Matematiikkadiplomi X

Esipuhe

Matematiikka on menetelmätiede. Se on historiallisesti ollut ja on edelleen merkittävä osa kulttuuriamme. Matematiikka on aina ollut aktiivissa vuorovaikutuksessa luonnontieteiden ja tekniikan kanssa. Näiden alojen ongelmat ovat johtaneet uusien matemaattisten teorioiden luomiseen ja toisaalta abstrakteille matemaattisille teorioille on, ehkä myöhemmin ja yllättäenkin, ilmaantunut sovelluksia. Moderni, tekniikkaa laajasti käyttävä yhteiskuntamme perustuu matematiikalle.

Matematiikka ei ole luonnontieteiden ja tekniikan kaavakokoelma, vaan koko ajan kehittyvä, itsenäinen tiede. Se jaetaan tavallisesti puhtaaseen ja sovellettuun matematiikkaan. Puhtaassa matematiikassa tutkitaan matemaattisia rakenteita täsmällisin päättelysäännöin. Sovelletussa matematiikassa tutkimuskohteet ovat käytännönläheisempiä ja liittyvät usein matematiikan ulkopuolisiin ongelmiin. Tällöin matemaattisen päättelyn ohella korostuu se, miten saada tarkasteltava ongelma esitetyksi matemaattisessa muodossa. Nykymatematiikan laaja-alaisuuden vuoksi yliopisto-opetus perustutkintovaiheessa tyytyy tarjoamaan matemaattisen pohjan, jolta voi jatkaa.

Monien matemaatikkojen mielestä matematiikkaa tulisi opettaa koulussa tuomalla esiin sen kauneus ja sen tarjoamien älyllisten haasteiden mielihyvä. Tärkeintä on kuitenkin oikean päättelytavan oppiminen — tätähän tarvittaisiin yhteiskunnan kaikilla aloilla, politiikasta alkaen, ongelmien kunnolliseen analysointiin. Matematiikan opiskelu edesauttaa selkeän, järkevän ja luotettavan ajattelutavan kehittymistä. Kuten lihaksia, on aivojakin harjoitettava. ″Use it or lose it″ pätee tässäkin.

Tämän matematiikkadiplomin tehtävien tarkoituksena on aikaisempien diplomitehtävien tavoin tarjota matematiikan haasteita, siis matematiikan rakenteiden ja työkalujen oppimisen ohella myös aivovoimistelua. Samalla pääset kurkistamaan muutamiin sellaisiin matematiikan aloihin, kuten lukuteoria, solmuteoria, kombinatoriikka, topologia, joihin et koulukursseillasi välttämättä törmää.

Uusia nimityksiä ei tarvitse pelätä, esimerkiksi topologiasta tarjottavat tehtävät ovat askartelua. Toivottavasti ne herättävät kiinnostusta ja poistavat valitettavan yleistä käsitystä, että matematiikka on lähinnä luvuilla laskemista. Matematiikan yhtenäisyys tulee myös esille tehtävissä, joissa eri alat kietoutuvat toisiinsa ja ratkaisutavat voivat olla monenlaisia.

Osa tehtävistä on merkitty tähdellä. Ne ovat tasoltaan vähän vaativampia. Diplomin suorittamiselle ei niiden ratkaiseminen ole välttämätön edellytys, mutta yritä niitä ja kokeile, saatko ainakin jonkin niistä ratkaistua. Keskustelu muiden kanssa ja yhteistyökin on sallittua. Diplomia voi suorittaa myös osioittain, jolloin diplomiin merkitään suoritettu osio x:llä.

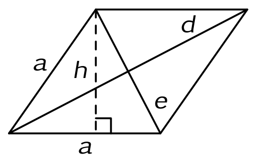
Kiinnostuneille osoitetaan eri osioiden lopussa reittejä jatkoon Solmun tiedostojen avulla.

Marjatta Näätänen

1. ALGEBRAA JA GEOMETRIAA

1) Anna lauseke seuraavien kuvioiden pinta-alalle A sekä piirille P ja kirjoita niin monta niiden ja kuvioon merkittyjen janojen pituuksien välistä yhtälöä kuin osaat. Huom. alla olevissa kuvissa d ja e ovat lävistäjien pituudet.

a) Neljäkäs (josta on käytetty myös nimeä vinoneliö)

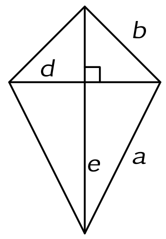


$A =$ ______________ $P =$ ______________

Muita yhtälöitä:

____

b) Leija

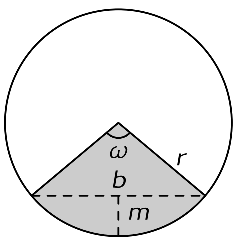


$A =$ ______________ $P =$ ______________

Muita yhtälöitä:

____

c) Ympyrän sektori



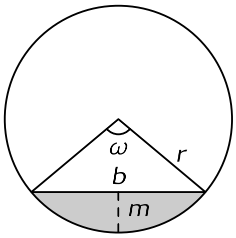
$A =$ ______________ $P =$ ______________

Muita yhtälöitä:

____

____

d) Ympyrän segmentti



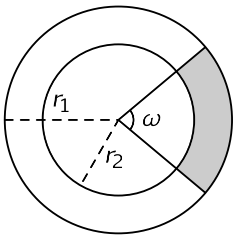
$A =$ ______________ $P =$ ______________

Muita yhtälöitä:

____

____

e) Ympyrärenkaan osa



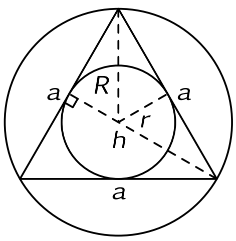
$A =$ ______________ $P =$ ______________

Muita yhtälöitä:

____

____

f) Tasasivuinen kolmio ja sen sisään ja ympäri piirretyt ympyrät



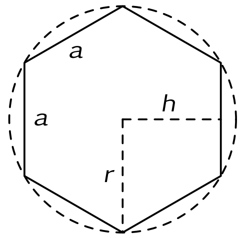
$A =$ ______________ $P =$ ______________

Muita yhtälöitä:

____

____

g) Säännöllinen kuusikulmio ja sen ympärille piirretty ympyrä



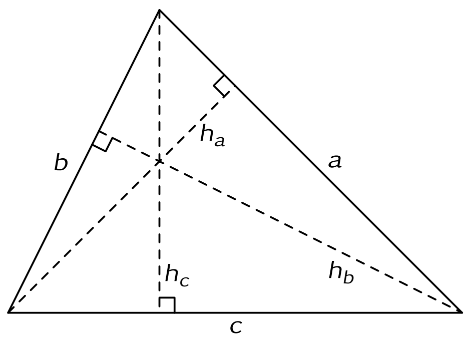
$A =$ ______________ $P =$ ______________

Muita yhtälöitä:

____

____

h) Kolmio



$A =$ ______________ $P =$ ______________

Muita yhtälöitä:

____

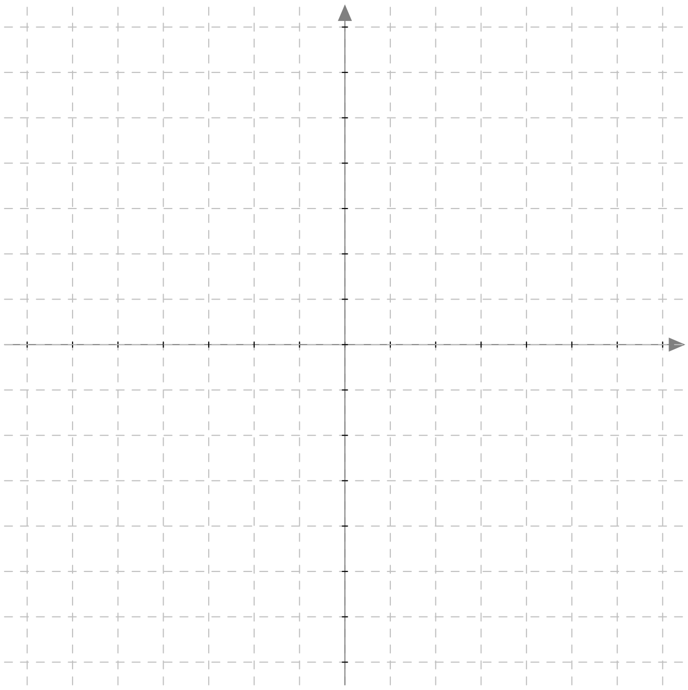
____

2) Laske lausekkeen $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ tarkka arvo, kun positiiviset luvut a ja b ovat toistensa käänteislukuja ja lukujen a ja b keskiarvo on 2.

____

____

3) Piirrä suorat $x-4y=0$, $5y=6x$ ja $y=-x+2$.



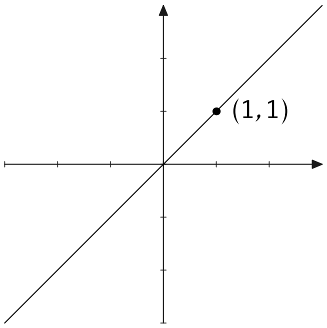
Tutki lausekkeen $y-x$ arvoa piirtämiesi suorien rajoittamassa alueessa.

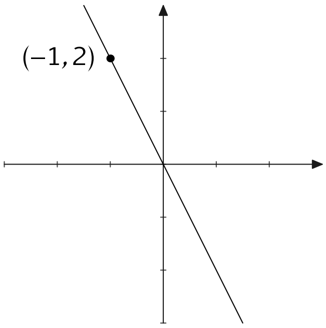
4) Mitkä ovat seuraavien suorien rajaaman kolmion kärjet?

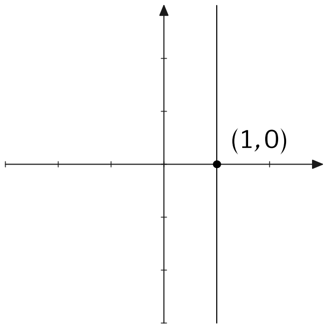
$$x+y=1005, \qquad \frac{x}{1005}+\frac{y}{1006}=1, \qquad \frac{x}{1006}+\frac{y}{1005}=1$$

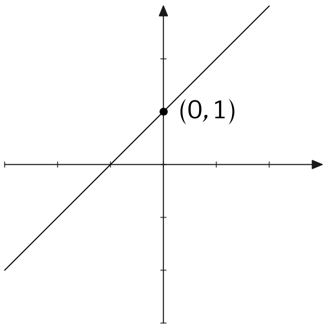
Mikä on tämän kolmion pinta-ala?

