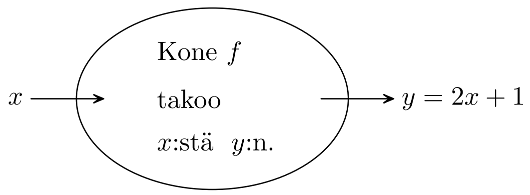
Funktiosta

Funktio on matematiikan tärkeimpiä käsitteitä. Seuraavassa selvitetään yksinkertaisten esimerkkien avulla mikä se on.

Funktion määritelmä

Funktio $y = f(x)$ voidaan ajatella ”koneeksi”, joka nielaisee syötteen x ja putkauttaa ulos tuotteen y. Olisi havainnollisempaa esittää se muodossa $x \mapsto f(x) = y$, mutta merkintä $y = f(x)$ on vakiintunut yleismaailmalliseksi. Syötettä x sanotaan *muuttujaksi*, tuotetta y *funktion arvoksi* ja f kuvaa symbolisesti sitä, mitä ”kone” tekee syötteelle. Jos $y = f(x) = 2x + 1$, niin ”kone” kertoo syötteen kahdella ja lisää tuloon ykkösen. Jos syöte on vaikkapa $1 - a$, niin tuote on $2(1 - a) + 1$, mikä sievenee luvuksi $3 - 2a$.



Funktio merkitään toisinaan täydellisemmin

$$f : A \to B,\ y = f(x),$$

jolloin A tarkoittaa syötteiden muodostamaa joukkoa ja B joukkoa, johon tuotteet sisältyvät. Ellei joukkoa A ilmoiteta, sen oletetaan olevan laajin mahdollinen jossa f on määritelty. *Funktio tekee tuotteen jokaisesta joukkoon A kuuluvasta syötteestä ja mistään syötteestä ei tule kahta tai useampaa eri tuotetta.* Funktion arvo on siis yksikäsitteisesti määrätty. ”Funktiokone” ei välttämättä ole laskulauseke eikä syötteiden ja tuotteiden tarvitse olla lukuja. Joskus niitä kutsutaan *pisteiksikin*, vaikka niillä ei olisi mitään tekemistä alkeisgeometrian pisteiden kanssa; tuote y on syötteen x *kuvapiste* ja f *kuvaa* x:n y:ksi. Seuraavassa syötteet ja tuotteet ovat reaalilukuja ja funktiot laskutoimitusten avulla määriteltyjä. Funktion kuvaaja on xy-tason pistejoukko $\{(x,f(x)) \mid x \in A\}$.

Esim. Jos $y = g(x) = \sqrt{x}$, niin g tekee x:stä sen neliöjuuren. Muuttuja on rajattava ei-negatiivisten reaalilukujen joukkoon, sillä negatiivisilla luvuilla ei ole neliöjuurta. Esimerkiksi

$$g(0) = \sqrt{0} = 0, \quad g(4) = \sqrt{4} = 2 \quad \text{ja} \quad g(\pi^2) = \sqrt{\pi^2} = \pi.$$

Harjoituksia

1. Olkoon $f(x) = 2x + 1$.

a) Piirrä funktion f kuvaaja.

b) Millä x:n arvolla $f(x) = 11$?

c) Sievennä $f(2 - a)$.

d) Sievennä $f(f(2 - a))$.

2. Olkoon $g(x) = \sqrt{x}$.

a) Piirrä funktion g kuvaaja.

b) Millä x:n arvolla $g(x) = 11$?

c) Millä muuttujien a ja b arvoilla yhtälö $g(a + b) = g(a) + g(b)$ toteutuu?

d) Tutki laskimella miten erotus $g(x + 2) - g(x)$ muuttuu, kun x kasvaa.

3. Olkoon $h(x) = x^{-1}$.

a) Piirrä funktion h kuvaaja.

b) Millä x:n arvolla $h(x) = 11$?

c) Sievennä $h(h(x))$.

d) Päättele kuvaajan perusteella mitkä luvut ovat käänteislukuaan pienempiä.

4. Funktio u toteuttaa kaikilla a:n ja b:n arvoilla yhtälön

$$u(a + b) = u(a) + u(b), \quad \text{ja} \quad u(2) = 4.$$

a) Osoita, että $u(0) = 0$.

b) Määritä $u(1)$.

c) Määritä $u(-1)$.

d) Määritä $u(n)$, missä n on kokonaisluku.

