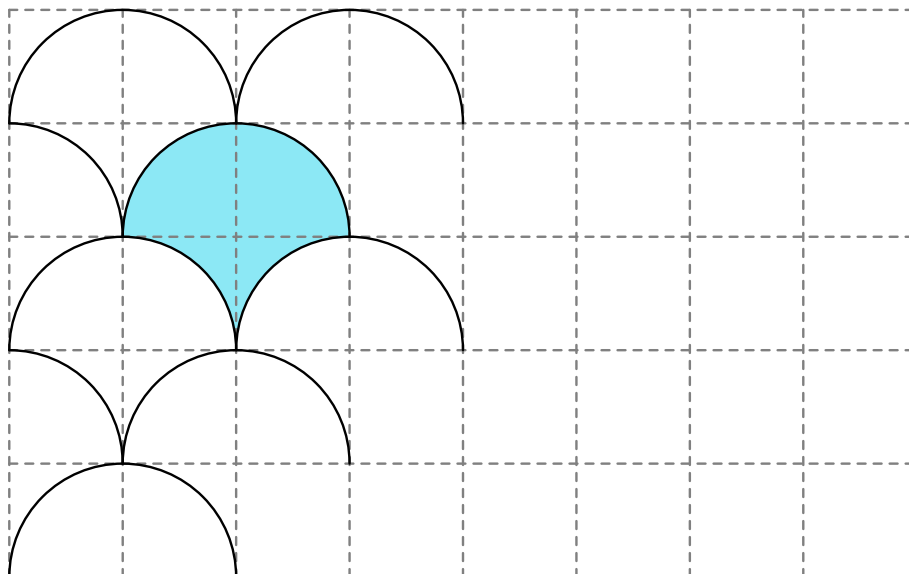


MATEMATIIKKA JA TAIDE II

Aihepiirejä: Hienomotoriikkaa harjoittavia kaksi- ja kolmiulotteisia väritys-, piirtämis- ja askartelutehtäviä, myös sellaisia, joissa kuvio jatkuu loputtomasti, ja sellaisia, joissa voi käyttää harppia ja viivotinta. Kelttiläisiä solmuja ja logoja, näiden pohjalta myös omia tuotoksia.

Matemaattisia sisältöjä: kaksi- ja kolmiulotteinen geometria, symmetria, pinta-ala, harpin ja viivottimen käyttö, tasokuviot ja niiden jonot (pohjustusta raja-arvolle, sarjoille sekä äärettömyden käsitteelle), solmut ja topologia.

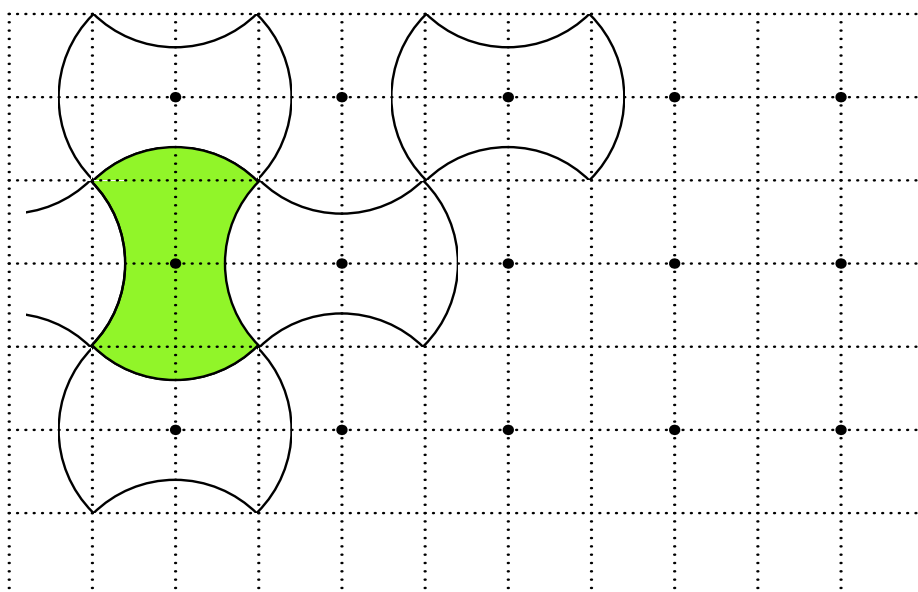
1. Jatka laattojen piirtämistä harpin avulla.