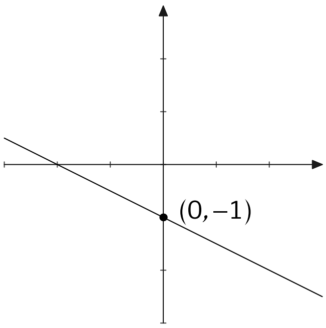
5) Anna seuraavien suorien yhtälöt:

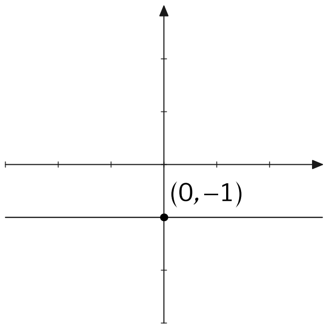






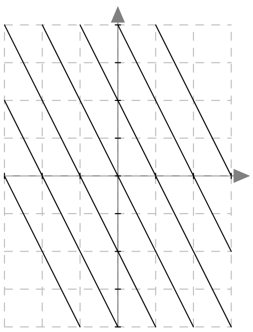


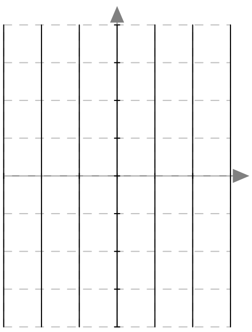


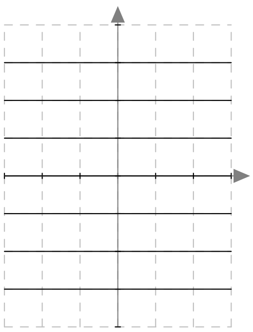


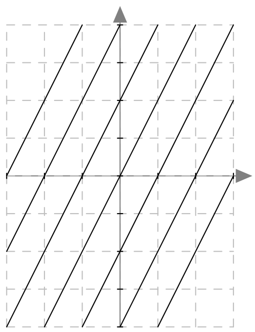
6) Millaisia yhtälöitä on näillä yhdensuuntaisilla suorilla?

Esitä yhdensuuntaisten suorien yhtälöt jokaisessa tapauksessa yhden yhtälön avulla ottamalla käyttöön parametri. Esimerkiksi suorat, joiden yhtälöt ovat $y = x + 1$, $y = x + 2$ ja $y = x + 3$ voidaan esittää yhtälön $y = x + a$ avulla, missä parametri a saa arvot 1, 2 ja 3.

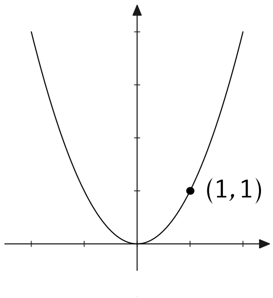


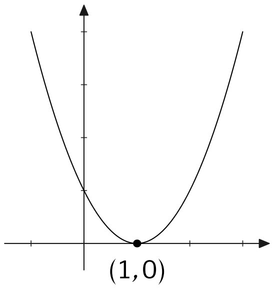


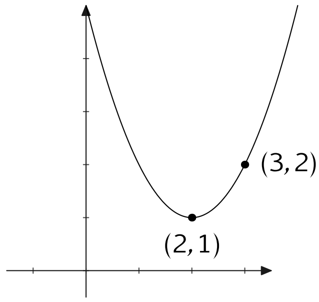




7) Anna seuraavien paraabelien yhtälöt:

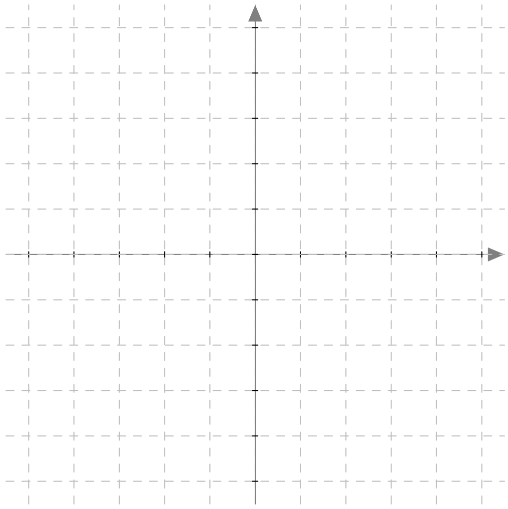




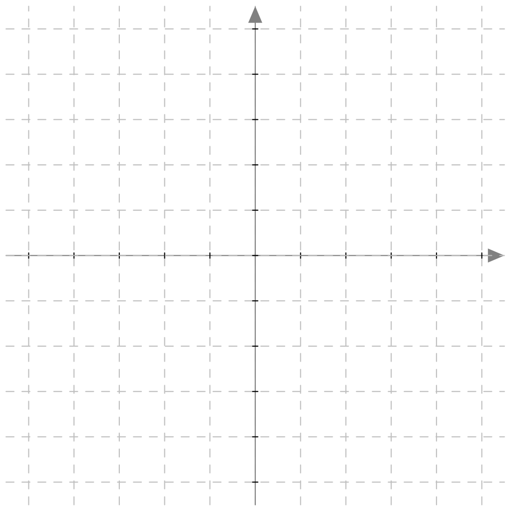


8) Piirrä seuraavien funktioiden kuvaajat välillä $-5 \leq x \leq 5$:

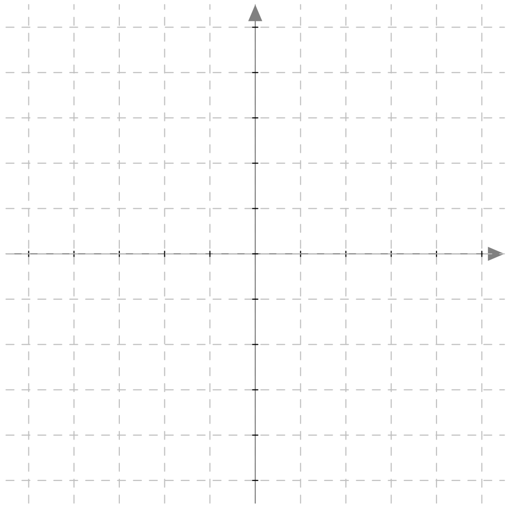
a) $f(x) = x$



b) $f(x) = |x|$



c) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}, \quad x \neq 0.$



★ 9) a) Muodosta kokonaislukukertoiminen toisen asteen polynomiyhtälö, jonka ratkaisu on $x = \sqrt{2}$. Onko muodostamallasi yhtälöllä muita ratkaisuja?

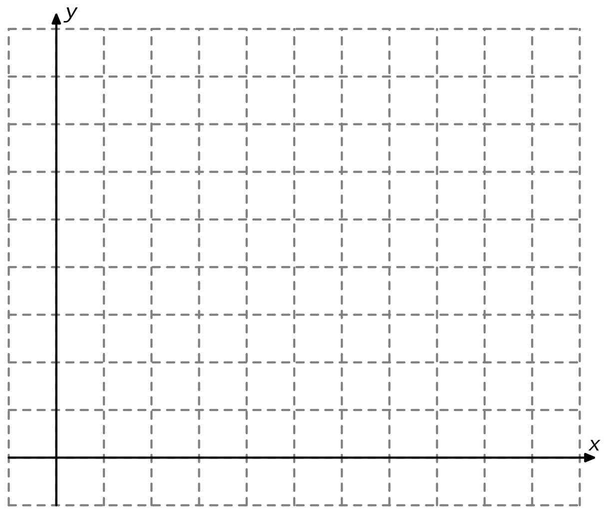
b) Muodosta kokonaislukukertoiminen toisen asteen polynomiyhtälö, jonka toinen ratkaisu on $x = 1 + \sqrt{2}$.

★ 10) Määritä a siten, että yhtälön $x^2 - 2x + a = 0$ toinen juuri tulee yhtä suureksi kuin toisen juuren neliö. Mitkä ovat juuret?

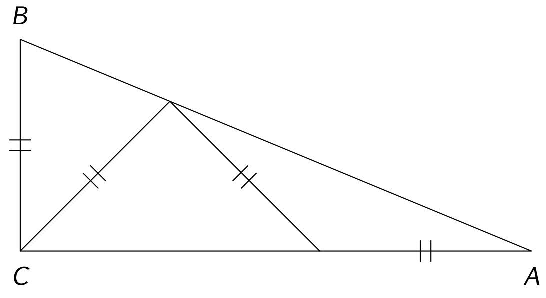
Tehtävä oli ylioppilaskirjoituksissa vuonna 1941.

11) Suorakulmion sivun pituutta merkitään kirjaimella x ja pinta-alaa kirjaimella A. Mistä yhtälöstä saadaan ratkaistua suorakulmion toisen sivun pituus y?

Piirrä ratkaisufunktion kuvaaja tilanteessa, jossa $A = 4$.



12) Kuinka suuret ovat suorakulmaisen kolmion ABC terävät kulmat, jos ABC voidaan jakaa kolmeen tasakylkiseen kolmioon kuvan tapaan?

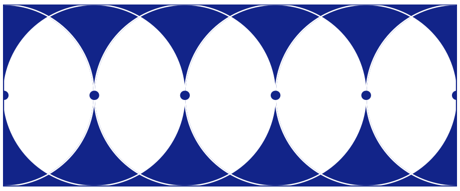


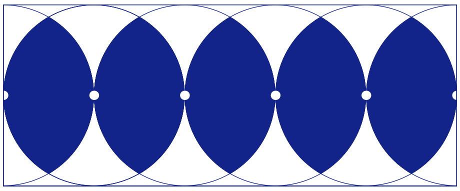
---

13) Hammastahnatuubi sisältää 75 ml hammastahnaa. Tuubin reiän halkaisija on 6 mm. Kuinka monta metriä pitkä hammastahnanauha voidaan puristaa ulos tuubista?

---

14) Keittiön lattia uusitaan. Amanda pitää enemmän vasemman puoleisesta, Jyri oikean puoleisesta mallista. He päättävät valita sen, jossa on enemmän tummaa väriä. Kumman he valitsevat? Perustele.





15) a) Arvioi eri kartoista alla olevat välimatkat. Kirjaa arviosi ylös. Selvitä sitten tarkka välimatka mittaamalla ja laskemalla se kartan mittakaavan avulla.

	Arvioitu matka	Mitattu matka
Helsinki – Lahti		
Espoo – Jyväskylä		
Maarianhamina – Turku		
Ivalo – Kittilä		
Helsinki – Nizza		
Kööpenhamina – Pariisi		

b) Teet A4-kokoisia karttoja. Minkä mittakaavan valitset karttaan, jossa näkyvät

Helsinki ja Hämeenlinna? ____________

Helsinki ja Rooma? ____________

Helsinki ja Washington? ____________

16) Pisteiden $A = (a, b)$ ja $B = (c, d)$ välisen janan keskipisteen M koordinaatit ovat

$M =$ ____________

Perustelu: ____________

____

17) Origosta $O = (0, 0)$ piirretään jana pisteeseen $A = (a, b)$. Mitkä ovat sellaisen pisteen $X = (x, y)$ koordinaatit, jolle jana AX on kohtisuorassa janaa OA vastaan ja samanpituinen?

