Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?

Matti Lehtinen

Desimaaliluvut ovat niin jokapäiväisiä ja niillä laskemiseen niin totuttu, ettei yleensä tule miettineeksi, mitä ne oikeastaan ovat. Joskus kauan sitten, kun yleisemmin ajateltiin, että asioita tulee voida nimittää suomen kielellä, käytössä oli desimaaliluvun rinnalla nimitys *kymmenmurtoluku*. Vaikka desimaaliluvuilla laskeminen on yleensä mukavampaa kuin murtoluvuilla, niin totuus on, että desimaaliluvut ovat murtolukuja, eräs murtolukujen laji, ja desimaaliluvuilla laskemisen säännöt ja ominaisuudet perustuvat murtolukujen vastaaviin sääntöihin ja ominaisuuksiin.

Luvut ovat varmaan alkuaan syntyneet tarpeesta ilmaista lukumäärää. Jotain on kolme, jotain seitsemän, jotain 100 kappaletta. Mutta maailmassa on paljon sellaisiakin, joissa jokin määrä on osa jotain suurempaa kokonaisuutta. Puoli pizzaa, neljännestunti. Osan kokoa on luonteva ilmaista luvulla, joka kertoo, kuinka monta samankokoista osaa tarvitaan yhden kokonaisen saamiseksi. Kaksi puolikaspizzaa on koko pizza, neljä neljännestuntia on koko tunti. Muinaiset egyptiläiset, ensimmäiset laskennon kehittäjät, ajattelivat vain tällaisilla osilla. Jos heidän olisi pitänyt ilmoittaa määrä, jonka me ajattelemme kahdeksi kolmasosaksi, he puhuivat puolikkaasta ja kuudesosasta.

Me ymmärrämme enemmän kuin neljä tuhatta vuotta sitten eläneet hieroglyfien kirjoittajat. Olemme kehittäneet käsitteen murtoluku. Määrä, jossa on kaksi viidettä osaa ei tuota ongelmia. Merkitsemme sitä murtoluvulla $\frac{2}{5}$. Ja kun kirjoitamme $\frac{3}{7}$, ajattelemme, että meillä on kolme kertaa se määrä, jota tarvittaisiin seitsemän täyden kokonaisuuden saavuttamiseksi. Osaamme laskeakin murtoluvuilla. Esimerkiksi kaksi viidettä osaa ja kolme seitsemättä osaa on yhteensä sama kuin 14 kolmaskymmenesviidesosaa lisättynä viidellätoista kolmaskymmenesviidesosalla ja siis sama kuin 29/35, 29 kolmaskymmenesviidesosaa.

Edellinen esimerkkikin osoittaa, että murtoluvuilla laskeminen saattaa olla hiukan hankalaa. Vaikeus syntyy yleensä siitä, että kun kokonaisuutta jaetaan eri lailla osiin ja osia on eri määrät, niin näiden osien käsittely yhdessä onnistuu vain, kun kokonaisuus jaetaan sillä tavalla vielä pienempiin osiin, että näitä pienempiä osia tarvitaan jokin tasamäärä synnyttämään molemmat isommat murto-osat. Pitää löytää se yhteinen nimittäjä.

Keskiajan lopuilta lähtien lukumäärää ilmaisevia kokonaislukuja on länsimailla kirjoitettu ns. arabialaisin tai intialaisin numeroin. Ne ovat ne tavalliset numerot, $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, joita käyttäen voidaan kirjoittaa kaikki kokonaisluvut. Kun lukuja on äärettömän paljon mutta merkkejä vain kymmenen, tarvitaan informaation välittämiseen jokin lisäkeino. Se on ns. paikkajärjestelmä. Numeromerkki tarkoittaa eri asioita sen mukaan, missä paikassa luvun ilmaisemiseen käytettävää numerojonoa se sijaitsee. Numero 3 tarkoittaa luvussa 32 kolmea kymmentä, luvussa 13 kolmea ja luvussa 339 kolmea sataa ja kolmea kymmentä. Paikkajärjestelmä on oikeastaan eräänlaista pikakirjoitusta. Tarkemmin kirjoitettuna $399 = 3 \cdot 10 \cdot 10 + 9 \cdot 10 + 9$ ja $1234 = 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + 2 \cdot 10 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 4$. Olennaista tässä on lukujärjestelmän kantaluku 10. Mikään ehdoton pakko ei määrää juuri lukua 10 tähän erikoisasemaan, mutta ihmisen sormien lukumäärä on ollut niin tärkeä laskemisen apu, että tähän on väistämättä päädytty.