$\star$**5.** Funktio v toteuttaa kaikilla a:n ja b:n arvoilla yhtälön

$$v(a + b) = v(a)v(b).$$

a) Osoita, että jos $v(0) \neq 0$, niin $v(0) = 1$.

b) Osoita, että jos $v(0) = 0$, niin $v(a) = 0$ kaikilla a:n arvoilla.

c) Osoita, että jos $v(0) \neq 0$, niin $v(a)$ ja $v(-a)$ ovat toistensa käänteislukuja.

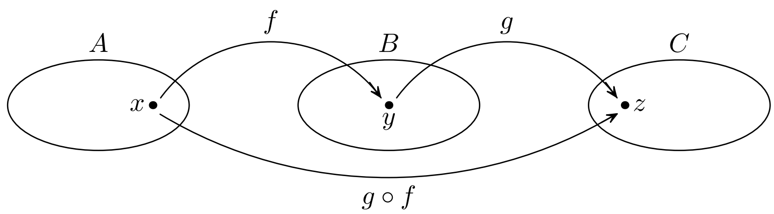
Funktioiden yhdistämisestä

Funktion syötteenä voi myös olla toisen funktion tuote. Tällöin nämä kaksi funktiota muodostavat *yhdistetyn funktion*. (Ks. teht. 1. d-kohta ja 3. c-kohta.)

Esim. 1 Jos $f(x) = 2x + 1$ ja $g(x) = \sqrt{x}$, niin

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{2x+1} \quad \text{ja} \quad f(g(x)) = 2g(x) + 1 = 2\sqrt{x} + 1.$$

Olkoot $f : A \to B$ ja $g : B \to C$ funktioita. Niiden yhdiste $g \circ f$



määritellään kuvion merkintöjä käyttäen: Jos $z = g(y)$ ja $y = f(x)$, niin

$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

Merkintä $g \circ f$ luetaan ”g pallo f”.

Jotkut funktiot voidaan yhdistää myös itsensä kanssa. Edellisessä esimerkissä muodostimme funktiot $g \circ f$ ja $f \circ g$. Täydennämme esimerkkiä muodostamalla lisäksi funktiot $f \circ f$ ja $g \circ g$.

Esim. 2 Jos $f(x) = 2x + 1$ ja $g(x) = \sqrt{x}$, niin

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{2x+1}, \\
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = 2g(x) + 1 = 2\sqrt{x} + 1, \\
(f \circ f)(x) &= f(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2(2x+1) + 1 = 4x + 3, \\
(g \circ g)(x) &= g(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Pallo-operaation vaihdannaisuus edellyttäisi, että $g \circ f$ ja $f \circ g$ olisivat samat *kaikissa* tapauksissa. Nähty esimerkki osoittaa, ettei näin ole. Jatkossa nähdään tapauksia, joissa ne kuitenkin ovat samat.

Harjoituksia

6. Muodosta

a) $(f \circ g)(x)$,

b) $(g \circ f)(x)$,

kun $f(x) = 3 + 2x$ ja $g(x) = x^2$.

7. Muodosta

a) $(f \circ g)(x)$,

b) $(g \circ f)(x)$,

kun $f(x) = 1 + 2x$ ja $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

8. Olkoon $f(x) = x(1 - x)$ ja $g(x) = 1 - x$. Osoita, että $f \circ g = f$.

9. **a)** Miten määritellään kolmen funktion yhdiste $f \circ g \circ h$? Onko aina voimassa $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$?

b) *Identtinen funktio* $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ei tee muuttujalle mitään: $\mathrm{id}(x) = x$ kaikilla x:n arvoilla. Sen *rajoittuma* ei-tyhjälle joukolle A merkitään id_A. Siis $\mathrm{id}_A : A \to A$, $\mathrm{id}_A(x) = x$. Osoita, että jos $f : A \to B$, niin $f \circ \mathrm{id}_A = f$ ja $\mathrm{id}_B \circ f = f$.