____

Perustelu: ____________

____

18) Pisteet $C = (e, f)$ ja $D = (g, h)$ yhdistävän janan CD keskipisteestä alkaen piirretään toinen jana, joka on kohtisuorassa janaa CD vastaan ja jonka pituus on puolet janan CD pituudesta. Mitkä ovat tämän janan toisen päätepisteen koordinaatit?

____

Perustelu: ____________

____

★ 19) Mielivaltaisen kolmion ABC sivu AB otetaan ympyrän halkaisijaksi ja piirretään ympyrän puolikas kolmion ulkopuolelle, kaaren keskipistettä merkitään D:llä. Vastaavasti tehdään sivulle BC, kaaren keskipistettä merkitään E:llä. Janan AC keskipistettä merkitään F:llä. Todista, että janojen DF ja EF pituudet ovat samat ja niiden välinen kulma on suora.

Ratkaise tehtävä hyödyntäen tehtävien 16–18 tuloksia.

Ratkaise tehtävä myös geometrisella päättelyllä ilman koordinaattien käyttöä.

20) Huoneen nurkassa on teline, jossa on kolme hyllyä, joiden mitat ovat 30 cm × 40 cm. Hyllyjen väliset etäisyydet ovat samat. Kolme hämähäkkiä istuu pisteessä, jossa keskimmäinen hylly kohtaa molemmat seinät. Yksi näistä hämähäkeistä ryömii diagonaalisesti seinää pitkin ylemmän hyllyn nurkkaan. Toinen hämähäkki ryömii diagonaalisesti toista seinää pitkin alemman hyllyn nurkkaan.

Kolmas hämähäkki jää paikoilleen sinne, missä on, ja huomaa näkevänsä toverinsa $120°$ kulmassa. Määritä hyllyjen väliset (yhtä suuret) etäisyydet.

21) Tarkastellaan kahta umpinaista palloa, joista toisen keskipiste on

$$\left(0,0,\frac{21}{2}\right)$$

ja säde 6, toisen keskipiste on $(0,0,1)$ ja säde $9/2$. Kuinka monta pistettä, joilla on kokonaislukukoordinaatit, sisältyy pallojen leikkausjoukkoon?

22) Käyrän yhtälö on $y = x^2 - x^4 + 2$.

Onko piste $(1,2)$ käyrällä? ________________

Onko piste $(-1,2)$ käyrällä? ________________

Jos piste (x, y) on käyrällä, niin onko piste $(-x, y)$ käyrällä? Entä kääntäen?

Onko käyrä symmetrinen y-akselin suhteen?

23) Keksi ehto sille, että käyrä on symmetrinen x-akselin suhteen ja anna esimerkki tällaisesta käyrästä.

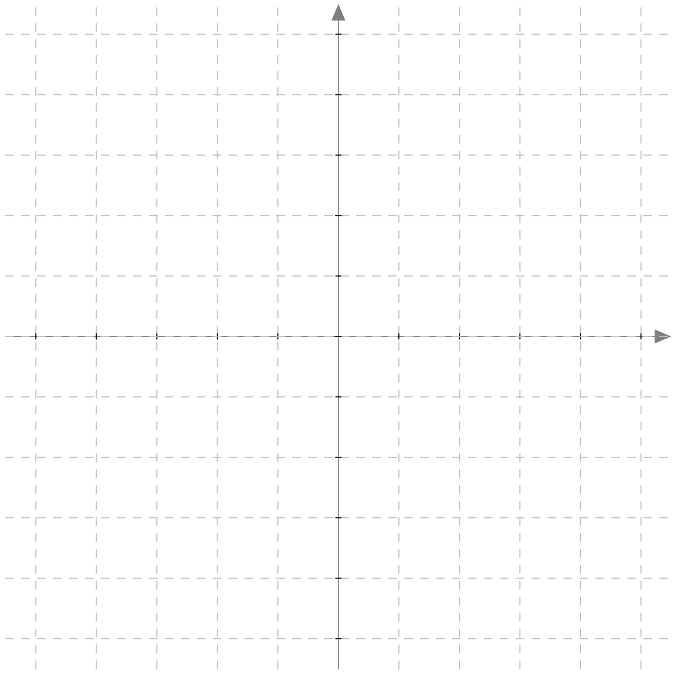
24) Keksi ehto sille, että käyrä on symmetrinen suoran $y = x$ suhteen ja anna esimerkki tällaisesta käyrästä.

25) Osoita, että käyrällä $x^2 - 4y^2 = 3$ ei ole pisteitä, joiden molemmat koordinaatit ovat kokonaislukuja.

(Kuvaajan voit piirtää Wolfram|Alphassa wolframalpha.com käskyllä `draw xx-4yy=3`.)

★ 26) Mikä piste yhtälön $y(x^2+y^2)-x(x^2+y^2)-y+x=0$ määrittelemällä käyrällä on lähinnä pistettä P, jonka koordinaatit ovat $(3, 4)$?

Piirrä kuva.



Funktiossa voi olla useita muuttujia. Esimerkiksi

$$f(a, b) = a^2 + b^2$$

on kahden muuttujan funktio. Se on siitä erikoinen, että sen arvo ei muutu, vaikka muuttujat vaihtaisivat paikkaa keskenään: $f(a, b) = f(b, a)$. Tällaista funktiota kutsutaan *symmetriseksi*. Myös esimerkiksi funktio

$$g(a, b) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

on symmetrinen, sillä

$$g(a, b) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = g(b, a).$$

Funktio

$$h(a,b) = \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$$

puolestaan ei ole symmetrinen, sillä on olemassa muuttujien a ja b arvoja, joille $h(a, b) \neq h(b, a)$. Esimerkiksi

$$h(1, 2) = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} = 2 \neq \frac{5}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{1} = h(2, 1).$$

27) Määritellään $g(x,y) = -y(x^2+y^2)+x(x^2+y^2)-y+x$. Onko g symmetrinen funktio?

PIIRTÄMISTEHTÄVIÄ

Geometrisista kuvioista näyttää löytyvän mielenkiintoisia säännönmukaisuuksia. Seuraavissa tehtävissä tutkitaan näitä piirtämällä kuvioita.

Tee piirrokset kynällä paperille käyttäen apuvälineinä harppia, viivoitinta ja suorakulmaista kolmioviivoitinta (geokolmiota tms.). Tee mahdollisimman tarkkaa työtä! Voit myös käyttää GeoGebra-ohjelmaa, jonka voit ladata omaan koneeseesi ilmaiseksi osoitteesta

https://www.geogebra.org/.

Verkkosivuilla on myös alkuunpääsyohjeita, myös suomeksi.

Tehtävät 28–32: Jos piirrät kynällä paperille, tee jokaisesta tehtävästä ainakin kolme piirrosta (lähtemällä erimuotoisista kolmioista). Jos käytät GeoGebraa, piirrä kuvio ja muunna sitä sen jälkeen siirtämällä alkuperäisen kolmion kärkiä.

28) Piirrä kolmio ja sen sivuille *keskinormaalit*, ts. suorat, jotka kulkevat jonkin sivun keskipisteen kautta ja ovat kohtisuorassa tätä sivua vastaan. Mitä väittäisit keskinormaalien leikkauspisteistä?

29) Piirrä kolmio ja sen *keskijanat,* ts. janat, jotka yhdistävät kolmion kärjen vastakkaisen sivun keskipisteeseen. Mitä väittäisit keskijanojen leikkauspisteistä?

30) Piirrä kolmio ja sen *kulmien puolittajat*. Mitä väittäisit näiden leikkauspisteistä?

31) Piirrä kolmio ja sen *korkeusjanat,* ts. janat, jotka alkavat kolmion kärjestä ja kohtaavat vastakkaisen sivun (tai sen jatkeen) kohtisuorasti. Miten näyttävät korkeusjanat tai niiden jatkeet leikkaavan toisensa?

32) Kaikissa edellä olevissa tapauksissa piirrettävät kolme suoraa tai janaa (tai niiden jatkeet) näyttävät leikkaavat samassa pisteessä. Piirrä kaikki nämä leikkauspisteet samaan kuvioon. Kolme leikkauspistettä näyttävät olevan samalla samalla suoralla, yksi sen sijaan ei välttämättä ole. Mitkä pisteistä näyttävät olevan samalla suoralla?

Tätä suoraa kutsutaan *Eulerin suoraksi* sveitsiläisen matemaatikon Leonhard Eulerin (1707–1783) mukaan.

33) Eräs mainituista neljästä leikkauspisteestä on *kolmion ympäri piirretyn ympyrän* keskipiste (so. ympyrän, joka kulkee kolmion kärkien kautta). Toinen leikkauspiste on *kolmion sisään piirretyn ympyrän* keskipiste (so. ympyrän, joka sivuaa sisäpuolelta kolmion sivuja). Piirrä ympyrät. Mitkä edellä mainituista leikkauspisteistä ovat niiden keskipisteet?

34) Valitse ympyrän kehältä jollakin tavoin kuusi pistettä ja anna näille nimiksi (missä tahansa järjestyksessä) A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 ja C_2. Piirrä janat A_1B_2 ja A_2B_1; näiden leikkauspiste olkoon R. Vastaavasti janojen B_1C_2 ja B_2C_1 leikkauspiste olkoon S sekä janojen C_1A_2 ja C_2A_1 leikkauspiste T. Piirrä kuvat ainakin kolmesta erilaisesta tilanteesta tai tutki asiaa geogebran avulla. Voivatko kaikki pisteet R, S ja T olla ympyrän sisällä? Voivatko ne kaikki olla ympyrän ulkopuolella? Ovatko pisteet samalla suoralla?

Tässä tehtävässä voi käydä niin, ettei kaikkia leikkauspisteitä ole. Näin käy, jos vastaavat suorat ovat yhdensuuntaisia.

Edellä olevissa tehtävissä näyttää tulevan esille säännönmukaisuuksia. Ovatko ne itsestään selviä? Miten voitaisiin vakuuttua siitä, että säännönmukaisuudet todellakin ovat voimassa riippumatta lähtökuvion muodosta? Geometriassa on tapana *todistaa* tämänkaltaiset asiat päättelyketjuilla vetoamalla joihinkin yksinkertaisempiin asioihin. Tällöin puhutaan *deduktiivisesta päättelystä*. Sen alkujuuret ovat jo antiikin Kreikassa kehittyneessä *Eukleideen geometriassa*. Eukleides eli 300-luvulla eaa. Aleksandriassa ja kirjoitti *Stoikheia*-nimisen (latinaksi *Elementa*, suomeksi *Alkeet*) geometrian oppikirjan, joka on vuosisatojen ajan ollut geometrian opetuksen pohjana.

Tehtävissä ilmenevät säännönmukaisuudet voidaan todistaa deduktiivisella päättelyllä. Joitakin niistä aika helpostikin. Voit yrittää keksiä perusteluja. Perustelut löytyvät myös esimerkiksi Solmun diplomisivulta Kalle Väisälän kirjasta Geometria (sivut 76–81, pykälät 72 ja 74–76).