Kymmenjärjestelmä ei ole pelkästään tapa merkitä lukumääriä kymmenen merkin avulla, vaan myös kokoelma laskemistapoja eli laskualgoritmeja. Yhteenlasku muistinumeroineen, vähennyslasku ”lainaamisineen”, kertolasku, jota varten on tarpeen hallita kertotaulu, toimivat omilla tavoillaan.

On ehkä hiukan yllättävää, että vasta 1500-luvulla huomattiin, että kymmenjärjestelmä kelpaa myös kokonaisuuden osien ilmaisemiseen. Syntyivät desimaaliluvut. Desimaaliluvulla ilmaistaan, kuinka monta kymmenesosaa, sadasosaa, tuhannesosaa jne. jokin osa pitää sisällään. Ja sen sijaan, että kirjoitettaisiin vaikkapa kaksi kymmenesosaa muodossa $\frac{2}{10}$, sovitaan merkinnästä 0,2. Vastaavasti kolmen sadasosan merkkinä käytetään murtoluvun $\frac{3}{100}$ sijasta merkintää 0,03. Näin kymmenjärjestelmän merkintäidea siirtyy myös kokonaisuuden osaa osoittaviin lukuihin:

$$0,1234 = \frac{1}{10} + \frac{2}{10 \cdot 10} + \frac{3}{10 \cdot 10 \cdot 10} + \frac{4}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}.$$

– Desimaalilukuja on aikoinaan nimitetty *kymmenmurtoluvuiksi* ja niiden murtolukuluonne on kuulunut siitä, miten ne luettiin ääneen: 2,4 ei ollut ”kaksi pilkku neljä”, vaan ”kaksi kokonaista neljä kymmenesosaa”.

Desimaalilukujen ”suuri juttu” on oikeastaan se, että murtolukujen hiukan ongelmalliset laskuominaisuudet jäävät pois, ja tilalle tulevat aivan samat keinot, joita käytetään kokonaisluvuilla laskettaessa. Tämähän ei ole itsestään selvää, mutta se on perusteltavissa. Olennaista on, että yhteisen nimittäjän löytäminen on helppoa. Jos halutaan laskea 0,3 + 0,6, niin kyse on oikeastaan yhteenlaskusta $\frac{3}{10} + \frac{6}{10}$. Kymmenesosia on yhteensä yhdeksän, joten tulos on $\frac{9}{10} = 0{,}9$. Jos halutaan laskea $0{,}57 + 0{,}69$, niin lasku on oikeastaan

$$\begin{aligned}\frac{5}{10}+\frac{7}{100}+\frac{6}{10}+\frac{9}{100} = \frac{11}{10}+\frac{16}{100} &= \frac{10+1}{10}+\frac{10+6}{100}\\ &= 1+\frac{1}{10}+\frac{10}{100}+\frac{6}{100} = 1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{6}{100}\\ &= 1+\frac{2}{10}+\frac{6}{100} = 1{,}26.\end{aligned}$$

Mutta käytännössä ei tarvitse ajatella murtolukuja. Samaan oikeaan tulokseen päästään, jos lasketaan, vaikkapa allekkain, sadasosat yhteen. Kun $7 + 9 = 16$, sadasosia on yli yhdeksän. Sadasosista siirretään 10 muistinumerona kymmenesosiin, joita on siis $5 + 6 + 1 = 12$ kappaletta. Kun kymmenesosia on yli yhdeksän, niistä kertyy yksi kokonainen, ja kymmenesosien puolelle jää kaksi. Tulos on siis 1,26.

