TODENNÄKÖISYYS

Aihepiirejä: Yhden ja kahden tapahtuman tuloksien käsittely ja taulukointi, ovikoodit, joukkueen valinta, bussin odotus, pelejä, urheilijoiden testaus kielletyn piristeen käytöstä, linnun munan kehittyminen linnuksi eri massoilla.

Todennäköisyys on satunnaisluonteisten ilmiöiden kuvaamista matematiikan keinoin. Tällaisten ilmiöiden lopputulosta ei voida etukäteen selvittää laskemalla ja päättelemällä, vaan tuloksen määrää sattuma. Paitsi matematiikassa, todennäköisyys on tärkeä käsite muun muassa tilastotieteessä, luonnontieteissä ja filosofiassa.

Matematiikassa todennäköisyys ilmoitetaan nollan ja ykkösen välillä olevana lukuna. Varman tapahtuman todennäköisyys on 1, mahdottoman 0.

Todennäköisyyslaskentaa on harjoitettu kauan, aluksi erilaisiin peleihin liittyen. Esimerkki tällaisesta on nopanheitto, jossa kunkin silmäluvun todennäköisyys on 1/6. Nykyaikaisen todennäköisyyslaskennan matemaattisen teorian muotoili Andrei Kolmogorov vuonna 1933.

1. Tässä tehtävässä päätellään kaksilapsisen perheen lapsiin liittyviä todennäköisyyksiä.

   a) Eräässä perheessä on kaksi lasta, joista vanhempi on tyttö ja nuorempi on poika. Tätä sisarussarjaa voidaan merkitä TP. Luettele muut mahdolliset kaksilapsisen perheen sisarussarjat.
   b) Millä todennäköisyydellä kaksilapsisessa perheessä on kaksi tyttöä?
   c) Perheessä on yksi lapsi, joka on poika. Millä todennäköisydellä perheen seuraava lapsi on tyttö?
   d) Tiedetään, että kaksilapsisen perheen lapsista toinen on tyttö. Millä todennäköisyydellä toinen on poika?

2. Tässä tehtävässä päätellään kolmilapsisen perheen lapsiin liittyviä todennäköisyyksiä.

   a) Eräässä perheessä vanhin lapsi on tyttö ja keskimmäinen lapsi on poika, samoin nuorin. Tätä sisarussarjaa voidaan merkitä TPP. Luettele muut mahdolliset kolmilapsisen perheen sisarussarjat.
   b) Millä todennäköisyydellä kolmilapsisen perheen lapsista
      i. täsmälleen yksi on tyttö
      ii. vähintään yksi on tyttö
      iii. kaikki ovat poikia?
   c) Pitäisikö joidenkin b-kohdan tulosten summaksi tulla yksi?

3. Kolikkoa heitetään kaksi kertaa. Mikä on todennäköisyys saada

   a) peräkkäin 2 kruunua
   b) peräkkäin 2 klaavaa
   c) ensin klaava ja sitten kruuna
   d) klaava ja kruuna jossain järjestyksessä?

4. Tutustu todennäköisyyden olemukseen nopanheiton kautta katsomalla Samuli Siltasen tekemä video (www.youtube.com/watch?v=rkJv4BveY4g&t=4s).

5. Heitä kahta noppaa 20 kertaa. Tee taulukko, johon kirjaat heittojen tuloksena saamasi silmäluvut. Kirjaa taulukkoon myös silmälukujen summa ja tulo.

   a) Kuinka monessa prosentissa heitoista silmälukujen summa on parillinen?

   b) Kuinka monessa prosentissa heitoista silmälukujen tulo on parillinen?

   c) Tuliko silmälukujen summasta useammin parillinen vai pariton? Entä silmälukujen tulosta? Mistä nämä tulokset voisivat johtua?

6. Jatkoa edelliseen tehtävään. Kahden nopan heittoon liittyviä todennäköisyyksiä voi tutkia alla olevan taulukon avulla.

6						
5						
4						
3						
2						
1						
	1	2	3	4	5	6

   a) Tee vihkoosi samanlainen taulukko ja merkitse siihen, milloin silmälukujen summa on parillinen.

   b) Millä todennäköisyydellä silmälukujen summa on parillinen?

   c) Tee vihkoosi samanlainen taulukko kuin yllä ja merkitse siihen, milloin silmälukujen tulo on parillinen.

   d) Millä todennäköisyydellä silmälukujen tulo on parillinen?

   e) Vertaa tehtävässä 5 saamaasi kokeellista prosenttiosuutta ja tässä tehtävässä laskemaasi teoreettista todennäköisyyttä. Mistä niiden ero voi johtua?

   f) Yhdistä tehtävässä 5 taulukoimasi tulokset kaverisi tulosten kanssa. Tutkikaa yhdessä, lähenevätkö kokeellinen tulos ja teoreettinen todennäköisyys toisiaan aineiston (heittojen määrän) kasvaessa.

7. Käytä samanlaista taulukkoa kuin tehtävässä 6. Laske todennäköisyys, että kahta noppaa heitettäessä saadaan

   a) silmälukujen summaksi 6

   b) molemmiksi silmäluvuiksi parillinen luku

   c) molemmista nopista sama silmäluku

   d) nopista eri silmäluvut

   e) ainakin toiseksi silmäluvuksi alkuluku

   f) silmälukujen summaksi kolmella jaollinen luku.

8. Heitetään valkoista ja punaista noppaa. Millä todennäköisyydellä saadaan

    a) valkoisesta kolmea pienempi ja punaisesta neljää pienempi silmäluku

    b) valkoisesta parillinen ja punaisesta pariton silmäluku?

    Voit käyttää apuna taulukkoa:

punainen						
6						
5						
4						
3						
2						
1						
	1	2	3	4	5	6 valkoinen

9. Ovikoodi voidaan muodostaa numeroista 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sekä erikoismerkeistä $*$ ja $\#$.

    a) Valitaan sattumanvaraisesti neljän numeron pituinen ovikoodi numeroista 0–9. Millä todennäköisyydellä koodi on 3333?

    b) Valitaan sattumanvaraisesti viiden merkin pituinen ovikoodi kaikissa käytössä olevista merkeistä niin, että koodin alkuun valitaan neljä numeroa ja koodin loppuun yksi erikoismerkki. Millä todennäköisyydellä koodi on 1234#?

10. Esimerkiksi Hollannin, Saksan, Unkarin, Bulgarian, Liettuan, Viron ja Venäjän lipuissa on kolme vaakaraitaa kuten alla olevassa lipussa.

    a) Lipun raitojen värittämiseen on käytössä viisi väriä: P, S, K, V, M. Kuinka monta erilaista lippua voidaan tehdä, jos mitkään kaksi vierekkäistä raitaa eivät saa olla samanväriset?

    b) Mikä on todennäköisyys, että saat lipun, jonka värit ovat järjestyksessä KVM, jos otat yhden lipuista sattumanvaraisesti?

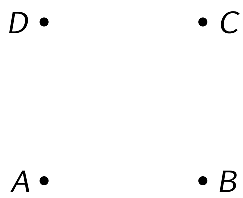
11. Jos satavuotiaan ihmisen todennäköisyys elää 101-vuotiaaksi on 0,005, niin kuinka monta henkilöä 500 000 satavuotiaan joukosta todennäköisesti elää 101-vuotiaaksi?

12. Luokalla on 28 oppilasta, joista 10 on tyttöjä. Nimiluettelosta valitaan nimiä umpimähkään. Kuinka monta nimeä täytyy vähintään valita, jotta joukossa varmasti

    a) on ainakin yksi tyttö
    b) on ainakin kaksi poikaa
    c) on ainakin yksi tyttö ja ainakin yksi poika
    d) on ainakin kaksi samassa kuussa syntynyttä
    e) on ainakin yksi tammikuussa syntynyt
    f) ei ole pelkästään tammikuussa syntyneitä?

13. Joukkueita on neljä. Merkitään niitä A, B, C ja D.

    a) Kuinka monta ottelua on pelattava, jos jokainen joukkue pelaa kerran jokaista toista joukkuetta vastaan? Havainnollista tilannetta piirroksella:

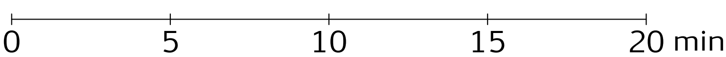


    b) Jos joukkueet ovat tasaväkisiä, niin millä todennäköisyydellä joukkue A voittaa kaikki ottelunsa?