35) *Napoleonin lause*: Lähtökohtana on jokin kolmio. Piirrä sen sivuille kolmion ulkopuolelle tasasivuiset kolmiot (ts. tasasivuiset kolmiot, joiden yhtenä sivuna on lähtökohtana olevan kolmion sivu). Määritä tasasivuisten kolmioiden keskipisteet eli keskijanojen leikkauspisteet. Piirrä kolmio, jonka kärkipisteinä ovat nämä keskipisteet.

36) Tutki edellisen tehtävän kuviota joko tekemällä useita piirroksia tai GeoGebraa käyttäen. Napoleonin lause väittää jotakin viimeksi piirretyn kolmion muodosta ja sen keskipisteestä suhteessa alkuperäisen kolmion keskipisteeseen. Mitä väitteet voisivat olla?

(Keisari Napoleon piti itseään myös matemaatikkona ja hänen sanotaan keksineen tämän lauseen. Se on kuitenkin ilmeisesti ollut tunnettu jo ennen häntä.)

Tehtävissä 37–38 A ja B ovat tason pisteitä. Kertaa tarvittaessa liitännäisyys ja vaihdannaisuus diplomin IX luvusta 1.

37) Jos merkintä $A \# B$ tarkoittaa janan AB keskipistettä, niin onko

$$A \# (B \# C) = (A \# B) \# C?$$

Anna todistus tai vastaesimerkki.

38) Merkintä $A \triangle B$ tarkoittaa pistettä, joka saadaan, kun pisteen A kautta piirretään suora, jonka kulmakerroin on 1, ja etsitään siltä piste, joka on lähinnä pistettä B. Onko voimassa $A \triangle B = B \triangle A$? Anna todistus tai vastaesimerkki.

39) Todista, että suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa.

40) Todista, että neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

41) Todista, että suunnikkaan lävistäjien pituuksien neliöiden summa on sivujen pituuksien neliöiden summa.

VERRANNOT

Kertaa tarvittaessa diplomin IX luku 3. Suhde ja verranto.

Olkoot a, b, c ja d nollasta eroavia lukuja. Yhtälöä

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

kutsutaan verrannoksi.

42) Oletetaan, että

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \ldots = \frac{u_n}{v_n} = k\ (\neq 0).$$

a) Osoita, että jos $v_1 + v_2 + \ldots + v_n \neq 0$, niin

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{v_1 + v_2 + \ldots + v_n} = k.$$

b) Entä jos $v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0$?

Olkoot a, b, c sekä p, q, r nollasta eriäviä lukuja. Merkintä

$$a : b : c = p : q : r$$

tarkoittaa, että

$$a : b = p : q \quad \text{ja} \quad b : c = q : r.$$

43) a) Määritä $a : c$, kun tiedetään, että $a : b : c = 2 : 5 : 7$.

b) Olkoon $t \neq 0$. Osoita, että $at : bt : ct = a : b : c$.

44) Muodosta $a : b : c$, kun $a : b = 2 : 3$ ja $b : c = 7 : 4$.

45) Määrittele merkintä $a : b : c : d$ ennen tehtävää 43 esitetyllä tavalla.

Muodosta $a : b : c : d$, kun $a : b = 3 : 5$, $b : c = 4 : 3$ ja $c : d = 1 : 3$.

46) Olkoot d sekä p, q ja r positiivisia lukuja. Jaa luku d kolmeen osaan x, y ja z siten, että $x : y : z = p : q : r$.

★ 47) Putkien A, B ja C virtaukset täyttäisivät yksitellen säiliön ajoissa a, b ja c. Missä ajassa säiliö täyttyy, jos siihen ohjataan samanaikaisesti virtaukset putkista

a) A ja B

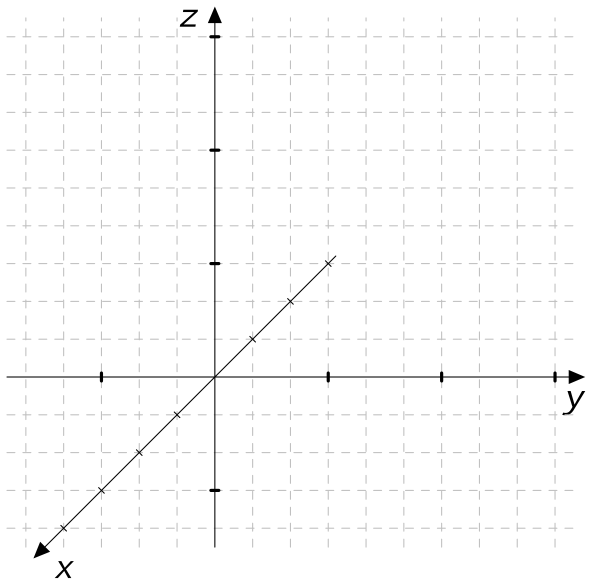
b) B ja C

c) C ja A

d) A ja B ja C

TAJUNNAN LAAJENTAMISTA

Kuvion mukaisessa kolmiulotteisessa xyz-koordinaatistossa pisteiden sijainti



ilmoitetaan lukukolmikkoina (x,y,z). Jokaista koordinaatiston pistettä vastaa lukukolmikko ja kääntäen, jokaista lukukolmikkoa vastaa koordinaatiston piste. Voimme siis samastaa koordinaatiston pisteet ja lukukolmikot.

Pisteen (x,y,z) kautta asetettu z-akselin suuntainen suora leikkaa xy-tason pisteessä $(x,y,0)$. Piste $(x,y,0)$ voidaan samastaa xy-tason pisteen (x,y) kanssa. Sanomme, että pisteen (x,y,z) *projektio* xy-tasolla on piste (x,y). Samoin voidaan menetellä yz-tason ja zx-tason kanssa. Siis xy-tasolla $z = 0$, yz-tasolla $x = 0$ ja zx-tasolla $y = 0$. Näitä tasoja kutsutaan *koordinaattitasoiksi* ja niiden yhtälöt ovat $z = 0$ (xy-taso), $x = 0$ (yz-taso) ja $y = 0$ (zx-taso).

Tutkimme xyz-koordinaatiston pistejoukkoa T, jonka koordinaatit x, y ja z toteuttavat yhtälön

$$x + 2y + 3z = 6.$$

Siis

$$T = \{(x,y,z) \mid x + 2y + 3z = 6\}.$$

Mitkä ovat joukon T ja xy-tason yhteiset pisteet, eli millä muuttujien x, y ja z arvoilla yhtälöt

$$z = 0 \quad \text{ja} \quad x + 2y + 3z = 6$$

ovat samanaikaisesti voimassa? Sijoittamalla $z = 0$ jälkimmäiseen yhtälöön saamme yhtälön $x + 2y = 6$. Yhteisinä pisteinä ovat xy-tason suoran $x + 2y = 6$ pisteet. Samalla tavalla nähdään, että T leikkaa muutkin koordinaattitasot eräitä suoria pitkin. Lukion vektoriopissa osoitetaan, että jos luvuista a, b c kaikki eivät ole nollia, niin yhtälö

$$ax + by + cz + d = 0$$

esittää jotakin (x, y, z)-koordinaatiston tasoa.

Olkoot p, q ja r nollasta eroavia lukuja. Tutkimme (x, y, z)-koordinaatiston pistejoukkoa S, jonka koordinaatit x, y ja z toteuttavat yhtälön

$$x : y : z = p : q : r.$$

Siis

$$S = \{(x, y, z) \mid x : y : z = p : q : r\}.$$

Jos $t \neq 0$, niin

$$x : y : z = p : q : r = pt : qt : rt,$$

joten joukkoon S kuuluvat kaikki pisteet (x, y, z), missä

$$x = pt, \quad y = qt, \quad z = rt, \quad t \neq 0.$$

Täten joukon S projektio xy-tasolla koostuu pisteistä (x, y), missä $x = pt$ ja $y = qt$. Eliminoimalla t näistä yhtälöistä saadaan origon kautta kulkeva suora

$$y = \frac{q}{p}x.$$

Samalla tavalla nähdään, että joukon S projektiot muillakin koordinaattitasoilla ovat origon kautta kulkevia suoria. Tästä seuraa, että (x, y, z)-koordinaatiston pistejoukko S on origon kautta kulkeva suora, josta tosin origo on poistettu.

48) Tehtävässä 46 ratkaisimme yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x + y + z = d \\ \quad x : y : z = p : q : r. \end{cases}$$

Tulkitse ratkaisu geometrisesti.

49) Laske tason

$$T = \{(x, y, z) \mid x + 2y + 3z = 6\}$$

ja koordinaattitasojen rajaaman kappaleen tilavuus.

50) Osoita, että xyz-koordinaatiston pinta

$$M = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 2 + xyz\}$$

leikkaa koordinaattitasot eräitä suoria pitkin. Pinta M ei kuitenkaan ole taso.

51) Määritä origon $(0,0,0)$ etäisyys tasosta

$$T = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 6\}.$$

2. LUKUTEORIA

Lukuteorian lähtökohtana ovat kokonaislukujen ominaisuudet kuten esimerkiksi yhteenlaskun ja kertolaskun liitännäisyys ja vaihdannaisuus. Monet lukuteoreettiset ongelmat on helppo esittää, mutta niiden ratkaiseminen saattaa olla vaikeaa ja vaatia syvällistä ja monipuolista matemaattista tietämystä analyysin, algebran tai geometrian alalta. Solmun diplomisivuilla on erillinen tehtäväkokoelma lukuteorian tehtäviä.

1) Jaa alkulukutekijöihin:

   392 = ____________ 1 701 = ____________

   3 528 = ____________

2) Jos kaksinumeroisen luvun alkuun ja loppuun liitetään luku 2, saadaan luku, joka on alkuperäinen 32-kertaisena. Määritä tämä luku.

3) Jos eräs kaksinumeroinen luku jaetaan numeroidensa summalla, saadaan osamääräksi 1 ja jakojäännökseksi 9. Jos vaihdetaan luvun numeroiden paikat ja suoritetaan sama jakolasku, saadaan osamääräksi 9 ja jakojäännökseksi 1. Mikä tämä luku on? Perustele.

4) Millä murtoluvulla on sellainen ominaisuus, että jos osoittajaa ja nimittäjää suurennetaan yhdellä, niin murtoluvun arvoksi tulee 3/4, ja jos osoittajaa ja nimittäjää pienennetään yhdellä, niin arvoksi tulee 2/3?

Lukujärjestelmät

Solmun diplomisivuilla on oheislukemiseksi Matti Lehtisen kirjoitus lukujärjestelmistä.

