LUKUTEORIAN TEHTÄVIÄ MATEMATIIKKADIPLOMIA VARTEN

(1) Jos luku kirjoitetaan b-kantaisessa esityksessä, se tarkoittaa, että luku kirjoitetaan muodossa $a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots a_1 b + a_0$, tai lyhyesti vain $(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_b$, missä $0 \leq a_j \leq b-1$, kun $0 \leq j \leq n-1$ ja $1 \leq a_n \leq b-1$. Lyhyestä esityksestä voidaan usein jättää sulut pois, jos sekaantumisen vaaraa ei ole. Samoin kantaluku tyypillisesti jätetään pois esimerkiksi kymmenjärjestelmää käytettäessä.

Tarkastellaan esimerkiksi lukua 654_7 ja muunnetaan tämä viisikantaiseen esitykseen. Nyt

$$654_7 = 6 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7 + 4 = 333.$$

Koska $5^3 = 125$ ja $5^4 = 625$, suurin luvun viisi potenssi, joka sisältyy lukuun 333 on 5^3. Koska

$$\frac{333}{5^3} = \frac{333}{125} = 2 + \frac{83}{125},$$

Sisältyy 125 lukuun 333 kaksi kertaa. Nyt jäljellä on $333 - 2 \cdot 5^3 = 83$. Luku 5^2 sisältyy lukuun 83 kolme kertaa (sillä $83 = 3 \cdot 5^2 + 8$). Tämän jälkeen jäljellä on kahdeksan, johon 5^1 sisältyy täsmälleen kerran, ja koska $8 = 5^1 + 3$, saadaan

$$654_7 = 333_{10} = 2313_5.$$

Binääriesitykset ovat tärkeitä tietotekniikassa, kuusitoistakantaiseen järjestelmään voi törmätä esimerkiksi värien RGB-koodausta ihmetellessä.

(a) Muunna 1000_{10} 2-kantaiseen esitykseen, eli binääriesitykseen.

(b) Muunna 876_9 3-kantaiseen esitykseen.

(2) Kun kuusinumeroinen luku $6574n9_{10}$ jaetaan kahdeksalla, saadaan jakojäännökseksi viisi. Määritä mahdolliset luvun n arvot.

(3) Jonossa $2, 3, 5, 6, 7, 20, \ldots$ on ne kokonaisluvut, jotka eivät ole kokonaislukujen neliöitä tai kuutioita. Etsi jonon 75. termi.

(4) (a) Milloin summa $1 + 2 + \cdots + n$ on parillinen?

(b) Entä summa $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$?

(5) Positiivista lukua d sanotaan luvun n tekijäksi, jos luku n on jaollinen luvulla d, eli jos $\dfrac{n}{d}$ on kokonaisluku. Huomataan, että luku n on myös itsensä tekijä. Etsi

(a) sellainen n, että sen positiivisten tekijöiden summa on pienempi kuin $2n$

(b) sellainen n, että sen positiivisten tekijöiden summa on täsmälleen $2n$ sekä

(c) sellainen n, että sen positiivisten tekijöiden summa on suurempi kuin $2n$.

Tehtävän motivointi on tämä: Jos luvun tekijöiden summa on täsmälleen kaksi kertaa luvun arvo, lukua kutsutaan täydelliseksi. Parillisia täydellisiä lukuja tunnetaan jonkin verran, mutta ei tiedetä onko niitä äärettömän paljon vai ei (tosin niiden rakenne tunnetaan). Parittomia täydellisiä lukuja ei tunneta ainuttakaan, eikä niiden olemassaoloon yleisesti uskota.

(6) Osoita, että $7^n - 4^{n+2}$ on jaollinen luvulla kolme, kun n on positiivinen kokonaisluku.

(7) Osoita, että jos luvulla n on pariton tekijä, niin $2^n + 1$ ei ole alkuluku.

(8) Osoita, että mitkä tahansa viisi lukua lukujen $1, 2, \ldots, 10$ joukosta valitaankaan, niin näiden valittujen lukujen joukosta voidaan valita kolme, joiden summa on jaollinen kolmella.

(9) Neljän peräkkäisen kokonaisluvun joukossa tiedetään olevan yksi, joka on viidellä jaollinen. Mikä on suurin positiivinen kokonaisluku, jolla näiden kokonaislukujen tulo on varmasti jaollinen?

(10) Osoita, että lukua $\sqrt{15}$ ei voida esittää kahden positiivisen kokonaisluvun osamääränä. (Vihje: Oleta, että tällainen esitys on olemassa, ja johda ristiriita.)