Päättele väritetyn osan pinta-ala,

- jos ruudukon neliön sivun pituus on 1
- jos ruudukon neliön sivun pituus on p .

2. Jatka laattojen piirtämistä harpin avulla.



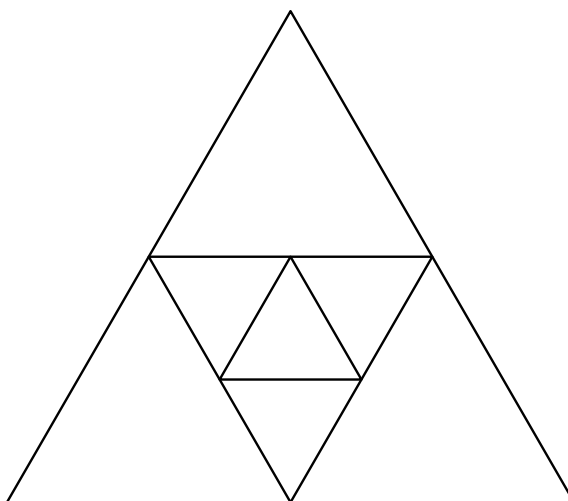
Päättele väritetyn osan pinta-ala,

- a) jos ruudukon neliön sivun pituus on 1
- b) jos ruudukon neliön sivun pituus on p .

3. Piirrä A4-kokoiselle paperille sisäkkäisiä ympyröitä niin, että ympyröillä on sama keskipiste ja seuraavan ympyrän säde on aina kaksinkertainen edellisen säteeseen verrattuna. Tee lukujono

- a) ympyröiden säteistä, jos pienimmän ympyrän säde on 0,5
- b) ympyröiden säteistä, jos pienimmän ympyrän säde on r
- c) ympyräkiekkojen pinta-aloista, jos pienimmän ympyrän säde on 0,5
- d) ympyräkiekkojen pinta-aloista, jos pienimmän ympyrän säde on r .

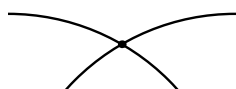
4. Jatka kuviota piirtämällä sisäkkäisiä tasasivuisia kolmioita. Leikkauspisteet ovat sivujen keskipisteitä.