Tavallisesti käytämme 10-järjestelmää, jossa siis luvut ilmaistaan luvun 10 potenssien avulla. Esimerkiksi

$$23\,597{,}37 = 2\cdot 10^4 + 3\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 + 9\cdot 10^1 + 7\cdot 10^0 + 3\cdot 10^{-1} + 7\cdot 10^{-2}.$$

Luvun 10 sijalle voidaan valita muitakin luonnollisia lukuja. Tällöin merkitään kantaluku sekaannuksen välttämiseksi. Esimerkiksi 5-järjestelmän luku

$$97{,}3_5 = 9\cdot 5^1 + 7\cdot 5^0 + 3\cdot 5^{-1} = 45 + 7 + 0{,}6 = 52{,}6.$$

Tietokoneisssa käytetään 2-järjestelmää eli binäärijärjestelmää.

5) Kirjoita 10-järjestelmässä 2-järjestelmän luku

$101 =$ __________ $1101 =$ __________

6) Kirjoita 2-järjestelmässä 10-järjestelmän luvut $0, 1, 2, \ldots, 10$.

____

7) Laske 2-järjestelmässä $1 + 1111 =$ __________

Anna vastaus 10-järjestelmässä: ____________________

8) a) Valitse kaksinumeroinen luku, vaihda ensimmäisen ja viimeisen numeron paikat ja vähennä pienempi luku suuremmasta. Kokeile ensin joillain luvuilla. Saatko koskaan tulokseksi alkulukua? Päättele, että tulos ei voikaan olla alkuluku.

____

____

b) Tee sama kolminumeroisilla luvuilla.

____

____

★ 9) Palindromi tarkoittaa merkkijonoa, jonka merkkien järjestys on etu- ja takaperin sama. Taikuri pyytää sinua miettimään kolminumeroista kokonaislukua (abc), joka ei ole palindromi, muodostamaan siitä toisen luvun vaihtamalla numeroiden järjestyksen päinvastaiseksi (cba), muodostamaan näin saatujen lukujen positiivisen erotuksen ja ilmoittamaan hänelle erotuksen viimeisen numeron. Tämän jälkeen taikuri kertoo sinulle välittömästi koko erotuksen. Selvitä lukujen kymmenjärjestelmäesityksiä tutkimalla, miten temppu tehdään.

10) Osoita, että muotoa $abcabc$ oleva kokonaisluku on aina jaollinen luvuilla 7, 11 ja 13.

★ 11) Alli hämmästyttää uskomattomalla päässälaskutaidollaan, hän laskee päässä:

$$34 \cdot 34 + 37 \cdot 37 = 2525 \qquad 37 \cdot 37 + 67 \cdot 67 = 5858$$

$$72 \cdot 72 + 13 \cdot 13 = 5353 \qquad 12 \cdot 12 + 19 \cdot 19 = 505$$

Mietitäänpä, mihin Allin ilmiömäinen päässälaskutaito perustuu! Tutki kaksinumeroisia lukupareja x, y, joissa ensimmäisen luvun x kymmenten ja toisen luvun y ykkösten numeroiden summa on 10 ja ensimmäisen luvun x ykkösten ja toisen luvun y kymmenten erotus on 1. Laske $x^2 + y^2$.

Milloin saadaan yksinkertaisen kaunis tulos kuten yllä?

Miten voit tarkistaa yllä olevat laskut tämän tuloksen avulla ilman laskintaa? Vai voitko?

Parilliset ja parittomat luvut

Parillisia lukuja ovat luvun 2 monikerrat eli ne luvut, joilla jako kahdella menee tasan: $\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots$.

Parittomia lukuja ovat ne luvut, joista kahdella jakamalla tulee jakojäännökseksi 1: $\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots$.

12) Onko olemassa kokonaislukua, joka ei ole pariton eikä parillinen? Perustele!

---

13) Miksi 0 on parillinen luku? Perustele!

---

14) Kokonaisluku m jaetaan luvulla 2. Tulokseksi saadaan kokonaisluku h ja jakojäännös on 0. Kirjoita luvun m riippuvuus luvusta h yhtälönä:

Kokonaisluku n jaetaan luvulla 2. Tulokseksi saadaan kokonaisluku k ja jakojäännös on 1. Kirjoita luvun n riippuvuus luvusta k yhtälönä:

Parillinen luku m on siis yleisesti muotoa $2h$ jollain kokonaisluvulla h, pariton luku n muotoa $2k+1$ jollain kokonaisluvulla k.

15) Kokonaisluku n jaetaan luvulla 5. Tulokseksi saadaan kokonaisluku k ja jakojäännös on 3. Kirjoita luvun n riippuvuus luvusta k yhtälönä:

Kirjoita myös muita jakojäännöksiä vastaavat yhtälöt:

---

16) Käytä tässä tehtävässä edellä tehtävässä 14 esiteltyjä merkintätapoja parillisille ja parittomille luvuille.

a) Tutki, onko kahden parillisen luvun summa aina parillinen.

b) Tutki, onko kahden parillisen luvun tulo aina parillinen.

c) Entä jos molemmat luvut ovat parittomia?

d) Entä jos luvuista toinen on parillinen ja toinen pariton?

Merkitse oheiseen taulukkoon +, jos tulos on parillinen, ja −, jos tulos on pariton:

summa	parillinen	pariton
parillinen		
pariton		

tulo	parillinen	pariton
parillinen		
pariton		

Esimerkki: Osoita jokaiselle lukua 3 suuremmalle alkuluvulle p, että p^2 on luvun 12 monikerran ja ykkösen summa.

Ratkaisu. Yhtälön $p^2 = k \cdot 12 + 1$, missä k on luonnollinen luku, todistaminen on yhtäpitävää yhtälön $p^2 - 1 = k \cdot 12$ eli yhtälön $(p+1)(p-1) = k \cdot 12$ todistamisen kanssa. Huomataan myös, että luku on jaollinen luvulla 12, jos se on jaollinen luvuilla 3 ja 4.

Koska p on alkuluku ja suurempi kuin 3, niin p on pariton, mistä seuraa, että $p-1$ ja $p+1$ ovat parillisia. Siten niiden tulo on jaollinen luvulla 4.

Vielä on näytettävä, että p^2-1 on jaollinen myös luvulla 3. Jos p on alkuluku ja suurempi kuin 3, ei se ole jaollinen luvulla 3, vaan on muotoa $p = 3a+1$ tai $p = 3b+2$ jollakin kokonaisluvulla a tai b. Ensimmäisessä tapauksessa $p-1=3a$, jälkimmäisessä $p+1=3(b+1)$. Kummassakin tapauksessa tulo $(p+1)(p-1)$ on jaollinen luvulla 3.

Siis $p^2-1=(p+1)(p-1)$ on jaollinen sekä luvulla 4 että luvulla 3, joten se on jaollinen luvulla $12=3\cdot 4$. Näin $p^2=k\cdot 12+1$ jollain luonnollisella luvulla k.

17) Oletetaan, että a ja b ovat kolmella jaottomia kokonaislukuja. Osoita, että a^2-b^2 on kolmella jaollinen.

18) Todista väite: jos n on luonnollinen luku, jolle $2n+1$ on kokonaisluvun neliö, niin $n+1$ on kahden kokonaisluvun neliöiden summa.

Kolmioluvut

Diplomin VII tehtävissä käsitellään kolmiolukuja ja sieltä voit tarvittaessa kerrata perustiedot kolmioluvuista. Tarvitset myös diplomin VII tehtävien sivun 2 tehtävän 2 ratkaisua, jonka mukaan n:s kolmioluku on $n(n+1)/2$. Kaavalle löydät perustelun kuvasta diplomin VII tehtävien sivun 1 lopussa.

19) Valitse muutamia kolmiolukuja, esimerkiksi 1, 3, 6, 10. Kerro jokainen niistä luvulla 8 ja lisää 1. Millaisen tuloksen saat?

★ 20) Todista tulos yleisesti: Todista, että jos n on kolmioluku, niin $8n+1$ on jonkin kokonaisluvun neliö.

21) Mikä on 250:s kolmioluku? ____________________

22) Ovatko seuraavat luvut kolmiolukuja?

4851 ____________ 6214 ____________

3655 ____________ 7626 ____________

9702 ____________

★ 23) Loppuuko jokin kolmioluku kolmeen nollaan?

____

____

★ 24) Todista, että lukuja 16 ja 32 ei voida esittää peräkkäisten luonnollisten lukujen summana. (Summan ei siis tarvitse alkaa luvusta 1.)

____

____

____

____

Kolmiolukujen lisäksi on muitakin kuviolukuja. Neliöluvut on esitelty diplomissa VII.

Solmussa on useita kirjoituksia lukuteoriasta ja Jukka Pihkon kurssi Lukuteorian helmiä lukiolaisille. Solmun diplomisivuilla on Anne-Maria Ernvall-Hytösen laatima erillinen tehtäväkokoelma lukuteorian tehtäviä. Niistä voit jatkaa, jos haluat oppia enemmän lukutoriaa.

3. KOMBINATORIIKKA

Kombinatoriikan alkeita on aikaisemmissa diplomitehtävissä nimellä ″eri mahdollisuuksien etsiminen″. Siis kysymys on: miten ja kuinka monella eri tavalla voidaan suorittaa jokin tietty toiminta? Kombinatoriikka on lukuteorian ohella matematiikan vanhimpia aloja. Tarina kertoo, että sen alku olisi vuoden 2 200 eKr. paikkeilla, kiinalaisessa Muutosten kirjassa (I Ching), jossa esiintyvät ensi kerran maagiset neliöt sekä jang ja jin-symbolien yhdistelmien esittäminen erilaisin mystisin merkityksin tulkittuina. Esimerkkejä maagisista neliöistä eli taikaneliöistä on diplomin IV sivulla 4 tehtävässä 9.

Kombinatoriikan tuloksia käytetään ja sen kehitys saa vaikutteita esim. seuraavilta aloilta: tietokoneohjelmointiin tarvittava diskreetti matematiikka, molekyylibiologia, matemaattinen taloustiede, verkkoteoria ja kombinatorinen geometria.

Jatketaan nyt aikaisempien diplomitehtävien pohjalta ja johdetaan hiukan yleistä teoriaa.

Kahden kirjaimen jonot

1) Kirjoita kaikki jonot, jotka voit muodostaa kirjaimista a ja b

   a) ja joiden pituus on 2:

   ____

   b) ja joiden pituus on 3:

   ____

   c) ja joiden pituus on 4:

   ____

   ____

   Kuinka monta tällaista kahden kirjaimen pituista jonoa on? ________

   Entä kolmen kirjaimen pituista? ________________

   Entä neljän kirjaimen pituista? ________________

Anna yleinen sääntö: siis kuinka monta vastaavalla tavalla muodostettua jonoa on olemassa, jos jonon pituus on n, missä $n = 2, 3, \ldots$.

Onko tämä sääntö voimassa myös, jos $n = 1$? ______

2) Jos tehtävässä 1 a korvataan numerolla 0 ja b korvataan numerolla 1, saadaan binäärilukuja. Kirjoita niistä kaikki neljän merkin pituiset:

Nämä vastaavat 2-järjestelmän lukuja, esimerkiksi

$$1011 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3.$$

Siis tämä luku on 10-järjestelmässä luku $1+2+0+8 = 11$. Lukujärjestelmistä lisää kohdassa lukuteoria ja diplomien oheislukemistokirjoituksessa.

