Kombinaatio-oppia

Kuinka monta erilaista lottoriviä ja pokerikättä on olemassa? Lotossa arvotaan 7 palloa 39 pallon joukosta. Pokerikäsi on viiden kortin osajoukko 52 korttia käsittävästä pakasta. Nämä ongelmat voidaan pelkistää kysymykseksi, kuinka monella tavalla n-alkioisesta joukosta voidaan valita k alkiota käsittävä osajoukko. Niitä kutsutaan *n-alkioisen joukon k-kombinaatioiksi.* Asiaa voidaan, ehkä yllättäen, lähestyä polynomien kertolaskun kautta. Mietimme aluksi, miten $(1+x)^4$ lasketaan. On selvää, että tulos on neljännen asteen polynomi, eli

$$(1 + x)^4 = C_0^{(4)} + C_1^{(4)}x + C_2^{(4)}x^2 + C_3^{(4)}x^3 + C_4^{(4)}x^4,$$

missä kertoimet $C_0^{(4)}, \ldots C_4^{(4)}$ ovat toistaiseksi tuntemattomia. Ne löydetään suorittamalla kertolaskut

$$(1 + x)(1 + x)(1 + x)(1 + x).$$

Osittelu- ja vaihdantalakien kautta päädytään siihen, että ”kaikki kerrotaan kaikilla” ja näin saadut tulot lasketaan yhteen. Vakiotermin $C_0^{(4)}$ saamiseksi valitsemme kaikista neljästä sulkulausekkeesta nolla kappaletta termiä x, siis ykkösen jokaisesta, ja kerromme ne keskenään.

$$C_0^{(4)} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Neljän x:n joukosta voidaan valita nolla kappaletta termiä x ainoastaan yhdellä tavalla, ts. 4-alkioisesta joukosta voidaan valita 0-alkioinen osajoukko vain yhdellä tavalla. Nolla-alkioinen joukko on *tyhjä joukko* ja se merkitään symbolilla $\emptyset$. Ensimmäisen asteen termin laskemiseksi on valittava yhdestä sulkulausekkeesta x ja lopuista ykköset. Se voidaan suorittaa neljällä eri tavalla. Saamme neljä tuloa

$$x \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1, \quad 1 \cdot x \cdot 1 \cdot 1, \quad 1 \cdot 1 \cdot x \cdot 1, \quad 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x,$$

ja niiden summa $C_1^{(4)}x = 4x$. Termin kerroin 4 ilmoittaa kuinka monella tavalla neljän alkion joukosta voidaan valita yksi. Toisen asteen termin laskemiseksi on valittava kahdesta sulkulausekkeesta x ja kahdesta muusta ykkönen. Saamme kuusi tuloa

$$x \cdot x \cdot 1 \cdot 1, \quad x \cdot 1 \cdot x \cdot 1, \quad x \cdot 1 \cdot 1 \cdot x, \quad 1 \cdot x \cdot x \cdot 1, \quad 1 \cdot x \cdot 1 \cdot x, \quad 1 \cdot 1 \cdot x \cdot x$$

joiden summa $C_2^{(4)}x^2 = 6x^2$. Kerroin 6 ilmoittaa kuinka monella tavalla neljän alkion joukosta voidaan valita kahden alkion osajoukko. Kolmannen asteen termin voimme päätellä. Siihen on valittava kolme kappaletta termiä x

neljän joukosta, mikä luonnollisesti on sama kuin jos valittaisiin yksi ykkönen neljän ykkösen joukosta. Täten $C_3^{(4)} = C_1^{(4)}$ ja kolmannen asteen termi $C_3^{(4)}x^3 = 4x^3$. Samalla tavalla saamme $C_4^{(4)}x^4 = x^4$. Siis

$$C_0^{(4)} = 1, \quad C_1^{(4)} = 4, \quad C_2^{(4)} = 6, \quad C_3^{(4)} = 4, \quad C_4^{(4)} = 1,$$

ja nämä kertoimet ilmoittavat, kuinka monella tavalla 4-alkioisesta joukosta voidaan valita 0-, 1-, 2-, 3-, ja 4-alkioinen osajoukko. Edellä nähty pätee yleisemminkin. *Polynomin*

$$p_n(x) = (1 + x)^n = C_0^{(n)} + C_1^{(n)}x + \ldots + C_k^{(n)}x^k + \ldots + C_n^{(n)}x^n$$

kerroin $C_k^{(n)}$ on n-alkioisen joukon k-kombinaatioiden lukumäärä.

Onko nyt sitten lottorivien ja pokerikäsien lukumäärien selvittämiseksi laskettava $(1 + x)^{39}$ ja $(1 + x)^{52}$? Ei aivan, sillä on olemassa muitakin tapoja lukujen $C_k^{(n)}$ laskemiseksi. Johdamme aluksi kertoimien yhteenlaskuun perustuvan laskusäännön. Selvästi

$$C_0^{(n)} = C_n^{(n)} = 1 \quad \text{kaikilla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Havaitsemme edelleen, että

$$C_k^{(n)} = C_{n-k}^{(n)} \quad \text{kaikilla} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

sillä $(n-k)$-alkioisia ja k-alkioisia osajoukkoja on luonnollisesti sama määrä. Kuten tapauksessa $n = 4$ nähtiin, kertoimet muodostavat keskikohdan suhteen symmetrisen rivin. Oletetaan nyt, että tunnemme n:nnen rivin luvut $C_k^{(n)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Seuraavan rivin luvut $C_k^{(n+1)}$ saadaan kirjoittamalla $p_{n+1}(x)$ muotoon

$$\begin{aligned}
p_{n+1}(x) &= (1 + x)^{n+1} \\
&= (1 + x)(1 + x)^n = (1 + x)p_n(x) \\
&= (1 + x)(C_0^{(n)} + C_1^{(n)}x + \ldots + C_{k-1}^{(n)}x^{k-1} + C_k^{(n)}x^k + \ldots + C_n^{(n)}x^n).
\end{aligned}$$

Tuloksesta nähdään, että

$$C_k^{(n+1)}x^k = x \cdot C_{k-1}^{(n)}x^{k-1} + 1 \cdot C_k^{(n)}x^k = \left(C_{k-1}^{(n)} + C_k^{(n)}\right)x^k,$$

joten

$$C_k^{(n+1)} = C_{k-1}^{(n)} + C_k^{(n)}.$$

Tämän yhteenlaskusäännön avulla voimme laskea rivin luvut, kun edellisen rivin luvut tunnetaan. Rivit on tapana kirjoittaa kolmion muotoiseksi kaavioksi

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & C_0^{(0)} & & & & & & \\
 & & & & & C_0^{(1)} & & C_1^{(1)} & & & & & \\
 & & & & C_0^{(2)} & & C_1^{(2)} & & C_2^{(2)} & & & & \\
 & & & C_0^{(3)} & & C_1^{(3)} & & C_2^{(3)} & & C_3^{(3)} & & & \\
 & & C_0^{(4)} & & C_1^{(4)} & & C_2^{(4)} & & C_3^{(4)} & & C_4^{(4)} & & \\
 & C_0^{(5)} & & C_1^{(5)} & & C_2^{(5)} & & C_3^{(5)} & & C_4^{(5)} & & C_5^{(5)} & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}
$$

Yhteenlaskusäännön avulla sitä voi jatkaa rajattomasti ja sen 39. riviltä paljastuu sitten lottorivienkin lukumäärä. Niin pitkälle ei kuitenkaan kannata käsin laskea, sillä luvut kasvavat alaspäin mentäessä nopeasti hyvin suuriksi. Ohjelmointia harrastavalle kaavion muodostaminen johonkin rajaan asti on mukava haaste. Lukuarvoin rivit 0 – 6 näyttävät seuraavilta:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Kaaviota kutsutaan *Pascalin kolmioksi*, koska Blaise Pascal (1623 – 1662) tutki sen ominaisuuksia, mutta se on paljon vanhempi. Bagdadissa elänyt matemaatikko al-Karaji (953 – 1029) laski sen avulla binomin potensseja. Hän lienee myös ensimmäisenä esittänyt induktioon pohjautuvia todistuksia eräiden lukujonojen summiin liittyen. Myös persialainen (nykyisin Iran) matemaatikko, runoilijanakin arvostettu Omar Khaijam (1048 – 1131) tunsi lukukolmion ja käytti sitä algebrallisissa töissään. Kiinalainen matemaatikko Tšu-Shih-Tšieh (1260 – n.1320) julkaisi vuonna 1303 samaisen kaavion, jonka avulla voi kirjoittaa binomin potenssit 2 – 8. Hän todennäköisesti siteerasi aikaisemmin binomin potensseja käsitellyttä maanmiestään Jia Xian'ia (n.1010 – n.1070), ja otsikoi kirjoituksensa muotoon "Vanhan menetelmän kuvio, jossa on seitsemän kerrottua neliötä." Ilmeisesti silkkitietä pitkin kulkivat mausteiden ja kankaiden lisäksi myös ideat suuntaan ja toiseen. (Historialliset tiedot ovat lähteistä [1], [2] ja [3].)

Muinaisille matematiikoille luvut $C_k^{(n)}$ olivat nimenomaan binomin potenssien kertoimia ja niitä kutsutaankin *binomikertoimiksi*. Pascal oli yksi todennäköisyyslaskennan perustajista ja hänelle nämä luvut merkitsivät myös kombinaatioiden lukumääriä.

Johdamme lopuksi helpoimman tavan binomikertoimien laskemiseksi. Siihen tarvitsemme *tuloperiaatetta*, joka käy selväksi seuraavasta esimerkistä: *Kuinka monta asuyhdistelmää voidaan muodostaa, kun käytettävissä on kaksi pipoa ja kolme huivia?* Pipoja ja huiveja on nyt niin vähän, että pystymme luettelemaan kaikki yhdistelmät:

$$(p_1, h_1),\ (p_1, h_2),\ (p_1, h_3),\ (p_2, h_1),\ (p_2, h_2),\ (p_2, h_3).$$

Asun valinta voidaan ajatella jaetun kahdeksi vaiheeksi. Ensin valitaan pipo. Siihen on 2 mahdollisuutta. Sitten valitaan huivi. Siihen on 3 mahdollisuutta. Valinta voidaan suorittaa niin monella tavalla kuin mikä on vaiheiden suorittamismahdollisuuksien lukumäärien tulo, tässä tapauksessa $2 \cdot 3 = 6$. Vaiheita voi olla mikä määrä tahansa. Sovellamme tuloperiaatetta seuraavassa.

Kuinka monella tavalla k alkiota voidaan asettaa jonoon? Ensimmäinen alkio voidaan valita k eri tavalla, toinen alkio $(k-1)$ eri tavalla, kolmas alkio $(k-2)$ eri tavalla jne. … toiseksi viimeinen alkio 2 eri tavalla ja viimeinen alkio ainoastaan yhdella tavalla. Erilaisia jonoja on täten

$$k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \;=\; k!$$

kappaletta. Merkintä $k!$ luetaan ”k-kertoma”. Esimerkiksi $0! = 1$, sillä tyhjästä joukosta saadaan yksi jono, nimittäin tyhjä jono. Myös $1! = 1$.