$\star$**10.** Merkitään $f_1 = f$, $f_2 = f \circ f$, $f_3 = f \circ f \circ f$, ja yleisesti

$$f_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n\,\text{kpl}}.$$

Olkoon

$$f(x) = \frac{1 + x}{1 - x}.$$

a) Muodosta funktiot f_2, f_3, f_4 ja f_5. Määritä reaalilukujoukko A, jossa nämä funktiot ovat määriteltyjä. (Jakajan oltava $\neq 0$.)

b) Muodosta funktiot f_{52}, f_{53}, f_{54} ja f_{55}.

Käänteisfunktioista

Tehtävässä 9b tutustuimme identtiseen funktioon, joka ei tee muuttujalle mitään. Eräät funktiot

$$f : A \to B \quad \text{ja} \quad g : B \to A$$

kumoavat toistensa vaikutuksen, jolloin niiden yhdiste on identtinen funktio. Esimerkiksi jos x on ei-negatiivinen,

$$f(x) = x^2 \quad \text{ja} \quad g(x) = \sqrt{x},$$

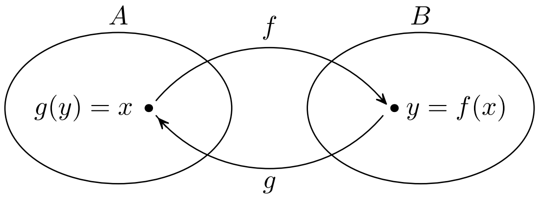
niin

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = x = \mathrm{id}_A(x)$$

ja

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)^2 = \sqrt{x}^2 = x = \mathrm{id}_A(x),$$

missä A on ei-negatiivisten reaalilukujen joukko. Tällaisia funktioita sanotaan toistensa *käänteisfunktioiksi*.



Kuvion mukaan, jos yhtälöt $y = f(x)$ ja $x = g(y)$ ovat yhtäpitävät, niin

$$(g \circ f)(x) = x = \mathrm{id}_A(x) \quad \text{ja} \quad (f \circ g)(y) = y = \mathrm{id}_B(y)$$

kaikilla A:han kuuluvilla x:n ja B:hen kuuluvilla y:n arvoilla. Niinpä $g \circ f$ on identtisen funktion rajoittuma A-joukolle ja $f \circ g$ on identtisen funktion rajoittuma B-joukolle:

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \quad \text{ja} \quad f \circ g = \mathrm{id}_B.$$

Jos $f : A \to B$ ja $g : B \to A$ ovat toistensa käänteisfunktioita, niin yhtälöt $y = f(x)$ ja $x = g(y)$ ovat yhtäpitäviä, mikä antaa keinon käänteisfunktion määrittämiseksi: on vain ratkaistava x yhtälöstä $y = f(x)$.

Esim. 1 Funktion $y = f(x) = 1 - 2x$ käänteisfunktio on $x = g(y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y$, sillä

$$y = 1 - 2x, \text{ jos ja vain jos } x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}y.$$

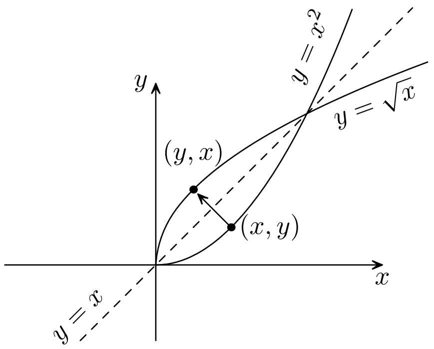
Esim. 2 Edellä totesimme, että jos muuttuja x rajataan ei-negatiivisiin lukuihin, niin funktiot

$$y = f(x) = x^2 \quad \text{ja} \quad x = g(y) = \sqrt{y}$$

ovat toistensa käänteisfunktioita. Näillä muuttujien arvoilla yhtälöt $y = x^2$ ja $x = \sqrt{y}$ ovat samat, ja niiden kuvaajat yhtyvät koordinaatistossa. Vaikka kuvaajat yhtyvät, eroavat funktiot f ja g siinä, että f:n syötteiden joukko on ei-negatiivinen x-akseli ja g:n syötteiden joukko puolestaan ei-negatiivinen y-akseli. Funktiot halutaan kuitenkin esittää niin, että syötteet ovat x-akselilla, mikä edellyttää muuttujien paikkojen vaihtamista g-funktion osalta. Kirjoittamalla se muotoon

$$y = g(x) = \sqrt{x},$$

teemme samalla koordinaatistossa geometrisen kuvauksen $(x, y) \mapsto (y, x)$, mikä merkitsee peilausta suoran $y = x$ suhteen. Tällöin f:n kuvaajana oleva



origosta alkava paraabelinpuolikas peilautuu suoran $y = x$ suhteen neliöjuurifunktion kuvaajaksi. Kuvaajat ovat siis symmetrisiä tämän suoran suhteen. Tämä on yleisesti voimassa: funktion ja sen käänteisfunktion kuvaajat muodostavat suoran $y = x$ suhteen symmetrisen kuvion.