Kolmen kirjaimen jonot

3) Kirjoita kaikki jonot, jotka voit muodostaa kirjaimista a, b ja c

a) ja joiden pituus on 2:

---

b) ja joiden pituus on 3:

Kuinka monta tällaista kahden kirjaimen pituista jonoa on? ______

Entä kolmen kirjaimen pituista? ______

Anna yleinen sääntö: siis kuinka monta vastaavalla tavalla muodostettua jonoa on olemassa, jos jonon pituus on n, missä $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Miten päättelet?

Jonot, joissa kirjainten määrä on n

4) Yleistä päättelysi koskemaan n eri kirjaimen jonoja, joiden pituus on n.

Jonot ilman toistoa

5) Käytetään nyt neljää kirjainta a, b, c ja d. Tutkitaan jonoja ilman toistoa, siis sellaisia, joissa kukin kirjain esiintyy korkeintaan kerran.

   a) Kirjoita ne, joiden pituus on 1:

   Niitä on ____________

   b) Kirjoita ne, joiden pituus on 2:

   Niitä on ____________

   Perustele, että löysit kaikki mahdollisuudet:

   ---

c) Kirjoita ne, joiden pituus on 3:

Niitä on ____________

Perustele, että löysit kaikki mahdollisuudet:

d) Kirjoita ne, joiden pituus on 4:

Niitä on ____________

Perustele, että löysit kaikki mahdollisuudet:

6) Päättele vastaavasti, kuinka monta eri jonoa, joissa ei ole toistoa, voidaan muodostaa seitsemästä eri alkiosta,

a) jos jonon pituus on 3:

b) jos jonon pituus on 4:

c) jos jonon pituus on 5:

d) jos jonon pituus on 6:

e) jos jonon pituus on 7:

f) jos jonon pituus on n:

Järjestykset eli permutaatiot ja n-kertoma $n!$

Edellisen perusteella tiedetään, että viidestä eri alkiosta voidaan muodostaa viiden pituisia toistottomia jonoja $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ kappaletta. Viisi eri alkiota voidaan siis asettaa jonoon 120 eri tavalla. Tulo $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ lyhennetään 5! (sanotaan 5-kertoma). Yleisesti $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n$, missä kokonaisluku $n \geq 2$. Tekijän 1 voisi jättää pois, mutta yhdenmukaisuuden vuoksi sitä ei tehdä. Lisäksi $1! = 1$ ja sovitaan, että $0! = 1$. Tämän viimeisen sopimuksen järkevyys tulee esiin sivulla 27.

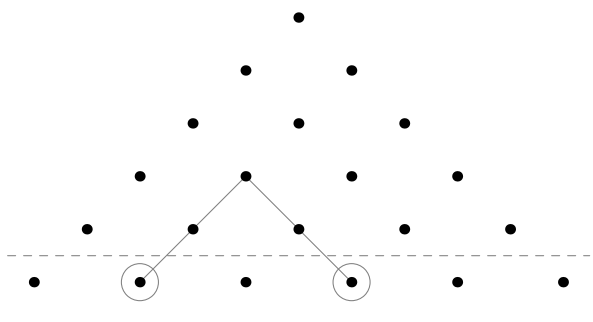
Luku $n!$ vastaa siis kysymykseen, kuinka monella eri tavalla voidaan n eri alkiota asettaa jonoon. Toisin sanottuna kuinka monta eri järjestystä eli permutaatiota niillä on.

7) Yleistä päättelysi koskemaan n kirjaimen pituisia jonoja, joita muodostettaessa on käytettävissä k eri kirjainta, missä $k > n$.

Yhdistelmät eli kombinaatiot ja binomikerroin $\binom{n}{k}$

Tilanne muuttuu, jos alkioiden järjestyksellä ei ole väliä. Esimerkiksi jonot ab ja ba vastaavat tällöin samaa tilannetta: alkioista a ja b muodostettua paria eli kahden alkion joukkoa.

8) Perustele tämän kuvion avulla tai muuten, että kuudesta alkiosta voidaan valita erilaisia pareja $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ kappaletta.



Edellinen summa on ns. viides kolmioluku, ja se voidaan laskea

$$1+2+3+4+5=\frac{5\cdot 6}{2}=15.$$

Kolmioluvuista kerrotaan enemmän kohdassa Lukuteoria.

9) Yleistä tehtävän 8 tulos n alkiolle:

Jos (erilaisten) alkioiden lukumäärä on n, voidaan niistä valita

____________________ erilaista paria.

Perustelu:

Vielä yleisempi kysymys on, kuinka monella eri tavalla voidaan n alkion joukosta valita k-alkioinen joukko. Esimerkiksi kuinka monella eri tavalla voidaan kymmenen alkion joukosta valita nelialkioinen joukko? Mieti ensin itse vastausta ja jatka lukemista vasta sitten.

Kuvitellaan tilanne, jossa n alkion joukosta valitaan k alkiota ja järjestetään ne jonoon. Tämä voidaan tehdä kahdella tavalla: Voidaan ryhtyä suoraan muodostamaan k-alkioista jonoa, jolloin sen ensimmäinen jäsen voidaan valita n tavalla, toinen $n-1$ tavalla, kolmas $n-2$ tavalla ja niin edelleen, lopulta viimeinen eli k. jäsen $n-k+1$ tavalla. Näin erilaisia jonoja havaitaan olevan $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)$ kappaletta.

Toisaalta jono voidaan muodostaa myös niin, että ensin valitaan n alkion joukosta k-alkioinen joukko ja sen jälkeen järjestetään nämä valitut alkiot jonoon. Merkitään kirjaimella x sitä lukua, joka kertoo, kuinka monella tavalla voidaan n alkion joukosta valita k-alkioinen joukko. Jokaista tällaista valintaa kohti voidaan valitut alkiot järjestää jonoon $k!$ tavalla, joten erilaisia jonoja havaitaan olevan $x\cdot k!$ kappaletta.

Kysymyksessä ovat kuitenkin samat jonot, joten saadaan yhtälö $x \cdot k! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$. Tästä saadaan ratkaistua

$$x = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

ja laventamalla luvulla $(n-k)! = (n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 2 \cdot 1$ saadaan

$$x = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 1}{k \cdot (k-1) \cdots 1 \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Tätä lukua kutsutaan binomikertoimeksi ja merkitään

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Merkintä luetaan ”n yli k:n”.

Binomikerroin eli luku

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

vastaa kysymykseen, kuinka monella eri tavalla voidaan n alkion joukosta valita k-alkioinen joukko. Toisin sanottuna kuinka monta erilaista k alkion kombinaatiota voidaan muodostaa n-alkioisesta joukosta.

Huomaa, että tapauksessa $k = n$ saadaan

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!}.$$

Koska n alkion joukosta voidaan valita n-alkioinen joukko tasan yhdellä tavalla, osoittautuu aiemmin tehty sopimus $0! = 1$ järkeväksi.

10) Laske

$\binom{5}{3} =$ ____________ $\binom{5}{2} =$ ____________

Jos tulokset olivat yhtäsuuret, oliko se sattuma? Perustele.

____

____

11) Tarkista, että tehtävän 8 tulos saadaan binomikertoimen avulla:

Näytä, että millä tahansa kokonaisluvulla $n \geq 2$ pätee

$$\binom{n}{2} = \frac{(n-1)n}{2}.$$

12) Kuinka monta erilaista neljän numeron pituista ovikoodia saadaan numeroista 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

13) Kuinka monta erilaista viiden pituista ovikoodia saadaan numeroista 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ja merkeistä $*$ ja #, jos koodin alkuun valitaan neljä numeroa ja koodin loppuun yksi merkki?

Entä, jos merkki ($*$ tai #) voi olla missä tahansa kohdassa?

Pascalin kolmio

Kirjoitetaan edellä esiintyvät binomikertoimet muotoon

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\vdots
\end{array}$$

Laskemalla nämä (muista sopimus $0! = 1$) saadaan

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Alemman rivin luvut saadaan aina laskemalla yhteen ylemmän rivin kaksi vierekkäistä lukua.

★ 14) Perustele, että $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

★ 15) Todista Pascalin kolmion symmetrisyys: kaikilla kokonaisluvuilla $0 \leq k \leq n$ pätee

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

16) Kuinka monella tavalla voidaan valita kolmen ryhmä henkilöistä Alli, Pekka, Juhana, Minna-Maaria ja Jessica?

Kuinka monella tavalla voidaan tämä ryhmä valita niin, että siinä on

a) vain tyttöjä?

b) yksi poika ja kaksi tyttöä? ____________________

c) kaksi poikaa ja yksi tyttö? ____________________

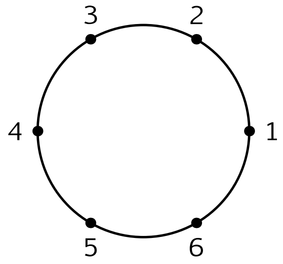
Onko muita mahdollisuuksia?

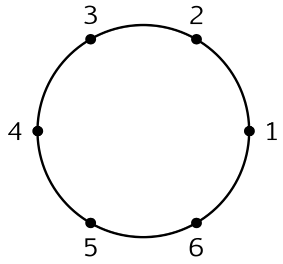
____

Kuinka monta eri mahdollisuutta on yhteensä? ____________

Todennäköisyyslaskennassa on usein selvitettävä mahdollisten tapausten lukumäärä. Näitä tehtäviä on osassa Todennäköisyys lisättynä kysymyksillä kunkin tilanteen todennäköisyydestä.

★ 17) Valitaan ympyrän kehältä kuusi pistettä ja merkitään niitä 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Yhdistetään ne pareittain janoilla. Jos kukin jana väritetään joko punaiseksi tai vihreäksi, niin tekipä sen miten hyvänsä, aina löytyy lopulta kolmio, jonka sivun ovat saman väriset. Kokeile:





Päättele, miksi on näin.

____

____

____

____

____

4. TODENNÄKÖISYYS

Todennäköisyys on epävarmuuden kuvaamista matematiikan keinoin, matemaattinen lähestymistapa antaa rakenteen todennäköisyyslaskentaan. Paitsi matematiikassa, todennäköisyys on tärkeä käsite muun muassa tilastotieteessä, luonnontieteissä ja filosofiassa.

Matematiikassa todennäköisyys ilmoitetaan nollan ja ykkösen välillä olevana lukuna. Varman tapahtuman todennäköisyys on 1, mahdottoman 0. Esimerkki klassisesta lähestymistavasta on todennäköisyys, joka jakautuu tasan toisensa poissulkevien ja yhtä todennäköisten tapahtumien kesken. Tällainen on vaikka nopanheitto, jossa kunkin noppaluvun todennäköisyys on 1/6.