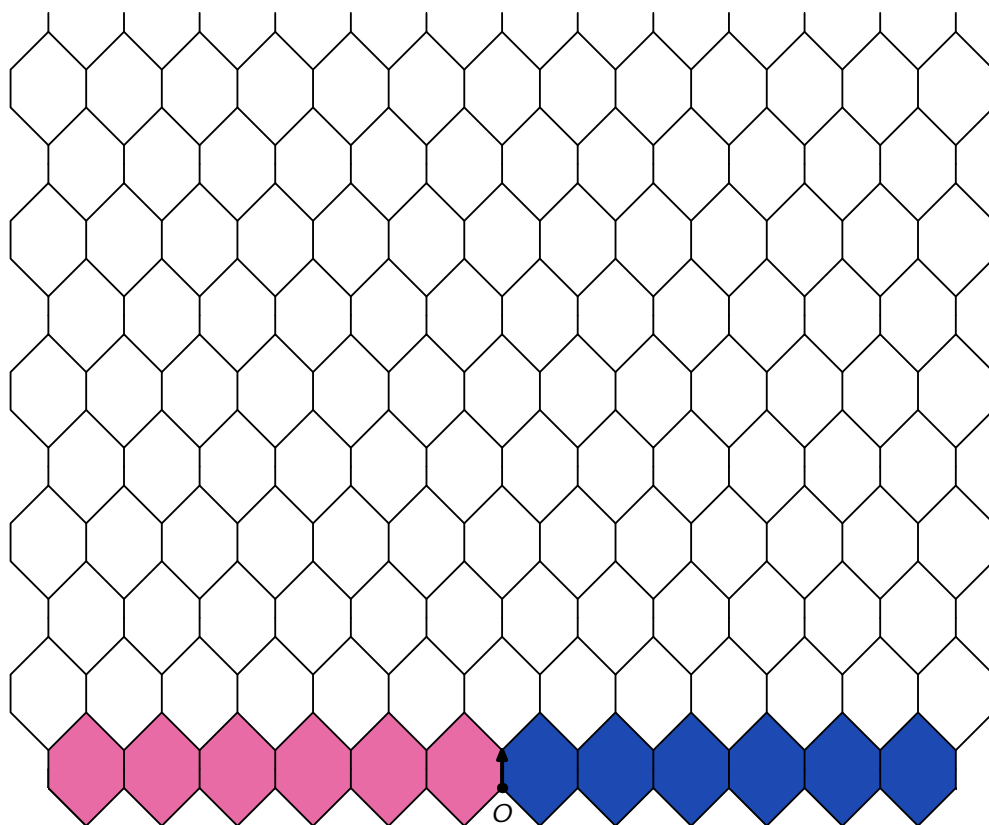
Tee lukujono kolmioiden pinta-aloista,

- a) jos suurimman kolmion sivun pituus on 3
- b) jos suurimman kolmion sivun pituus on p .

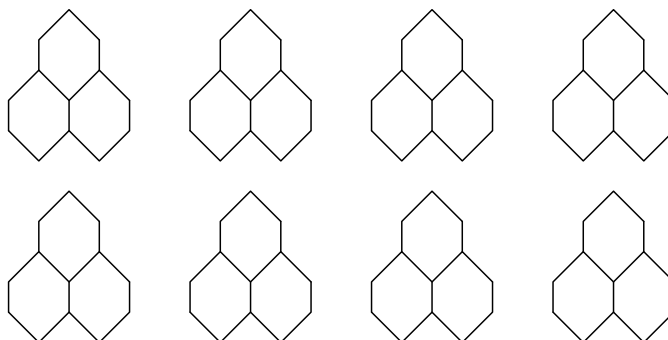
5. Piirrä tasasivuinen kolmio harpin ja viivottimen avulla seuraavasti: Piirrä ensin kolmion kanta viivottinta käyttäen. Piirrä sitten harpin avulla kaksi ympyrää, joiden keskipisteinä ovat kannan päätepisteet ja joiden säde on yhtä pitkä kuin kolmion kanta. Näiden ympyröiden leikkauspisteen etäisyys kannan päätepisteistä on yhtä suuri kuin kannan pituus. Se kelpaa siis kolmion kolmanneksi kärkipisteeksi.



6. a) Piirrä edellisen tehtävän ohjeen avulla tasasivuinen kolmio. Piirrä lisäksi kolme ympyrää, joiden keskipisteinä ovat kolmion kärjet ja joiden säde on puolet kolmion sivun pituudesta.
- b) Tee kolmiosta ja ympyröistä uusia piirroksia, joissa muutat kolmion yhden kärkipisteen paikkaa niin, ettei kolmio ole enää tasasivuinen. Tarkkaile, millaisia leikkauskuvioita ympyrät muodostavat.
7. Piirrä harpin ja viivottimen avulla
- tasakylkinen kolmio
 - suorakulmainen kolmio
 - neliö
 - suorakulmio
 - säännöllinen kuusikulmio.
8. a) Etsi erilaisia logoja ja piirrä ne.
- b) Mitä geometrisia kuvioita löytämissäsi logoissa on?
- c) Piirrä oma logo.
9. Seuraa punaisten ja sinisten laattojen välistä reunaa pisteestä O lähtien. Jatka murtoviivaa niin, että jos saat lanttia heittämällä kruunan, värjää edessä olevan laatan punaiseksi, jos klaavan, siniseksi. Tummenna punaisten ja sinisten laattojen välinen reuna ja määritä tarvittaessa seuraavan laatan väri heittämällä kolikkoa uudelleen (ellei väritystä jo ole).