Myös eräät funktioiden kuvaajia yleisemmät käyrät ovat symmetrisiä suoran $y = x$ suhteen. Esimerkiksi, jos origokeskisen r-säteisen ympyrän yhtälössä

$$x^2 + y^2 = r^2$$

vaihdetaan x:n ja y:n paikkaa keskenään, niin yhtälö pysyy samana. (Selvitä itsellesi Pythagoraan lauseen avulla, miksi tämä yhtälö esittää origokeskisen r-säteisen ympyrän kehäpisteitä.) Käyrillä voi olla muitakin symmetria-akseleita. Tehtävässä 15 keskitytään sellaisiin käyriin, joiden symmetria-akselit näkyvät helposti käyrien yhtälöistä kuvioita piirtämättä.

Harjoituksia

11. Määritä funktion $f(x) = 2 + 3x$ käänteisfunktio g ja tarkista vastaus muodostamalla yhdistetyt funktiot $f \circ g$ ja $g \circ f$. Piirrä molempien funktioiden kuvaajat sekä suora $y = x$ samaan koordinaatistoon.

12. Määritä funktion $h(x) = x^{-1}$ käänteisfunktio. Piirrä kuvaajat sekä suora $y = x$ samaan koordinaatistoon.

13. Olkoon

$$g(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Muodosta funktio $f \circ f$. Mitä voit tuloksen perusteella todeta funktion kuvaajasta suoran $y = x$ suhteen?

14. Millä x:n arvoilla funktio $y = f(x) = \sqrt{1+x}$ on määritelty? Muodosta f:n käänteisfunktio, ja piirrä molempien kuvaajat sekä suora $y = x$ samaan koordinaatistoon. Piirtämisessä voit käyttää graafista laskinta tai Wolfram|Alphaa (`http://www.wolframalpha.com`) kirjoittamalla sen hakukenttään ”plot y = sqrt(1 + x)”.

⋆15.
a) Määritä ympyrän kaikki symmetria-akselit. Miten yksi niistä poikkeaa kaikista muista?

b) Millä kertoimia a ja b koskevalla ehdolla suora $ax + by = c$ on suoran $y = x$ suhteen symmetrinen? Mikä tällöin on suorien asema toisiinsa nähden?

c) Mitkä käyristä

i) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$,
ii) $(1 - x)(1 - y) = 3$,
iii) $x^3 - 3xy + y^3 = 0$,
iv) $x^2 + 2y^2 - 2x - y = 0$,
v) $x^3 + y^3 = 1$,
vi) $x^4 + y^4 = 1$.

ovat symmetrisiä suoran $y = x$ suhteen? Onko käyrillä v) ja vi) muita symmetria-akseleita (x, y)-tasossa? (Kuvaajat, ks. teht. 14.)

Symmetrisistä funktioista

Kahden muuttujan funktion

$$w(a,b) = a^2 + b^2$$

syötteet ovat xy-tason pisteitä ja tuotteet reaalilukuja. Funktion arvo ei muutu, vaikka a ja b vaihtaisivat paikkaa keskenään. Tällaista funktiota kutsutaan *symmetriseksi*. Funktiolla w on toinenkin erikoinen ominaisuus. Nimittäin yhtälö

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

voidaan kirjoittaa muotoon

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab,$$

mistä näkyy, että a^2+b^2 voidaan laskea, jos $a+b$ ja ab ovat tunnettuja. Lukuja a ja b ei siis tarvitse erikseen tuntea. Summaa $a+b$ ja tuloa ab kutsutaan *symmetrisiksi peruslausekkeiksi*. Voidaan todistaa, että jokainen algebrallisilla laskutoimituksilla (peruslaskutoimitukset ja juurenotto) rakennettu a:n ja b:n symmetrinen *algebrallinen funktio* voidaan muuntaa muotoon, jossa muuttujat esiintyvät ainoastaan symmetrisinä peruslausekkeina.