Kuinka monella tavalla n-alkioisesta joukosta voidaan poimia k alkiota käsittävä jono ja miten $C_k^{(n)}$ lasketaan? Jono-ongelma voidaan ratkaista kahdessa vaiheessa. Ensin valitaan k alkiota käsittävä osajoukko. Se voidaan tehdä $C_k^{(n)}$ eri tavalla. Sitten järjestetään valitut k alkiota jonoon. Se voidaan tehdä $k!$ eri tavalla. Tuloperiaatteen mukaan k-jonoja saadaan $C_k^{(n)} \cdot k!$ kappaletta. Voimme ajatella tämän toisinkin. Ensimmäinen alkio voidaan valita n eri tavalla, toinen alkio $(n-1)$ eri tavalla jne. …, ja lopulta k:s alkio $(n-k+1)$ eri tavalla. Tuloperiaatteen mukaan jono voidaan muodostaa $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ eri tavalla. Binomikertoimen määrittämiseksi saamme yhtälön

$$C_k^{(n)} \cdot k! \;=\; n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1),$$

josta

$$C_k^{(n)} \;=\; \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!} \;=\; \binom{n}{k}. \qquad (1)$$

Lottosarakkeiden lukumäärä on nyt helppo laskea:

$$C_7^{(39)} = \binom{39}{7} = \frac{39!}{7! \cdot (39-7)!} = \frac{39!}{7! \cdot 32!} = 15380937.$$

Laskimissa on valmiit ohjelmat kertoman ja binomikertoimen laskemiseksi. Pokerikäsien lukumäärä lasketaan TI-laskimilla näppäilemällä 52 nCr 5. Tulos on 2598960.

Tehtäviä

1. Yhtälössä (1) esitetyn merkintätavan avulla

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{k}x^k + \ldots + \binom{n}{n}x^n.$$

Kirjoita tätä soveltaen vastaavalla tavalla $(u+v)^n$.

2. Osoita, että

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{k} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

3. Osoita yhtälössä (1) annetun kaavan avulla, että

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \quad \text{ja} \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

4. Kuinka monta ”4-oikein” lottoriviä on olemassa. (Neljä oikein lotossa tarkoittaa riviä, jossa on neljä oikeaa ”palloa” ja kolme väärää ”palloa”.)

5. Yksitoista rastia käsittävä lottosysteemi sisältää $\binom{11}{7} = 330$ riviä. Jos tällaisen systeemin numeroista viisi osuu oikeiden lottonumeroiden joukkoon, niin kuinka monta kappaletta **a)** 5-oikein, **b)** 4-oikein riviä systeemiin sisältyy?

6. Vakioveikkaussarakkeessa on 13 kohdetta, joissa kussakin on kolme vaihtoehtoa, 1, $\times$ ja 2.

a) Kuinka monella eri tavalla sarake voidaan täyttää, kun jokaisesta kohteesta voi valita ainoastaan yhden vaihtoehdon?

b) Kuinka monella tavalla sarakkeen voi täyttää siten, että siinä on 10 oikein veikattua kohdetta?

7. Eräänä vuonna valtakunnallisessa lukion matematiikkakilpailussa oli seuraava kysymys: Pascalin kolmion eräällä rivillä on kolme peräkkäistä lukua x, y ja z siten, että $x : y : z = 1 : 2 : 3$. Määritä luvut ja niiden paikat.

8. Osoita, että

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{k}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Ohje: Huomaa, että $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$.

9. Kuinka monella tavalla vakioveikkaussarakkeen voi täyttää siten, että kuudessa kohteessa on ykkönen, kolmessa kohteessa $\times$ ja neljässä kohteessa kakkonen?

10. Kuinka monella tavalla 20 euron kolikkoa voidaan jakaa kolmelle henkilölle?

Historiaa

[1] C. Boyer, *Tieteiden kuningatar, matematiikan historia osa 1*, Art House 2000.

[2] M. Lehtinen, *Matematiikan historia*, http://matematiikkalehtisolmu.fi/2000/mathist/

[3] MacTutor History of Mathematics archive http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html

Vastauksia ja ohjeita

1. Kirjoita $(u+v)^n$ aluksi muotoon $u^n\left(1+\frac{v}{u}\right)^n$.

2. Sijoita ykköstehtävässä olevaan kaavaan $x=1$.

3.