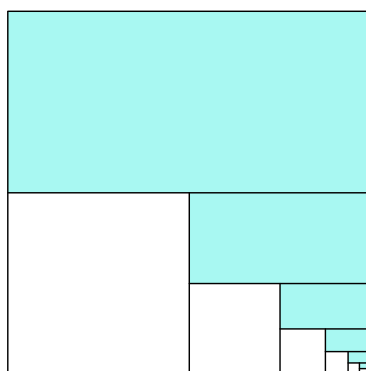


Piirrä eri vaihtoehdot, miten murtoviiva voi jatkua kolmen laatan yhteisessä kärkipisteessä.

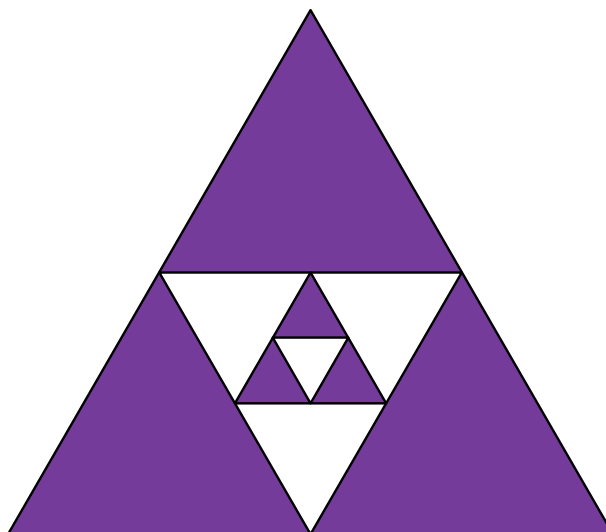


10. Valkoinen neliö jaetaan vaakasuunnassa kahtia ja sen yläosa väritetään. Kun tätä jatketaan, saadaan alla oleva kuvio. Tee lukujono väritetyn osan pinta-alasta kussakin vaiheessa,

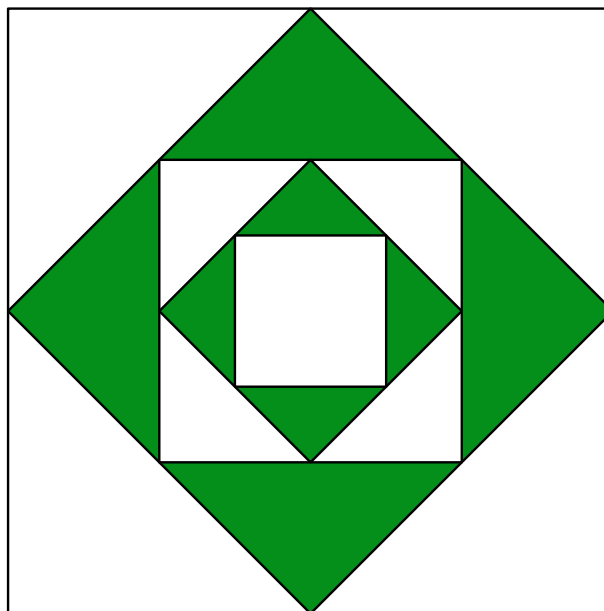
- jos suurimman neliön sivun pituus on 3
- jos suurimman neliön sivun pituus on c .



11. Violetin kolmion keskelle piirretään vuorotellen valkoinen ja violetti pienempi kolmio kuten alla olevassa kuviossa. Leikkauspisteet ovat sivujen keskipisteitä.