14. Bussit kulkevat 20 minuutin välein. Menet pysäkille katsomatta aikataulua. Millä todennäköisyydellä joudut odottamaan

    a) enintään 5 minuuttia
    b) enintään 10 minuuttia
    c) vähintään 5 minuuttia
    d) vähintään 10 minuuttia?

    Voit käyttää todennäköisyyden päättelemiseen alla olevaa janaa. Merkitse siihen kysyttyä tilannetta vastaava aikaväli.



15. Viiden henkilön A, B, C, D ja E ryhmässä on kaksi sisarusta. Ryhmästä valitaan kolmen hengen johtokunta.

    a) Yksi mahdollinen johtokunta on ABC. Luettele muut vaihtoehdot. Kuinka monta vaihtoehtoa on yhteensä?
    b) Millä todennäköisyydellä kumpaakaan sisaruksista ei valita johtokuntaan?
    c) Millä todennäköisyydellä sisaruksista molemmat valitaan?
    d) Millä todennäköisyydellä vain toinen sisaruksista valitaan?
    e) Onko muita mahdollisuuksia?

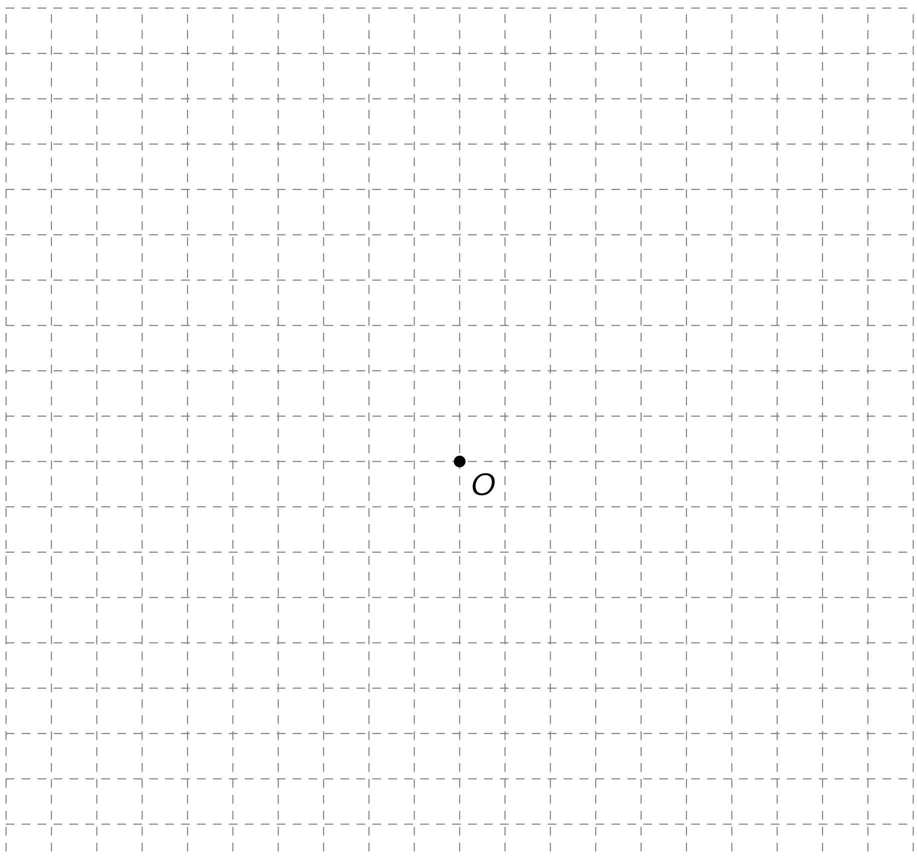
16. Valitaan sattumanvaraisesti kolmen henkilön ryhmä henkilöistä Alli, Jessica, Juhana, Minna-Maaria ja Pekka. Millä todennäköisyydellä ryhmään valitaan

   a) Alli, Juhana ja Minna-Maaria
   b) vain tyttöjä
   c) yksi poika ja kaksi tyttöä
   d) kaksi poikaa ja yksi tyttö?
   e) Pitäisikö joistain edellisten kohtien tuloksista tulla summaksi 1?