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

ja

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{k\cdot n!}{k!(n-k+1)!} + \frac{(n-k+1)\cdot n!}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{k\cdot n! + (n+1)\cdot n! - k\cdot n!}{k!((n+1)-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} = \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

4. Neljä ”oikeaa” palloa seitsemästä voidaan valita $\binom{7}{4}$ eri tavalla ja kolme ”väärää” palloa 32:sta $\binom{32}{3}$ eri tavalla. Tuloperiaatteen mukaan ko. rivejä on

$$\binom{7}{4}\binom{32}{3} = 35\cdot 4960 = 173600.$$

5. **a)** Viiden oikean numeron lisäksi on valittava kaksi väärää numeroa; se tapahtuu $\binom{6}{2}=15$ eri tavalla.

b) Viiden oikean numeron joukosta valitaan neljä $\binom{5}{4}=5$ eri tavalla ja kuuden väärän numeron joukosta kolme $\binom{6}{3}=20$ eri tavalla. Neljä-oikein-rivejä on siten $5\cdot 20=100$ kappaletta.

6. **a)** Jokainen kohde voidaan täyttää 3 eri tavalla, joten tuloperiaatteen mukaan mahdollisuuksia on

$$\underbrace{3\cdot 3\cdot 3\cdot\ldots\cdot 3}_{13\,\text{kpl}} = 3^{13} = 1594323.$$

b) Oikein veikatut kohteen voidaan valita $\binom{13}{10}=286$ eri tavalla. Kolmen väärin veikatun kohteen merkit voidaan valita $2\cdot 2\cdot 2=8$ eri tavalla. Mahdollisuuksia on siis $286\cdot 8=2288$ kappaletta.

7. Yhtälöt

$$\binom{n}{k-1} : \binom{n}{k} = \frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad \binom{n}{k} : \binom{n}{k+1} = \frac{2}{3}$$

pelkistyvät muotoon

$$\frac{k}{n-k+1} = \frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad \frac{k+1}{n-k} = \frac{2}{3}$$

ja edelleen yhtälöpariksi

$$\begin{cases} n &= 3k-1 \\ 2n &= 5k+3 \end{cases}$$

jonka ratkaisu on $n = 14$, $k = 5$. Kysytyt binomikertoimet ovat

$$\binom{14}{4} = 1001, \quad \binom{14}{5} = 2002, \quad \binom{14}{6} = 3003.$$

8. Identiteetistä $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$ nähdään välittömästi, että $C_n^{(2n)}x^n$ on lukujen

$$C_k^{(n)}\,x^k \cdot C_{n-k}^{(n)}\,x^{n-k} = \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}x^n, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

summa. Tulos seuraa (teht. 3 alkuosa) tästä.

9. Kolmestatoista kohteesta voidaan kuudelle ykköselle valita paikat $\binom{13}{6}$ eri tavalla. Sen jälkeen on seitsemän paikkaa jäljellä. Niistä voidaan valita paikat kolmelle rastille $\binom{7}{3}$ eri tavalla. Loput neljä paikkaa menevät kakkosille $\binom{4}{4}$ eri tavalla. Tuloperiaatteen mukaan saamme

$$\binom{13}{6} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{4} = 1716 \cdot 35 \cdot 1 = 60060$$

erilaista veikkausriviä.

10. Kolikot jakaantuvat lukumääräisesti, kun ne kahden erotusmerkin kera

$$\underbrace{\circledast\circledast\circledast\circledast\circledast\ddagger\circledast\circledast\circledast\circledast\circledast\circledast\circledast\ddagger\circledast\circledast\circledast\circledast\circledast\circledast\circledast\circledast}_{22\,\text{paikkaa}}$$

sijoitetaan 22-paikkaiseen lokerikkoon. Jakoja on se määrä, kuinka monella tavalla 22-paikkaisesta lokerikosta voidaan valita 2 paikkaa erotusmerkeille, siis $\binom{22}{2} = 231$ kappaletta.