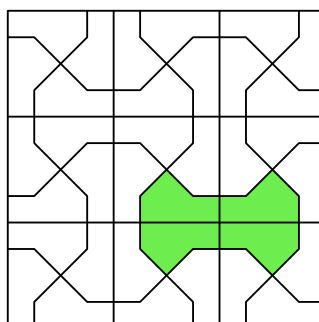
- a) Jatka kuviota kohti sen keskipistettä.
 b) Tee lukujono väritetyn osan pinta-alasta kussakin vaiheessa, jos suurimman kolmion sivun pituus on 2.
12. Valkoisen neliön keskelle piirretään vuorotellen vihreä ja valkoinen pienempi neliö kuten alla olevassa kuviossa. Leikkauspisteet ovat sivujen keskipisteitä. Suurimman neliön sivun pituus on 2.



- a) Jatka kuviota kohti sen keskipistettä.
 b) Tee lukujono valkoisen osan pinta-alasta kussakin vaiheessa.
 c) Tee lukujono väritetyn osan pinta-alasta kussakin vaiheessa.
- ★ 13. Tutkitaan edellisen tehtävän kuviota tilanteessa, jossa suurimman neliön sivun pituus on c .
- a) Tee lukujono valkoisen osan pinta-alasta kussakin vaiheessa.
 b) Tee lukujono väritetyn osan pinta-alasta kussakin vaiheessa.
 c) Miten suuri osa neliöstä on väritetty, jos piirrosta jatketaan loputtomiin?

Lukion tiedoilla voidaan laskea tarkka tulos raja-arvona.

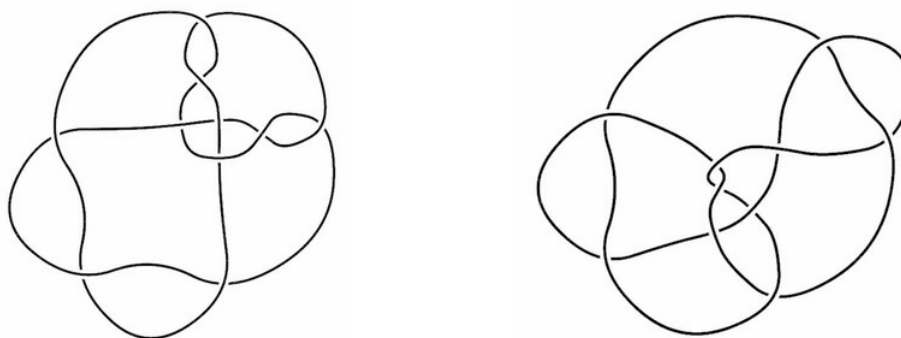
14. Päättelä väritetyn alueen pinta-ala, jos koko ruudun sivun pituus on 3 cm ja poikkiviivat leikkaavat pienten ruutujen sivuja suhteessa 1 : 3.



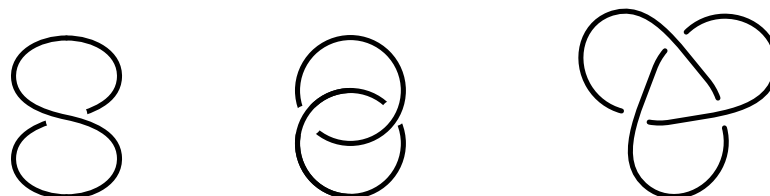
Solmuteoria

Solmuteoria on kuin matematiikan poikkileikkaus. Sen ongelmat ovat helposti esitettävissä ja niiden ratkaisuja löytyy usein vain syvällisistä matematiikan osa-alueista kuten algebra, topologia, differentiaaligeometria, analyysi, verkkoteoria ja jopa laskettavuuden teoria sekä tietojenkäsittelytiede. Niin kuin matematiikalla yleensä, myös solmuteorialla on sovelluksia; sovellusaloja ovat mm. biologia (DNA- ja proteiinimolekyylien solmuttumisen) ja fysiikka.

Alla on kuva kahdesta solmusta, jotka olivat monta kymmentä vuotta solmujen listalla eri solmuina, vaikka vuonna 1974 osoittautui, että ne ovatkin sama solmu.