Vähennyslaskussa syntyy pieni ongelma aina, kun ”pienemmästä vähennetään isompi”. Kokonaisluvuilla allekkain laskettaessa asia hoidetaan ”lainaamalla”. Kun lasketaan $42 - 25$, toimitaan itse asiassa näin: $42 - 27 = 30 + 12 - 20 - 7 = 30 - 20 + 12 - 7 = 10 + 5 = 15$. Lainaamisen tekniikka toimii aivan samoin desimaaliluvuilla:

$$\begin{aligned}0{,}53-0{,}25 &= \frac{5}{10}+\frac{3}{100}-\frac{2}{10}-\frac{5}{100} = \frac{4}{10}+\frac{10}{100}+\frac{3}{100}-\frac{2}{10}-\frac{5}{100}\\ &= \frac{2}{10}+\frac{10+3-5}{100} = \frac{2}{10}+\frac{8}{100} = 0{,}28.\end{aligned}$$

Tämä pitkällinen murtolukulasku toteutuu tietysti allekkain laskettaessa niin, että 5:stä ”lainataan” 1 niin, että vähennettävässä sadasosia tulee olemaan 13 3:n sijasta, 13:sta vähennetään 5 ja saadaan 8 sadasosaa, ja ”lainaamisen” jälkeen jääneistä neljästä kymmenesosasta vähennetään kaksi kymmenettä osaa.

Miksi desimaalilukujen kertolaskukin sujuu allekkain suunnilleen samoin kuin kokonaislukujen? Tutkitaan tätäkin esimerkin avulla laskemalla $0{,}32 \cdot 0{,}67$. Kyse on itse asiassa laskutoimituksesta

$$\begin{aligned}&\left(\frac{3}{10}+\frac{2}{100}\right)\cdot\left(\frac{6}{10}+\frac{7}{100}\right) = \frac{3}{10}\cdot\frac{6}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{100}+\frac{2}{100}\cdot\frac{6}{10}+\frac{2}{100}\cdot\frac{7}{100}\\ &= \frac{18}{100}+\frac{21}{1000}+\frac{12}{1000}+\frac{14}{10000} = \frac{1}{10}+\frac{8}{100}+\frac{33}{1000}+\frac{14}{10000}\\ &= \frac{1}{10}+\frac{8}{100}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{1}{1000}+\frac{4}{10000} = \frac{1}{10}+\frac{11}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{4}{10000}\\ &= \frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{4}{10000} = \frac{2}{10}+\frac{1}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{4}{10000} = 0{,}2144.\end{aligned}$$

Jos vertaat tätä tavalliseen allekkain kertomiseen huomaat, että kymmenesosat, sadasosat jne. ilmestyvät omiin sarakkeisiinsa ja ”muistinumerot” syntyvät tilanteista, joissa jotakin tällaista osaa kertyy enemmän kuin yhdeksän kappaletta.

Käytännön laskuohje, ”kerro desimaaliluvut ikään kuin ne olisivat kokonaislukuja, mutta sijoita tuloon desimaalipilkku niin, että tulossa olevien desimaalien lukumääräksi tulee kertojan ja kerrottavan desimaalien lukumäärien summa” tulee myös esimerkissämme ymmärrettäväksi. Kun kummassakin luvussa on kaksi desimaalia, on kummassakin luvussa mukana sadasosia. Kertolasku $\dfrac{1}{100} \cdot \dfrac{1}{100}$ antaa tulokseksi $\dfrac{1}{100 \cdot 100} = \dfrac{1}{10000}$. Tuloon saadaan siten pienimmäksi osaksi jokin määrä kymmenestuhannesosia, mikä merkitsee sitä, että tulossa on oltava neljä eli kaksi + kaksi desimaalia. Sen perustelu, että samanlainen tilanne vallitsee aina, vaatii taustakseen potenssilaskun alkeet, ja sivuutetaan tässä.