Vaikka todennäköisyyslaskentaa on harjoitettu kauan, modernin todennäköisyyden matemaattisen teorian muotoili Andrei Kolmogorov vuonna 1933.

Yleisesti todennäköisyyslaskennan tavoitteena on kehittää satunnaisluonteisten ilmiöiden kuvaamiseen soveltuvia matemaattisia malleja. Tällaisten ilmiöiden lopputulosta ei saada selville laskemalla ja päättelemällä, vaan tuloksen määrää ″sattuma″. Tavoitteena on malli, jolla voitaisiin mahdollisimman hyvin ennustaa.

1) Heitetään kahta noppaa.

   a) Luettele ne mahdolliset tulokset, joissa noppien heitossa saadaan eri silmäluvut kuten esimerkiksi $(1, 2)$.

   b) Luettele ne mahdolliset tulokset, joissa noppien heitossa saadaan sama silmäluku kuten esimerkiksi $(1, 1)$.

   c) Mikä on todennäköisyys saada kahta noppaa heitettäessä nopista eri silmäluvut?

   d) Mikä on todennäköisyys saada kahta noppaa heitettäessä nopista sama silmäluku?

e) Mitkä ovat mahdolliset silmälukujen summat kahden nopan heitossa? Mitkä ovat niiden todennäköisyydet? Perustele.

Entä, ellei noppia erotella, vaan esimerkiksi tuloksia $(1,2)$ ja $(2,1)$ pidetään samoina?

2) Valitaan sattumanvaraisesti neljän numeron pituinen ovikoodi numeroista 0, 1, 2, 3, 4,5, 6, 7, 8, 9. Millä todennäköisyydellä koodi on 3333?

3) Valitaan sattumanvaraisesti viiden pituinen ovikoodi 0, 1, 2, 3, 4,5, 6, 7, 8, 9 ja merkeistä $*$ ja # niin, että koodin alkuun valitaan neljä numeroa ja koodin loppuun yksi merkki. Millä todennäköisyydellä koodi on 1234#?

4) Valitaan sattumanvaraisesti kolmen ryhmä henkilöistä Alli, Pekka, Juhana, Minna-Maaria ja Jessica. Millä todennäköisyydellä ryhmään valitaan

a) Alli, Juhana ja Minna-Maaria?

b) vain tyttöjä?

c) yksi poika ja kaksi tyttöä?

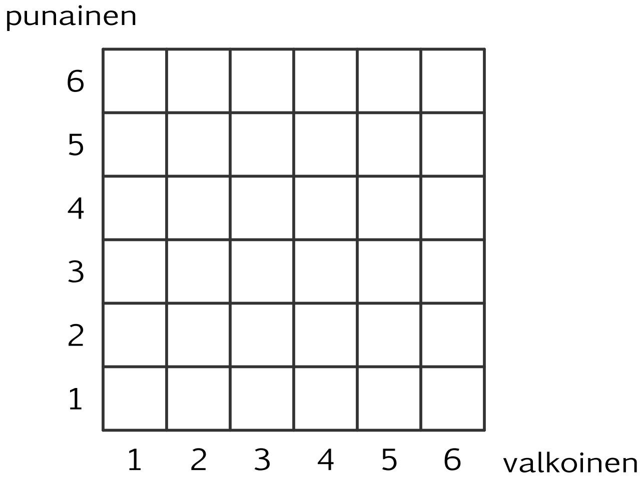
d) kaksi poikaa ja yksi tyttö?

Pitäisikö näistä joistain tulla summaksi 1?

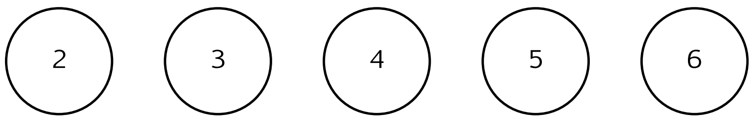
5) Heitetään valkoista ja punaista noppaa. Millä todennäköisyydellä saadaan valkoisesta kolmea pienempi ja punaisesta neljää pienempi silmäluku?

____

Voit käyttää apuna taulukkoa:



6) Pelataan niin, että otetaan näistä viidestä pallosta umpimähkään kaksi palloa ja lasketaan luvut yhteen.



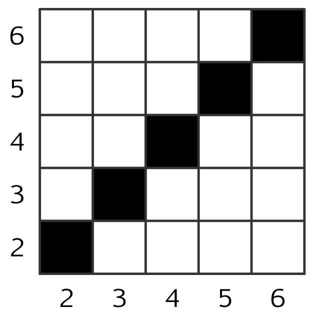
Esimerkiksi palloista 4 ja 5 saadaan tulokseksi $4+5=9$. Jos tulos on parillinen, voitat, ja jos tulos on pariton, häviät.

Mikä on todennäköisyytesi voittaa?

____

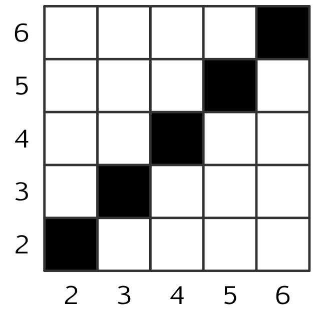
____

____



7) Pelataan niin, että otetaan edellisen tehtävän viidestä pallosta umpimähkään kaksi palloa ja kerrotaan luvut keskenään. Esimerkiksi palloista 4 ja 5 saadaan tulokseksi $4 \cdot 5 = 20$. Jos tulos on parillinen, voitat, ja jos tulos on pariton, häviät.

Mikä on todennäköisyytesi voittaa?



★ 8) Keksi edellisten tehtävien palloilla peli, jossa saat

a) voiton todennäköisyydeksi 1.

b) voiton todennäköisyydeksi 0,5.

c) voiton todennäköisyydeksi 0.

9) Pörssiin on listautunut 121 yhtiötä. Millä todennäköisyydellä valitset niistä tänä vuonna analyytikkojen parhaaksi valitseman?

Entä millä todennäköisyydellä valitset niistä parhaaksi valitun kahtena peräkkäisenä vuotena?

10) Viiden henkilön A, B, C, D ja E ryhmässä on kaksi sisarusta. Ryhmästä valitaan kolme. Millä todennäköisyydellä sisaruksista molemmat valitaan? Perustele vastauksesi.

Entä millä todennäköisyydellä vain toinen sisaruksista valitaan?

Entä millä todennäköisyydellä kumpaakaan sisaruksista ei valita?

Onko muita mahdollisuuksia?

11) Kuinka monta erilaista lippua voidaan tehdä, jos käytössä on viisi väriä (P, S, K, V, M) eivätkä mitkään kaksi vierekkäistä raitaa saa olla samanväriset?

Mikä on todennäköisyys, että saat lipun, jonka värit ovat järjestyksessä KVM, jos otat yhden lipuista sattumanvaraisesti?

★ 12) Tutkimuksen mukaan noin yksi kolmesta kilpailijasta käyttää kiellettyä piristettä. Testillä yritetään tutkia, onko kilpailija käyttänyt kiellettyä piristettä. Positiivinen testitulos tarkoittaa, että ainetta on käytetty, ja negatiivinen tulos tarkoittaa, ettei ainetta ole käytetty. Puolueettoman selvityksen mukaan yksi kymmenestä testauksesta antaa väärän tuloksen.

a) Kuinka monta prosenttia kilpailun osallistujista saa kilpailusta poistamiseen johtavan positiivisen tuloksen?

b) Kuinka monta prosenttia ei jää kiinni piristeen käytöstä (saa negatiivisen tuloksen testissä)?

c) Kuinka monta prosenttia poistetaan kilpailusta väärän testituloksen vuoksi?

d) Kuinka monta prosenttia positiivisen tuloksen saaneista todella on käyttänyt ainetta?

★ 13) Tutkimuksen mukaan noin yksi kolmesta kilpailijasta käyttää kiellettyä piristettä. Testillä yritetään tutkia, onko kilpailija käyttänyt kiellettyä piristettä. Positiivinen testitulos tarkoittaa, että ainetta on käytetty, ja negatiivinen tulos tarkoittaa, ettei ainetta ole käytetty. Puolueettoman selvityksen mukaan yksi kymmenestä testauksesta antaa väärän tuloksen.

a) Millä todennäköisyydellä kilpailija saa kilpailusta poistamiseen johtavan positiivisen tuloksen?

---

b) Millä todennäköisyydellä kilpailija ei jää kiinni piristeen käytöstä (saa negatiivisen tuloksen testissä)?

---

c) Millä todennäköisyydellä kilpailija poistetaan kilpailusta väärän testituloksen vuoksi?

---

d) Millä todennäköisyydellä positiivisen tuloksen saanut kilpailija todella on käyttänyt ainetta?

★ 14) Lintuemon hautomasta munasta kehittyy lintu todennäköisyydellä P, joka riippuu munan massasta m seuraavasti

$$P = \begin{cases} 0, & \text{jos munan massa } m \leq 150 \text{ g;} \\ \dfrac{m-150}{k+m-150}, & \text{jos munan massa } m > 150 \text{ g.} \end{cases}$$

Tässä $k \geq 0$ on vakio.

a) Päättele, että $0 \leq P \leq 1$.

---

b) Kun $k > 0$ on vakio, niin jokaista mahdollista munan massaa m vastaa yksi todennäköisyys eli todennäköisyys P on munan massan funktio $P(m)$. Luonnostele funktion P kuvaaja tilanteessa, jossa $k = 150$.

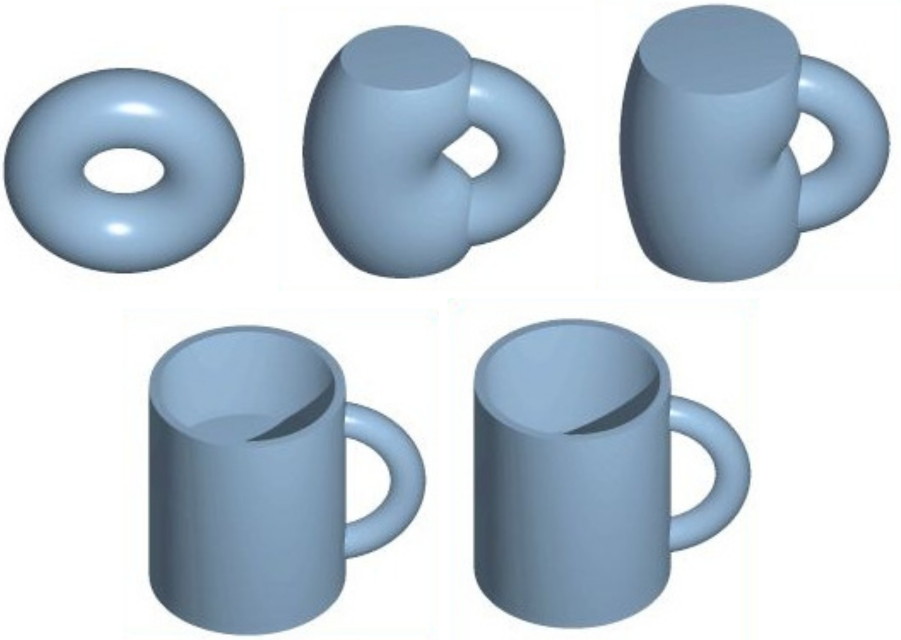
c) Luonnostele funktion P kuvaaja tilanteessa, jossa $k = 50$.

d) Luonnostele funktion P kuvaaja tilanteessa, jossa $k = 1150$.