(11) Olkoot a, b, c, d kokonaislukuja ja $0 < a < b < c < d$. Naapuri väittää, että hän osaa valita luvut a, b, c, d niin, että mitkä tahansa kaksi eri lukua näiden joukosta valitaan, niin niiden summa jakaa summan $a + b + c + d$. Todista, että naapuri valehtelee.

(12) Kerrot edellisen tehtävän naapurille, että hän on väärässä. Nyt hän väittää, että viidellä lukuparilla (kuudesta mahdollisesta) kaikkien neljän luvun summa on jaollinen lukuparin lukujen summalla. Osoita, että naapuri on yhä väärässä.

(13) Etsi kaikki kokonaisluvut x, y ja z, jotka toteuttavat ehdon

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 4.$$

Seuraavia tehtäviä varten olisi hyvä osata koulun lukuteorian kurssin tiedot.

(14) Osoita, että $a + b + c$ on jaollinen luvulla kaksi jos ja vain jos $a^3 + b^3 + c^3$ on jaollinen luvulla kaksi.

(15) Osoita, että luku $2011! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 2010 \cdot 2011$ on jaollinen luvulla 3^{1000}.

(16) Polynomista $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiedetään, että $f(0) \equiv 1 \pmod 5$, $f(2) \equiv 1 \pmod 5$ sekä $f(1) \equiv 3 \pmod 5$. Määritä polynomin kertoimet a, b, c modulo 5.

(17) Kiinalainen jäännöslause kertoo, että jos luvut $d_1, d_2, \ldots, d_n$ ovat pareittain yhteistekijättömiä, niin kongruenssiyhtälöryhmällä $x \equiv a_i \pmod{d_1}$ on yksikäsitteinen ratkaisu modulossa $d_1 d_2 \cdots d_n$.

Tarkastellaan esimerkkiä tilanteen selventämiseksi. Tiedetään esimerkiksi, että

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{10} \\ x \equiv 1 \pmod{3}. \end{cases}$$

Halutaan nyt löytää sellainen a, että $x \equiv a \pmod{30}$, sillä $30 = 3 \cdot 10$. Eräs helppo menettelytapa on seuraavanlainen:

Aloitetaan ensimmäisestä kongruenssiyhtälöstä, ja kirjoitetaan auki sen kertoma ehto $x = 10y + 3$. Sijoitetaan tämä toiseen kongruenssiyhtälöön: $10y + 3 \equiv 1 \pmod 3$, eli $10y \equiv 1 \pmod 3$. Koska $10 \equiv 1 \pmod 3$, saadaan $y \equiv 1 \pmod 3$. Siispä, $y = 3k + 1$. Sijoitetaan tämä luvulle x kirjoitettuun lausekkeeseen:

$$x = 10y + 3 = 10(3k + 1) + 3 = 30k + 10 + 3 = 30k + 13,$$

eli $x \equiv 13 \ (\mathrm{mod} 30)$.

Ratkaise seuraavat kongruenssiyhtälöryhmät:

(a)

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 4 \\ x \equiv 1 \pmod 5 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 8 \\ x \equiv 2 \pmod 7. \end{cases}$$

(18) Fermat'n pieni lause kertoo, että jos p on alkuluku ja $\mathrm{syt}(a, p) = 1$, niin $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Esimerkiksi siis $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. Tästä saadaan myös esimerkiksi, että $3^{4000} \equiv 1 \pmod{11}$.

(a) Mikä on jakojäännös, jos 5^{12} jaetaan luvulla 13?

(b) Mikä on jakojäännös, jos 5^{14} jaetaan luvulla 13?

(19) Käyttäen edellisen tehtävän Fermat'n pientä lausetta sekä sitä edeltävän tehtävän kiinalaista jäännöslausetta osoita, että $2^{30} - 1$ on jaollinen luvulla 341.

(20) Osoita, että jos luku n voidaan esittää kahden kokonaisluvun neliön summana, niin myös $2n$ voidaan esittää kahden kokonaisluvun neliön summana.

(21) Ratkaise kokonaislukujen joukossa $x + y = xy$. (Vihje: tulo on iloinen asia.)

(22) Etsi sellaiset positiiviset kokonaisluvut n ja m, että

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2}.$$

(23) Ratkaise kokonaislukujen joukossa: $x^2 + y^2 + z^2 = 23$.

(24) (a) Osoita, että $n^2 + 4n + 6$ ei ole kokonaisluvun neliö, kun n on positiivinen kokonaisluku.

(b) Milloin $\dfrac{n^2}{4} + n + 1$ on kokonaisluvun neliö?

Tehtävien laatija Anne-Maria Ernvall-Hytönen on Helsingin yliopiston tutkijatohtori ja mukana matematiikan olympiavalmennuksessa. Vastaukset voi pyytää häneltä osoitteesta `ernvall@mappi.helsinki.fi`