17. Aloita pisteestä O. Heitä kahta noppaa. Laske, mikä on jakojäännös, kun silmälukujen summa jaetaan luvulla 4. Yhdistä sitten piste O viereiseen pisteeseen seuraavan taulukon mukaisesti.

Jakojäännös	Siirry
0	oikealle
1	ylöspäin
2	vasemmalle
3	alaspäin

Heitä noppia uudelleen ja jatka murtoviivaa.



a) Mihin pisteisiin voit päästä viidellä heittokerralla? Perustele.

b) Tehkää kaverisi kanssa kumpikin kymmenen heittokertaa ja laskekaa, kumpi pääsi kauemmas pisteestä O. Mikä on pisin etäisyys, johon voisitte päästä?

18. Jatkoa tehtävään 17. Millä todennäköisyydellä ensimmäinen siirtymä on

a) oikealle   b) ylöspäin   c) vasemmalle   d) alaspäin?

Voit käyttää apuna alla olevaa taulukkoa ja täydentää siihen, mikä on silmälukujen summan jakojäännös neljällä jaettaessa.

6						
5						
4						
3						
2						
1						
	1	2	3	4	5	6

19. Alla olevilla viidellä pallolla voidaan pelata erilaisia pelejä.

2   3   4   5   6

a) Pelataan niin, että otetaan näistä näistä palloista umpimähkään kaksi ja lasketaan niiden luvut yhteen. Esimerkiksi palloista 4 ja 5 saadaan tulokseksi $4+5=9$. Jos tulos on parillinen, voitat, ja jos tulos on pariton, häviät. Mikä on todennäköisyytesi voittaa?

Voit käyttää apuna alla olevaa taulukkoa:

6					
5					
4					
3					
2					
	2	3	4	5	6

b) Pelataan niin, että otetaan näistä palloista umpimähkään kaksi ja kerrotaan niiden luvut keskenään. Esimerkiksi palloista 4 ja 5 saadaan tulokseksi $4 \cdot 5 = 20$. Jos tulos on parillinen, voitat, ja jos tulos on pariton, häviät. Mikä on todennäköisyytesi voittaa?

Voit käyttää apuna samanlaista taulukkoa kuin edellisessä kohdassa.

★ 20. Keksi edellisen tehtävän palloilla peli, jossa saat

a) voiton todennäköisyydeksi 1
b) voiton todennäköisyydeksi 0,5
c) voiton todennäköisyydeksi 0.

★ 21. Tutkimuksen mukaan noin yksi kolmesta kilpailijasta käyttää kiellettyä piristettä. Testillä yritetään tutkia, onko kilpailija käyttänyt kiellettyä piristettä. Positiivinen testitulos tarkoittaa, että kiellettyä ainetta on käytetty, ja negatiivinen tulos tarkoittaa, ettei ainetta ole käytetty. Puolueettoman selvityksen mukaan yksi kymmenestä testauksesta antaa väärän tuloksen.

Millä todennäköisyydellä

a) kilpailija saa kilpailusta poistamiseen johtavan positiivisen tuloksen
b) kilpailija saa negatiivisen tuloksen
c) kilpailija poistetaan kilpailusta väärän testituloksen vuoksi
d) positiivisen tuloksen saanut kilpailija todella on käyttänyt piristettä?

★ 22. Lintuemon hautomasta munasta kehittyy lintu todennäköisyydellä P, joka riippuu munan massasta m seuraavasti

$$P = \begin{cases} 0, & \text{jos munan massa } m \leq 150 \text{ g;} \\ \dfrac{m-150}{k+m-150}, & \text{jos munan massa } m > 150 \text{ g.} \end{cases}$$

Tässä $k \geq 0$ on vakio.

a) Päättele, että $0 \leq P \leq 1$.
b) Kun $k > 0$ on vakio, niin jokaista mahdollista munan massaa m vastaa yksi todennäköisyys. Tämä tarkoittaa, että todennäköisyys P on munan massan funktio $P(m)$. Luonnostele funktion P kuvaaja tilanteessa, jossa $k = 150$.

c) Luonnostele funktion P kuvaaja tilanteessa, jossa $k = 50$.

d) Luonnostele funktion P kuvaaja tilanteessa, jossa $k = 1150$.