Esimerkiksi

$$f(a,b) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = f(b,a) \quad \text{ja}$$

$$f(a,b) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} = \frac{a+b}{ab},$$

joten f on symmetrinen ja näemme, että sen arvo tunnetaan, jos symmetristen peruslausekkeiden arvot ovat tunnettuja. Hieman hankalampi esimerkkifunktio on $g(a,b) = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Se on selvästi symmetrinen, sillä

$$g(a,b) = \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{b} + \sqrt{a} = g(b,a), \quad \text{ja}$$

$$g(a,b) = \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}},$$

joten myös sen arvon laskeminen palautuu symmetrisiin peruslausekkeisiin. Funktio

$$h(a,b) = \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$$

ei ole symmetrinen, sillä on olemassa muuttujien a ja b arvoja, joille

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \neq \frac{1}{b} + \frac{2}{a}.$$

Jos $a+b=\alpha$ ja $ab=\beta$, niin a ja b voidaan ratkaista yhtälöparista

$$\begin{cases} a+b &= \alpha \\ ab &= \beta, \end{cases}$$

mutta symmetrisen algebrallisen funktion arvon laskemisen kannalta se ei ole välttämätöntä. Muuttujan b eliminointi yhtälöparista johtaa toisen asteen yhtälöön $a^2 - \alpha a + \beta = 0$, minkä ratkaiseminen opitaan lukiossa.

Harjoituksia

16. Mitkä funktioista

$$\textbf{a)}\ u_1(a,b) = a^2b + ab^2 + 2,$$

$$\textbf{b)}\ u_2(a,b) = a^3b^2 + (ab)^3,$$

$$\textbf{c)}\ u_3(a,b) = a\sqrt{b} + b\sqrt{a},$$

ovat symmetrisiä? Laske sellaisiksi toteamiesi arvot, kun $a+b=\alpha$ ja $ab=\beta$.

17. Määritä funktion $t(a,b) = a^3 + b^3$ arvo, kun $a+b=5$ ja $ab=6$.

18. Määritä funktion $s(a,b) = |a-b|$ arvo, kun $a+b=\sqrt{7}$ ja $ab=1$.

19. Määritä funktion

$$p(a,b) = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

arvo, kun $a+b=3$ ja $ab=-2$.

20. Olkoot m ja n positiivisia kokonaislukuja. Onko funktio

$$q(a,b) = a^m b^n + a^n b^m$$

symmetrinen?

Useammankin muuttujan funktio voi olla symmetrinen. Seuraavassa rajoitutaan kolmen muuttujan funktioihin. Voidaan todistaa, että muuttujien a,b,c symmetriset algebralliset funktiot voidaan muuntaa muotoon, jossa muuttujat esiintyvät ainoastaan symmetrisinä peruslausekkeina $a+b+c$, $ab+bc+ca$ ja abc. Summa ja tulo ovat selvästi symmetrisiä, ja kaksittaisten tulojen summan symmetrisyys käsitellään harjoitustehtävänä.

Harjoituksia

21. Muuttujat a ja b voidaan järjestää jonoon kahdella eri tavalla, joten kahden muuttujan funktion g symmetrisyyden toteamiseksi riittää, että muodostetaan $g(a,b)$ ja $g(b,a)$. Jos g on kolmen muuttujan a,b,c funktio, niin mitkä funktion arvot on muodostettava mahdollisen symmetrisyyden toteamiseksi?

22. Osoita, että lauseke $ab + bc + ca$ symmetrinen.

23. Olkoot $a + b + c = 6$, $abc = 2$ ja $ab + bc + ca = 9$. Laske lausekkeen

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, **b)** $a^2 + b^2 + c^2$

arvo.