5. TOPOLOGIA

Topologia on matematiikan alue, joka käsittelee pistejoukkoja ja niiden ominaisuuksia, jotka säilyvät ″jatkuvissa muunnoksissa″. Tyypillisiä tällaisia ominaisuuksia ovat alueen yhtenäisyys ja alueessa mahdollisesti olevien ″reikien″ lukumäärä. Sen sijaan monet tärkeät geometriset käsitteet kuten etäisyydet ja kulmat eivät ole topologisia käsitteitä. Topologiassa kaksi oliota ovat samanlaiset, jos ne voidaan muuttaa toisikseen jatkuvalla muunnoksella. Tästä johtuu sanonta ″topologi on matemaatikko, joka ei erota kahvikuppia munkkirinkilästä″.

1) Tee savesta munkkirinkilän muotoinen kappale. Ala muuntaa sitä jatkuvasti savea muovaamalla kahvikupin muotoon.



Tämän jatkuvan muunnoksen voi tehdä myös käänteiseen suuntaan ja palauttaa ″kahvikupin″ jatkuvasti muuntaen munkkirinkilän muotoiseksi kappaleeksi.

Möbiuksen nauha

2) Ota sakset sekä liimaa tai teippiä, ja leikkaa esimerkiksi A3-kokoisesta paperista 3 cm levyisiä suorakulmioita. Piirrä keskiviiva pituussuunnassa jokaiseen tällaiseen liuskaan, liuskan toiselta puolelta sinisellä ja toiselta puolelta punaisella.

A. Ota liuska. Pidä paperiliuskan molemmista päistä kiinni ja liimaa päät yhteen.
B. Ota liuska ja kierrä sen toista päätä puoli kierrosta eli 180 astetta ennen kuin liimaat liuskan päät yhteen. Saat Möbiuksen nauhan. Seuraa keskiviivoja ja vertaa tapauksia A ja B. Totea, että Möbiuksen nauhalla on vain yksi puoli.
C. Ota liuska ja kierrä sen toista päätä koko kierros eli 360 astetta ennen kuin liimaat liuskan päät yhteen.
D. Ota liuska ja kierrä sen toista päätä puolitoista kierrosta eli 540 astetta ennen kuin liimaat liuskan päät yhteen.

Tutki liuskoista liimaamiasi lenkkejä ja ennusta, mitä tapahtuu, jos lenkki leikataan keskiviivaa pitkin. Tee leikkaukset ja taulukoi tuloksesi. Merkitään alkuperäisen liuskan pituutta L:llä.

180° kiertojen lukumäärä:	**Tapaus:**
0	
1	
2	
3	

Leikkauksen tulos:	**Tapaus:**
kaksi erillistä lenkkiä	
yksi kiertyvä lenkki	
kahden erillisen kiertyvän lenkin ketju	

Yhden lenkin pituus:	**Tapaus:**
L	
$2L$	

6. SOLMUTEORIA

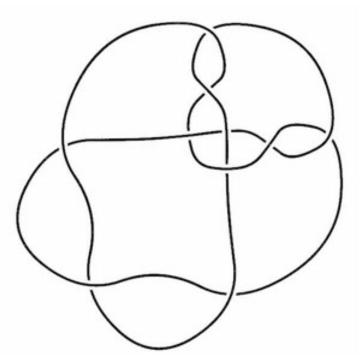
Matematiikkalehti Solmussa on Vadim Kulikovin kirjoitus ″Solmuja taiteessa ja matematiikassa″:

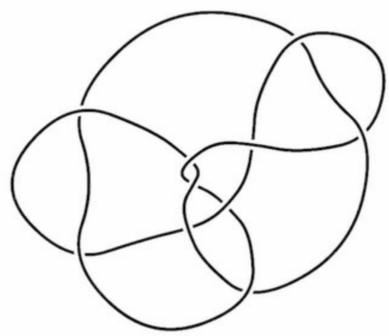
″Why knot?

Modernien matemaattisten ongelmien ratkaisut ovat usein saavuttamattomia suurelle yleisölle. Jopa kuuluisa geometrialuonteinen Poincarén hypoteesin ratkaisu on sisällöltään varmaankin pysynyt mysteerinä monelle uutisten seuraajalle. Ratkaisusta puhumattakaan usein jo itse ongelman ymmärtäminen vaatii matemaattista ammattitaitoa. Toisaalta jos ongelma on yksinkertaisesti esitettävissä, sen ratkaisukin on yleensä pinnallinen. Pinnallisella en tarkoita välttämättä helppoa, vaan sellaista, joka ei tuo mukanaan uusia menetelmiä, ideoita tai syvällisempää ymmärrystä. Solmuteoria on mielestäni erilainen. Se on kuin matematiikan poikkileikkaus useassa suunnassa. Solmuteorian ongelmat ovat helposti esitettävissä: alkuvaiheessa ei tarvita juuri minkäänlaisia matemaattisia valmiuksia. Sen sijaan solmuteorian ongelmien ratkaisuja löytyy usein vain syvällisistä matematiikan osa-alueista kuten algebra, topologia, differentiaaligeometria, analyysi, verkkoteoria ja jopa laskettavuuden teoria ja tietojenkäsittelytiede. Niin kuin matematiikalla yleensä, solmuteorialla on sovelluksia; sovellusaloja ovat mm. biologia (DNA- ja proteiinimolekyylien solmuttuminen) ja fysiikka.″

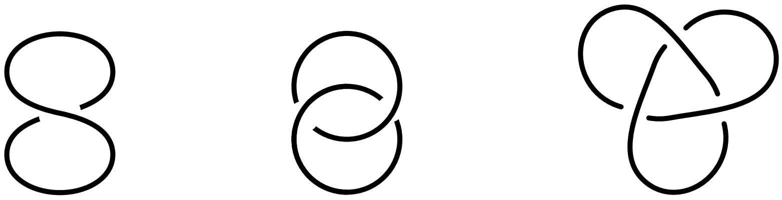
Lue kirjoitus kokonaan osoitteessa `solmu.math.helsinki.fi/2010/2`

Alla on kuva kahdesta solmusta, jotka olivat monta kymmentä vuotta solmujen listalla eri solmuina, vaikka vuonna 1974 osoittautui, että ne ovatkin sama solmu.





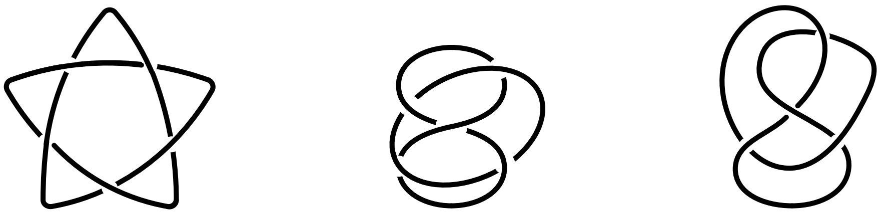
1) Solmi nämä solmut erivärisistä langoista.



Kuinka monta eri langanpätkää tarvitset?

Mitkä solmuista voit esittää tasossa ilman, että solmu leikkaa itsensä?

2) Solmi nämä solmut erivärisistä langoista.



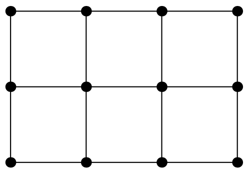
Kuinka monta eri langanpätkää tarvitset?

Mitkä solmuista voit esittää tasossa ilman, että solmu leikkaa itsensä?

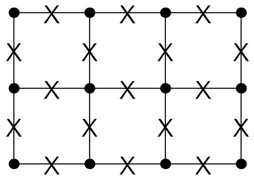
Tee oma solmu:

Kelttiläiset solmut

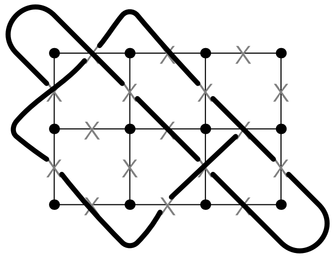
Varhaiskeskiajala Brittein saarilla eläneet keltit käyttivät solmuja koristeluun. Kelttien solmujen piirtämiseen voi käyttää pohjana tason verkkoa. Otetaan esimerkiksi verkko



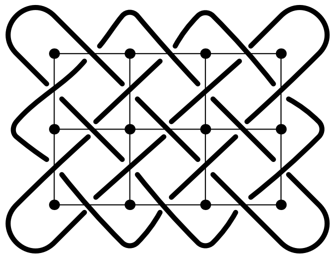
Piirretään jokaiseen särmään pieni risteys



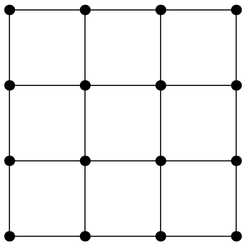
Lähdetään yhdistämään kynällä risteyksiä lähimpiin niin, että joka toisessa risteyksessä kuljetaan ”alta” ja joka toisessa ”päältä”:

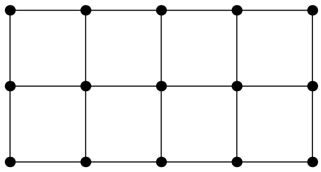


Lopputulos on tällainen:

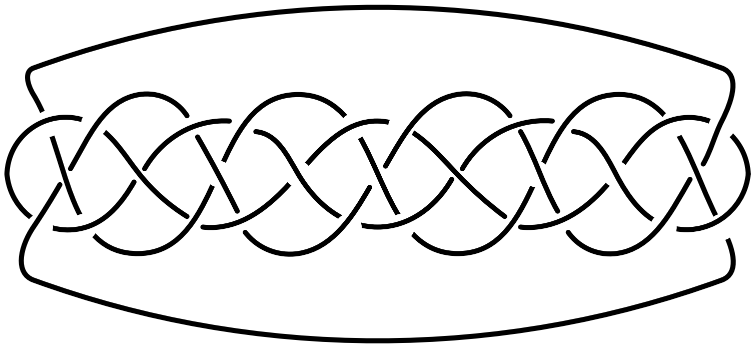


3) Tee kelttiläinen solmu seuraaviin tason verkkoihin. Kuinka monta eri osaa eli komponenttia näissä on? Jos teet solmut myös langoilla, käytä eri osiin eri värejä.





4) Kuinka monta eri osaa on tässä solmussa?



5) Tee oma kelttiläinen solmu: