$ ja $[x_{101}, y_{101}]$ ei ole yhtään yhteistä pistettä.

3. *Olkoon p pariton alkuluku. Olkoon g primitiivijuuri* mod p. *Määritä kaikki sellaiset p:n arvot, joille joukkojen $A = \{k^2 + 1 \mid 1 \le k \le \frac{p-1}{2}\}$ ja $B = \{g^m \mid 1 \le m \le \frac{p-1}{2}\}$ alkiot ovat samat* mod p.

Ratkaisu. Jos $p = 3$, niin $A = \{2\}$ ja $B = \{2\}$. 3 on tehtävän ratkaisu. Jos $p = 5$, voidaan valita $g = 2$; silloin $A = \{2, 0\}$ ja $B = \{2, 4\}$, joten 5 ei ole tehtävän ratkaisu. Olkoon sitten $p \ge 7$ alkuluku. Primitiivijuuren g ominaisuuksiin kuuluu, että g virittää multiplikatiivisen ryhmän $\mathbb{Z}_p^*$, jonka alkiot ovat kongruenssiluokat 1, 2, $\ldots p-1 \pmod p$. Koska $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) \equiv 0 \mod p$ vain, jos $x \equiv \pm y \mod p$, ovat joukon $\mathbb{Z}_p^*$ neliöluvut $1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Toisaalta $\mathbb{Z}_p^* = \{g, g^2, \ldots, g^{p-1}\}$. Tästä seuraa

$$\{g^2, g^4, \ldots, g^{p-1}\} = \{1, 4, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2\}.$$

Jos nyt $A = B$, niin A:n ja B:n alkioiden neliöiden summat ovat samat (mod p), eli

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (g^{2i} + 1)^2 \equiv \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (g^i)^2.$$

Tämä yhtälö on yhtäpitävä yhtälön

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (g^{4i} + g^{2i} + 1) \equiv 0$$

kanssa. Koska $p > 5$, $g^4 - 1 \not\equiv 0$ ja siis $g^2 - 1 \not\equiv 0$. Geometrisen sarjan summakaavan mukaan voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (g^4)^i &\equiv \sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} (g^4)^i - 1 \equiv \frac{(g^4)^{\frac{p+1}{2}} - 1}{g^4 - 1} - 1 \\ &\equiv \frac{(g^{(p-1)+2})^2 - 1}{g^4 - 1} - 1 \equiv 0, \end{aligned}$$

koska $g^{p-1} \equiv 1$. Samoin lasketaan

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (g^2)^i \equiv 0.$$

Siis

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (g^{4i} + g^{2i} + 1) \equiv \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} 1 \equiv \frac{p-1}{2} \not\equiv 0 \mod p.$$

Saatu ristiriita osoittaa, että $A \ne B$, kun $p \ge 7$. Siis $p = 3$ on tehtävän ainoa ratkaisu.

4. *Todista: jos x, y ja z ovat luonnollisia lukuja ja $xy = z^2 + 1$, niin on olemassa kokonaisluvut a, b, c ja d niin, että $x = a^2 + b^2$, $y = c^2 + d^2$ ja $z = ac + bd$.*

Ratkaisu. Sanomme, että ei-negatiivisten kokonaislukujen kolmikko (x, y, z) toteuttaa ehdon (1), jos $xy = z^2 + 1$, ja ehdon (2), jos on olemassa kokonaisluvut a, b, c ja d niin, että $x = a^2 + b^2$, $y = c^2 + d^2$ ja $z = ac + bd$. Oletetaan varmuuden vuoksi, että 0 on myös luonnollinen luku. [Vaikka tämä vallitseva käytäntö sotii luonnollisen luvun perusideaa vastaan.] Jos $(x, y, 0)$ toteuttaa ehdon (1), on oltava $x = y = 1$. Nyt voidaan valita $a = d = 1$, $b = c = 0$. Kolmikko toteuttaa siis ehdon (2). Oletetaan sitten, että (x, y, z), missä $z \ge 1$, toteuttaa ehdon (1). Silloin $x, y \ne 0$. Voidaan olettaa, että $x \le y$. Jos olisi $x > z$, olisi $xy \ge (z+1)^2 > z^2 + 1$. Siis on oltava $0 < x \le z$. Jos on $x = z$, on $xy = x^2 + 1$ eli $x(y - x) = 1$. Siis $x = y - x = 1$ eli $x = 1$, $y = 2$. Voidaan valita $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 1$. Kolmikko $(1, 2, 1)$ toteuttaa ehdon (2). Voidaan olettaa, että $x < z$. Silloin ei voi olla $y \le z$. Siis $y > x$. Nyt $2z = 2\sqrt{xy - 1} < 2\sqrt{xy} < x + y$. Siis $x + y - 2z > 0$. Lisäksi $(x+y-2z)x = x^2+xy-2zx = x^2+z^2+1-2zx = (z-x)^2+1$. Jos siis kolmikko (x, y, z), missä $0 < x < z$, toteuttaa ehdon (1), niin $(x, x+y-2z, z-x)$ toteuttaa ehdon (1). Oletetaan sitten, että $(x, x+y-2z, z-x)$ toteuttaa ehdon (1). Siis $x = a^2 + b^2$, $x + y - 2z = c^2 + d^2$ ja $z - x = ac + bd$. Nyt $y = c^2 + d^2 + 2(z - x) + x = c^2 + d^2 + 2ac + 2bd + a^2 + b^2 = (a + c)^2 + (b + d)^2$ ja $z = z - x + x = ac + bd + a^2 + b^2 = a(a + c) + b(b + d)$. Siitä, että $(x, x+y-2z, x-z)$ toteuttaa ehdon (2), seuraa siis, että (x, y, z) toteuttaa ehdon (2). On saatu perusteet "äärettömälle laskeutumiselle": jos (x, y, z) toteuttaa ehdon (1) ja $z \ge 2$, löytyy ehdon (1) toteuttava kolmikko (x', y', z'), missä $z' < z$; lisäksi niin, että jos