24. Onko funktio $f(a,b,c) = ab^2 + bc^2 + ca^2$ symmetrinen?

25. Kolmen muuttujan a,b,c funktiota g kutsutaan *kiertosymmetriseksi*, jos sen arvo pysyy samana, kun muuttujat vaihtavat paikkaa kaavion

$$a \to b \to c \to a$$

mukaisesti.

a) Onko kolmen muuttujan symmetrinen funktio kiertosymmetrinen?

b) Mitkä funktion arvot on laskettava kiertosymmetrisyyden toteamiseksi?

c) Osoita, että edellisen tehtävän funktio f on kiertosymmetrinen.

d) Onko funktio

$$g(a,b,c) = a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a}$$

i) symmetrinen, ii) kiertosymmetrinen?

e) Onko funktio

$$h(a,b,c) = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

i) symmetrinen, ii) kiertosymmetrinen?

26. Suorakulmaisen särmiön kolmen erisuuntaisen särmän pituuksien summa on 9 ja särmiön pinta-ala on 32. Määritä särmiön avaruuslävistäjän pituus. Voidaanko särmiön tilavuus laskea annettujen tietojen avulla?

Ohjeita ja vastauksia

1. **a)** Kuvaaja on suora $y = 2x + 1$.

b) $x = 5$.

c) $5 - 2a$.

d) $11 - 4a$.

2. **a)** Ks. kuvio sivulla 6.

b) $x = 121$.

c) $a = 0$ tai $b = 0$.

d) Erotus näyttää pienenevän x:n kasvaessa.

3. **a)** Kirjoita Wolfram|Alphan (`http://www.wolframalpha.com`) hakukenttään ”draw y=1/x”.

b) $x = \frac{1}{11}$.

c) $h(h(x)) = x$.

d) Jos $0 < x < 1$ tai $x < -1$, niin $x < \frac{1}{x}$.

4. **a)** $u(0) = u(0 + 0) = u(0) + u(0) = 2u(0)$, joten $u(0) = 0$.

b) $u(1) = 2$.

c) $u(-1) = -2$.

d) $u(n) = 2n$.

⋆5. **a)** $v(0) = v(0 + 0) = v(0)v(0) = v(0)^2$. Koska $v(0) \neq 0$, on $v(0) = 1$.

b) Jos $v = (0) = 0$, niin kaikilla $x \in \mathbb{R}$

$$v(x) = v(0 + x) = v(0)v(x) = 0 \cdot v(x) = 0.$$

c) $1 = v(0) = v(-a + a) = v(-a)v(a)$.

6. **a)** $(f \circ g)(x) = 3 + 2x^2$.

b) $(g \circ f)(x) = (3 + 2x)^2$.

7. **a)** $(f \circ g)(x) = x = \mathrm{id}(x)$.

b) $(g \circ f)(x) = x = \mathrm{id}(x)$.

8. Koska $f(x) = x(1-x)$ ja $g(x) = 1-x$, on

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= g(x)(1-g(x)) \\ &= (1-x)(1-(1-x)) \\ &= (1-x)x \\ &= x(1-x) = f(x),\end{aligned}$$

eli $f \circ g = f$.

9. **a)** $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$. Liitäntälaki $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ on selvästi voimassa.

b) $(f \circ \mathrm{id}_A)(x) = f(\mathrm{id}_A(x)) = f(x)$ ja $(\mathrm{id}_B \circ f)(x) = \mathrm{id}_B(f(x))) = f(x)$.

⋆10. $f_1 = f$, $f_2 = f \circ f$, jne..

$$\begin{aligned}f_2(x) &= f(f(x)) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)} = \frac{1+\frac{1+x}{1-x}}{1-\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1-x+1+x}{1-x-1-x} = -\frac{1}{x} \\ f_3(x) &= f(f_2(x)) = \frac{1+f_2(x)}{1-f_2(x)} = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x+1}, \\ f_4(x) &= f(f_3(x)) = \frac{1+\frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x-1}{x+1}} = \frac{x+1+x-1}{x+1-x+1} = x = \mathrm{id}_A(x), \text{ joten} \\ f_5(x) &= f(f_4(x)) = f(x), \text{ jne.}\dots\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että $f_{52} = f_0 = \mathrm{id}$, $f_{53} = f_1$, $f_{54} = f_2$ ja $f_{55} = f_3$.
Joukko $A = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \pm 1,\, x \neq 0\}$.

11. Käänteisfunktio on $g(x) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x$.

12. Ks. 3. tehtävän vastaus.

13. Koska

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \frac{x+1+x-1}{x+1-x+1} = x = \mathrm{id}(x),$$

on f on itsensä käänteisfunktio, joten sen kuvaaja on symmetrinen suoran $y = x$ suhteen.