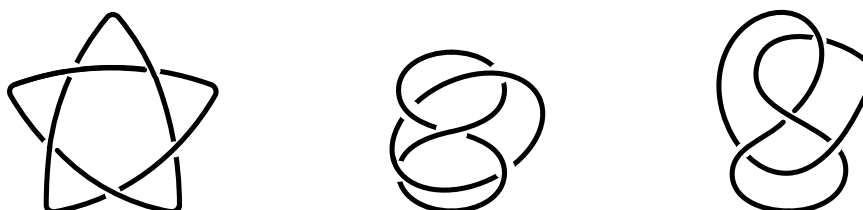


15. Solmi nämä solmut erivärisistä langoista.



- Kuinka monta eri langanpätkää tarvitset?
- Mitkä solmuista voit esittää tasossa ilman, että solmu leikkaa itsensä?

16. Solmi nämä solmut erivärisistä langoista.

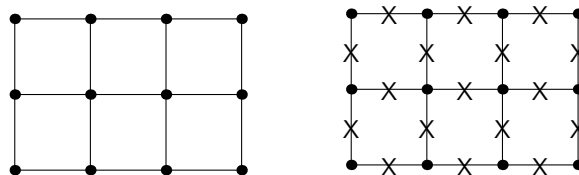


- Kuinka monta eri langanpätkää tarvitset?
- Mitkä solmuista voit esittää tasossa ilman, että solmu leikkaa itsensä?

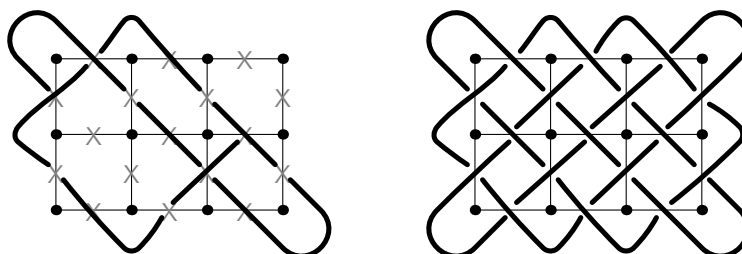
17. Tee oma solmu ja piirrä se.

Keltiläiset solmut

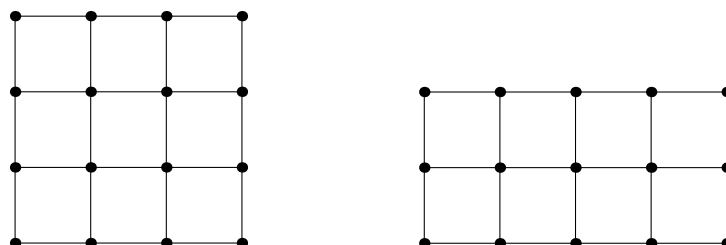
Varhaiskeskiajalta Brittein saarilla eläneet keltit käyttivät solmuja koristeluun. Kelttien solmujen piirtämiseen voi käyttää pohjana tason verkkoa. Otetaan esimerkiksi alla vasemmalla näkyvä verkko ja piirretään sen jokaiseen särmään pieni risteys:



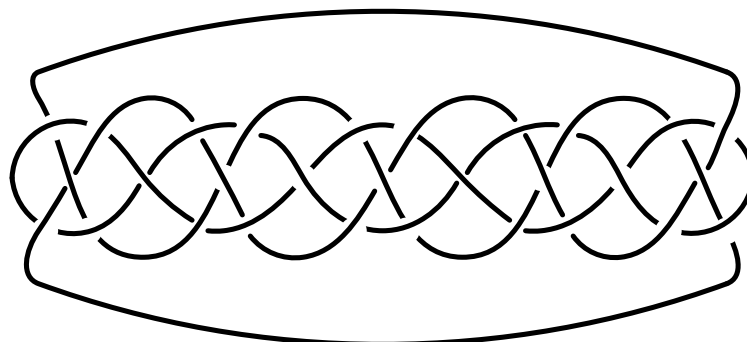
Lähdetään yhdistämään kynällä risteyskiä lähimpiin niin, että joka toisessa risteyksessä kuljetaan "alta" ja joka toisessa "päältä":



18. Tee keltiläinen solmu seuraaviin tason verkkoihin. Kuinka monta eri osaa eli komponenttia näissä on? Jos teet solmut langoilla, käytä eri osiin eri värejä.