kolmikko (x', y', z') toteuttaa ehdon (2), niin (x, y, z) toteuttaa ehdon (2). Prosessi johtaa kuitenkin äärellisen askelmäärän jälkeen joko tilanteeseen, jossa $z' = 0$ tai $z' = 1$. Koska kolmikot, joissa z on 0 tai 1, toteuttavat ehdon (2), on alkuperäisen kolmikon (x, y, z) myös toteutettava ehto (2), ja todistus on valmis.

5. *Piste P on tasasivuisen kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän piste. Osoita, että janat PA, PB ja PC voivat olla kolmion sivuja. Olkoon R kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde ja d pisteen P ja mainitun ympyrän keskipisteen välimatka. Määritä konstruoidun kolmion ala.*

Ratkaisu. Olkoot D, E ja F pisteen P kohtisuorat projektiot suorilla BC, AC ja AB. Olkoot $a' = EF$, $b' = FD$ ja $c' = DE$ kolmion DEF sivut ja olkoot $AP = x$, $BP = y$ ja $CP = z$. Koska esimerkiksi $BDPF$ on jännenelikulmio ja BP tämän nelikulmion ympäri piirretyn ympyrän halkaisija, on laajennetun sinilauseen perusteella $b' = y \sin 60°$. Samoin tietysti $a' = x \sin 60°$ ja $c' = z \sin 60°$. Mutta koska a', b' ja c' ovat kolmion sivujen pituuksia, ovat sellaisia myös x, y ja z. Olkoon O kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Ei merkitse rajoitusta olettaa, että P on kulman AOB aukeamassa. Olkoon $\angle AOP = \phi$. Kosinilauseen perusteella on

$$\begin{aligned} x^2 &= d^2 + R^2 - 2dR\cos\phi \\ y^2 &= d^2 + R^2 - 2dR\cos(120° - \phi) \\ &= d^2 + R^2 + dR\cos\phi - \sqrt{3}dR\sin\phi \\ z^2 &= d^2 + R^2 - 2dR\cos(120° + \phi) \\ &= d^2 + R^2 + dr\cos\phi + \sqrt{3}dR\sin\phi. \end{aligned}$$

Merkitään kolmion, jonka sivut ovat x, y ja z, alaa T:llä. Heronin kaavan perusteella

$$\begin{aligned} 16T^2 &= (x+y+z)(-x+y+z)(x+y-z)(x-y+z) \\ &= \left((y+z)^2 - x^2\right)\left(x^2 - (y-z)^2\right) \\ &= (y^2+z^2-x^2+2yz)(x^2-y^2-z^2+2yz) \\ &= 4y^2z^2 - (y^2+z^2-x^2)^2 \\ &= 4\left((d^2+R^2+dR\cos\phi)^2 - 3d^2R^2\sin^2\phi\right) \\ &\quad - (d^2+R^2+4dR\cos\phi)^2 \\ &= 4((d^2+R^2)^2 + 2(d^2+R^2)dR\cos\phi \\ &\quad + d^2R^2\cos^2\phi - 3d^2R^2\sin^2\phi) - (d^2+R^2)^2 \\ &\quad - 8(d^2+R^2)dR\cos\phi - 16d^2R^2\cos^2\phi \\ &= 3(d^2+R^2)^2 + 4d^2R^2 - 16d^2R^2 = 3(R^2-d^2)^2. \end{aligned}$$

Tässä oli vielä käytetty sievennyksiä $\cos^2\phi - 3\sin^2\phi = 1 - 4\sin^2\phi$ ja $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$. Kolmion ala on siis

$$T = \frac{\sqrt{3}}{4}(R^2 - d^2).$$

(Kun P on kolmion ABC ympäri piirretyllä ympyrällä eli kun $d = R$, niin $T = 0$. Tällöin D, E ja F ovat kolmion Simsonin suoralla ja kolmio DEF surkastuu janaksi, samoin kuin kolmio, jonka sivut ovat x, y ja z.)