14. Käänteisfunktio on $g(x) = x^2 - 1$.

⋆15. **a)** Kaikki halkaisijat ovat symmetria-akseleita. Ympyrä on symmetrinen myös keskipisteen kautta kulkevan normaalinsa suhteen.

b) Ehto toteutuu, jos $a = b \neq 0$. Tällöin suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

c) Suoran $y = x$ suhteen symmetrisiä ovat i), ii), iii), v) ja vi). Käyrällä v) ei ole koordinaattitasolla muita symmetria-akseleita. Käyrä vi) on symmetrinen suorien $y = \pm x$ sekä koordinaattiakselien suhteen. Myös käyrällä iv) on kaksi symmetria-akselia, mutta niiden löytäminen edellyttää lukion matematiikkaa.

16. Symmetrisiä funktioita ovat u_1 ja u_3

$$\begin{aligned}
u_1(a,b) &= 2 + (a+b)ab = 2 + \alpha\beta. \\
u_3(a,b) &= a\sqrt{b} + b\sqrt{a} = \sqrt{(a\sqrt{b} + b\sqrt{a})^2} \\
&= \sqrt{a^2b + ab^2 + 2ab\sqrt{ab}} \\
&= \sqrt{ab(a+b) + 2ab\sqrt{ab}} \\
&= \sqrt{\alpha\beta + 2\beta\sqrt{\beta}}.
\end{aligned}$$

17. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, joten

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 5^3 - 3 \cdot 6 \cdot 5 = 35.$$

18. $s(a,b) = |a-b| = |b-a| = s(b,a)$, joten s on symmetrinen funktio.

$$\begin{aligned}
s(a,b) = |a-b| &= \sqrt{|a-b|^2} \\
&= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab} \\
&= \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} \\
&= \sqrt{7-4} = \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

19. Selvästi $p(a,b) = p(b,a)$ ja

$$p(a,b) = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^4+b^4}{(ab)^2}.$$

Laskemalla $(a+b)^4$ havaitaan, että

$$\begin{aligned} a^4+b^4 &= (a+b)^4 - 4(ab)(a+b)^2 + 2(ab)^2 \\ &= 3^4 - 4\cdot(-2)\cdot 3^2 + 2\cdot(-2)^2 = 161. \end{aligned}$$

Jos siis $a+b=3$ ja $ab=-2$, niin $p(a,b) = \frac{161}{4}$.

20. Funktio q on symmetrinen, koska kaikilla $a,b \in \mathbb{R}$

$$q(b,a) = b^m a^n + b^n a^m = a^m b^n + a^n b^m = q(a,b).$$

21. $g(a,b,c)$, $g(a,c,b)$, $g(b,a,c)$, $g(b,c,a)$, $g(c,a,b)$ ja $g(c,b,a)$.

22. Kaikki keskinäiset vaihdot $a \leftrightarrow b$, $b \leftrightarrow c$, $c \leftrightarrow a$ pitävät lausekkeen samana, joten se on symmetrinen.

23. Tiedetään, että $a+b+c=6$, $abc=2$ ja $ab+bc+ca=9$.

a) $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{9}{2}.$$

b) $$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 18.$$

24. Ei, sillä esimerkiksi

$$f(a,c,b) = ac^2+cb^2+ba^2 \neq ab^2+bc^2+ca^2 = f(a,b,c).$$

25. **a)** On.

b) $g(a,b,c)$, $g(b,c,a)$ ja $g(c,a,b)$.

c) Selvästi $g(a,b,c) = g(b,c,a) = g(c,a,b)$.

d) ja **e)** i) Ei. ii) On.

26. Avaruuslävistäjän pituus on 7, ks. teht. 23. b-kohta. Jos särmät ovat a, b ja c, niin oletuksista seuraa, että $a+b+c=9$ ja $ab+bc+ca=16$. Kaksi kolmesta perussymmetrisestä lausekkeesta siis tunnetaan, mutta kolmatta eli särmiön tilavuutta esittävää lauseketta abc ei voi laskea näiden kahden avulla. Yhtälöparilla $a+b+c=9$, $ab+bc+ca=16$ on ääretön määrä positiivisia ratkaisuja.