Desimaaliluvuilla on haittapuolensa. Kaikkien kokonaisuuden osien ilmaiseminen niiden avulla ei ole aivan yksinkertaista. Mitä on vaikkapa kolmasosa. Se on enemmän kuin $0{,}3 = \frac{3}{10}$, mutta vähemmän kuin $0{,}4$ (koska $3 \cdot 0{,}3 = 0{,}9 < 1$ ja $3 \cdot 0{,}4 = 1{,}2 > 1$). Se on enemmän kuin $0{,}33$ mutta vähemmän kuin $0{,}34$ (koska $3 \cdot 0{,}33 = 0{,}99 < 1$ ja $3 \cdot 0{,}34 = 1{,}02 > 1$). Se on jotain, joka on suurempi kuin $0{,}333\ldots33$, mutta pienempi kuin $0{,}333\ldots34$, otetaanpa lukuun miten paljon desimaaleja tahansa. On tullut tavaksi merkitä tällaisia lukuja $0{,}333\ldots$ ajatuksella, että desimaaleja on luvussa äärettömän paljon, loputtomasti. Sen ymmärtäminen, mitä tämä lopulta tarkoittaa, vaatii hiukan mutkikkaampia matemaattisia käsitteitä, nimittäin ns. päättymättömät sarjat.

Käytännössä desimaaliluku syntyy usein jakolaskun tuloksena, ihan vaikka jakokulmassa. Jakokulmassa jaon vaiheet voi kuitenkin kirjoittaa ihan normaaleina laskumerkintöinä. Ajatellaan vaikka jakoa $\dfrac{10}{7}$. Koska $10 = 7 + 3$, $\dfrac{10}{7} = 1 + \dfrac{3}{7}$. Mutta $\dfrac{3}{7} = \dfrac{30}{7} \cdot \dfrac{1}{10} = \dfrac{28+2}{7} \cdot \dfrac{1}{10} = 4 \cdot \dfrac{1}{10} + \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{1}{10}$. Desimaalimerkintäsopimuksen mukaan siis $\dfrac{10}{7} = 1{,}4 + \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{1}{10}$. Voidaan jatkaa: $\dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{1}{10} = \dfrac{20}{7} \cdot \dfrac{1}{100} = \dfrac{14+6}{7} \cdot \dfrac{1}{100} = 2 \cdot \dfrac{1}{100} + \dfrac{6}{7} \cdot \dfrac{1}{100} = 0{,}02 + \dfrac{6}{7} \cdot \dfrac{1}{100}$. Siis $\dfrac{10}{7} = 1{,}42 + \dfrac{6}{7} \cdot \dfrac{1}{100}$. Seuraava vaihe johtaisi tulokseen $\dfrac{10}{7} = 1{,}428 + \dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{1}{1000}$, sitä seuraavat tuloksiin $\dfrac{10}{7} = 1{,}4285 + \dfrac{5}{7} \cdot \dfrac{1}{10000}$ ja $\dfrac{10}{7} = 1{,}42857 + \dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{1}{100000}$. Prosessi ei pääty. Mutta viimeinen vaihe johtaa takaisin alkutilanteeseen ”jaa

10 7:llä”. Seuraus on että samat jakotulokset toistuvat samassa järjestyksessä.

$$\frac{10}{7} = 1{,}428571428571\ldots.$$

Kokeile jakokulmassa! Näin käy aina, kun jakaja on kokonaisluku: joko jako menee tasan, niin kuin esimerkiksi jaossa $\frac{3}{8} = 0{,}375$, tai samat numerot seuraavat toisiaan samassa järjestyksessä, loputtomasti. Jälkimmäisessä tapauksessa puhutaan *jaksollisesta desimaaliluvusta*. Sitten kun aikanaan tutustut käsitteeseen *geometrinen sarja*, tulet huomaamaan, että jokainen jaksollinen desimaaliluku esittää jotain murtolukua tai kokonaisluvun ja murtoluvun summaa eli *rationaalilukua*. Kysymys sellaisten desimaalilukujen olemuksesta, joissa desimaalit seuraavat toisiaan loputtomassa jaksottomassa, epäsäännöllisessä jonossa, on kiehtova. Siihenkin tutustut toivottavasti myöhemmin.