6. *Olkoon $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s} \geq 2$. Oletetaan, että luvulle α ja kaikille i, $1 \leq i \leq s$, pätee $(p_i - 1) \nmid \alpha$. Todista, että $n \mid \sum_{a \in \mathbb{Z}_n^*} a^\alpha$, missä $\mathbb{Z}_n^* = \{a \in \mathbb{Z}_n \mid (a, n) = 1\}$. [$(a, n)$ on lukujen a ja n suurin yhteinen tekijä].*

Ratkaisu. Koska $p_i - 1$ ei voi olla luvun α tekijä, p_i ei voi olla 2. n on siis pariton luku ja jokainen $p_i \geq 3$. Väitteen todistamiseksi riittää osoittaa, että $p_i^{\alpha_i} \mid \sum_{a \in \mathbb{Z}_n^*} a^\alpha$ kaikilla i. Riittää, että todistetaan tämä, kun $i = 1$. On siis osoitettava, että

$$\sum_a a^\alpha \equiv 0 \mod p_1^{\alpha_1}, \tag{2}$$

missä a käy läpi kaikki ne luvut 1:stä $(n-1)$:een, joille $(a, n) = 1$. a:lla ja n:llä ei ole yhteisiä tekijöitä jos ja vain jos a:lla ja $p_i^{\alpha_i}$:llä ei ole yhteisiä tekijöitä millään i eli jos ja vain jos a on kullakin i kongruentti mod $p_i^{\alpha_i}$ jonkin niistä $\phi(p_i^{\alpha_i})$:stä luvusta a_i kanssa, joille $(a_i, p_i^{\alpha_i}) = 1$. ($\phi(m)$ ilmoittaa lukua m pienempien positiivisten kokonaislukujen lukumäärän, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä m:n kanssa.) Kiinalainen jäännöslause ilmaisee toisaalta, että jos on annettu mielivaltainen jono $(a_1, a_2, \ldots, a_s)$, missä $(a_i, p_i^{\alpha_i}) = 1$, niin lukujen a joukossa on sellainen, jolle $a \equiv a_i \mod p_i^{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, s$. Mutta tämä merkitsee, että jokainen yhtälön (2) vasemman puolen summan yhteenlaskettava, joka on $\equiv a_1 \mod p_1^{\alpha_1}$, missä $(a_1, p_1^{\alpha_1}) = 1$, on kongruentti tasan $\phi(p_2^{\alpha_2})\phi(p_3^{\alpha_3}) \cdots \phi(p_s^{\alpha_s})$:n summan muun yhteenlaskettavan kanssa. Väitteen todistamiseksi riittää siis osoittaa, että (2):n vasemman puolen summa on jaollinen $p_1^{\alpha_1}$:llä, kun a käy läpi ne luvut väliltä 1, …, $p_1^{\alpha_1} - 1$, joilla ei ole yhteistä tekijää $p_1^{\alpha_1}$:n kanssa.

Yleisen lukuteorian tuloksen mukaisesti, jos p on pariton alkuluku, niin $\mathbb{Z}_{p^k}^*$ on syklinen ryhmä (jonka virittää primitiivijuuri $g \mod p^k$). On siis olemassa g siten, että luvut $g, g^2, \ldots, g^{\phi(p_i^{\alpha_1})}$ ovat mod $p_1^{\alpha_1}$ kuin ne välin $[1, p_1^{\alpha_1} - 1]$ kokonaisluvut, joilla ei ole yhteistä tekijää $p_1^{\alpha_1}$:n kanssa. Todistettavaksi tulee siis

$$p_1^{\alpha_1} \mid \sum_{i=0}^{\phi(p_1^{\alpha_1})-1} (g^i)^\alpha.$$

Koska $p_1 - 1$ ei ole α:n tekijä, niin $g^\alpha \equiv g^{k(p_1-1)+r_1} \equiv g^{r_1}$, missä $1 \leq r_1 < p_1 - 1$. Siis $g^\alpha \not\equiv 1 \mod p$, josta seuraa, että $g^\alpha \not\equiv 1 \mod p_1^{\alpha_1}$. Nyt

$$(g^\alpha - 1) \sum_{i=0}^{\phi(p_1^{\alpha_1})} (g^i)^\alpha = g^{\phi(p_1^{\alpha_1})} - 1 \equiv 0 \mod p_1^{\alpha_1}.$$

Väite on todistettu.