19. Kuinka monta eri osaa on tässä solmussa?

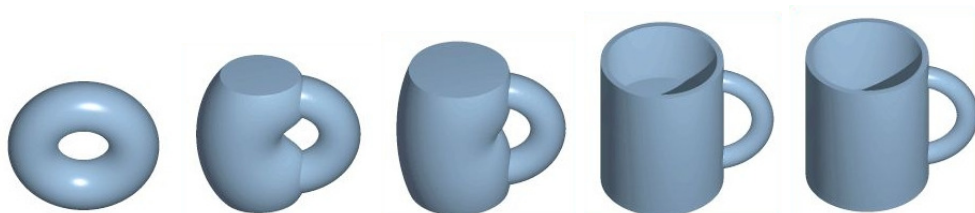


20. Piirrä oma keltiläinen solmu.

Topologia

Topologia on matematiikan alue, joka käsittelee pistejoukkoja ja niiden ominaisuuksia, jotka säilyvät "jatkuviissa muunnoksissa". Tyypillisiä tällaisia ominaisuuksia ovat alueen yhtenäisyys ja alueessa mahdollisesti olevien "reikien" lukumäärä. Sen sijaan monet tärkeät geometriset käsitteet kuten etäisyydet ja kulmat eivät ole topologisia käsitteitä. Topologiassa kaksi oliota ovat samanlaiset, jos ne voidaan muuttaa toisikseen jatkuvalla muunnoksella. Tästä johtuu sanonta "topologi on matemaatikko, joka ei erota kahvikupia munkkirinkilästä".

21. Tee savesta munkkirinkilän muotoinen kappale. Ala muuntaa sitä jatkuvasti savea muovaamalla kahvikupin muotoon.



Tämän jatkuvan muunnoksen voi tehdä myös käänteiseen suuntaan ja palauttaa "kahvikupin" jatkuvasti muuntaen munkkirinkilän muotoiseksi kappaleeksi.

22. Ota sakset sekä liimaa tai teippiä, ja leikkaa esimerkiksi A3-kokoisesta paperista 3 cm levyisiä suorakulmioita. Piirrä keskiviiva pituussuunnassa jokaiseen tällaiseen liuskaan, liuskan toiselta puolelta sinisellä ja toiselta puolelta punaisella. Muodosta liuskoista erilaisia lenkkejä alla olevien ohjeiden mukaan.
- Ota liuska. Pidä sen molemmista päistä kiinni ja liimaa päät yhteen.
 - Ota liuska ja kierrä sen toista päätä puoli kierrosta eli 180 astetta ennen kuin liimaat liuskan päät yhteen. Saat **Möbiuksen nauhan**. Seuraa keskiviivoja ja vertaa tapauksia A ja B. Totea, että Möbiuksen nauhalla on vain yksi puoli.
 - Ota liuska ja kierrä sen toista päätä koko kierros eli 360 astetta ennen kuin liimaat liuskan päät yhteen.
 - Ota liuska ja kierrä sen toista päätä puolitoista kierrosta eli 540 astetta ennen kuin liimaat liuskan päät yhteen.

Tutki liuskoista liimaamiasi lenkkejä ja ennusta, mitä tapahtuu, jos lenkki leikataan keskiviivaa pitkin. Tee leikkaukset ja kokoa tuloksesi tämän ja seuraavan sivun taulukkoon. Merkitään alkuperäisen liuskan pituutta kirjaimella L .

180° kiertojen lukumäärä:	Tapaus:
0	
1	
2	
3	

Leikkauksen tulos:	Tapaus:
kaksi erillistä lenkkiä	
yksi kiertyvä lenkki	
kahden erillisen kiertyvän lenkin ketju	
Yhden lenkin pituus:	Tapaus:
L	
$2L$	