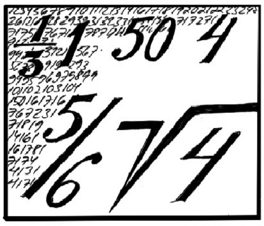

Lukujärjestelmistä

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Mitä ovat lukujärjestelmät ja miksi?

Aika suuri osa matematiikkaa – vaikkei toki lähimainkaan kaikki – liittyy jollain tavalla laskemiseen ja lukuihin. Lukujakin on monenlaisia, mutta kaikki luvut perustuvat jollain tavalla niihin lukuihin, joilla ilmoitetaan lukumääriä: ihmisellä on kaksi silmää, koiralla neljä ja tuhatjalkaisella (ehkä?) tuhat jalkaa. Rahapussissa voi olla kymmenen euroa ja viikossa seitsemän päivää. Lukumäärää ilmaisevia lukuja on ruvettu kutsumaan *luonnollisiksi luvuiksi*.

Kun lukumääristä puhutaan, tarvitaan sanoja. Eri lukumäärille on kielissä sanoja: *yksi, kaksi, kolme, ...*; *ett, två, tre, ...*; *one, two, three, ...* jne. Lukumäärien ilmaisemiselle tulee kuitenkin periaatteellinen ongelma. Erilaisia lukumääriä on loputtomasti. Kaikille ei oikein mitenkään voi riittää erilaisia sanoja. Kieliin on muodostunut tapoja, joilla tätä vaikeutta voidaan kiertää. Annetaan oma sana jollekin lukumäärälle (kuten vaikka 'kymmenen', 'tusina' tai 'sata') ja isompia lukumääriä tarkoittavia rakennelmia kootaan niin, että ilmoitetaan isompia lukumääriä käyttämällä pienempiä lukumäärän nimiä ja tätä isomman lukumäärän nimitystä. Voidaan sanoa 'kolme tusinaa' tai 'viisisataa kaksikymmentä seitsemän'.

On aika luonnollista, että ihmisen mukana kulkevat lukumäärät ovat antaneet aiheen nimetä näitä oman sanansa saaneita lukumääriä. Meillä on kummassakin kädessä viisi sormea ja kummassakin jalassa viisi varvasta. Tuskin muuta syytä tarvitsee miettiä sille, että kymmenestä tuli suosittu peruslukumäärä; kun varpaat peittävät jalkineet lienevät ihmiskunnan historiassa uudehko keksintö, niin kaksikymmentäkin on ollut luonnollinen peruslukumäärä. Siitä on jäänteitä kielissä: suomessakin lukujen muodostus kahteenkymmeneen asti on erilainen kuin kahdestakymmenestä eteenpäin ja ranskassa vaikkapa lukusana kahdeksankymmentä muodostetaan sanomalla *quatre-vingt* eli 'neljä kahtakymmentä'.

Lukumäärien merkitseminen muistiin on ollut tärkeää ainakin yhtä kauan kuin kirjoitettua kieltä on käytetty. Sama periaate kuin lukusanojen muodostamisessa on vaikuttanut lukujen merkitsemisessä. Egyptin hieroglyfikirjoituksessa on oma merkkinsä 'yhdelle', 'kymmenelle', 'sadalle' jne., ja lukujen merkinnöissä on niin monta ykkösen, kymmenen, sadan jne. merkkiä kuin luvussa on ykkösiä, kymmeniä, satoja jne. Samaa periaatetta esiintyy muissa kielissä: tutuhkot roomalaiset numerot noudattavat periaatteessa tätä tapaa, hiukan muunneltuna: roomalaisissa numeroissa on oma merkkinsä viidelle, viidellekymmenelle ja viidellesadalle, ja merkkien järjestys on otettava huomioon.

Nuolenpääkirjoitusta parina ajanlaskumme alkua edeltäneenä vuosituhantena käyttäneet Mesopotamian eli suunnilleen nykyisen Irakin asukkaat, sumerilaiset, babylonialaiset ynnä muut, menettelivät pienten lukujen merkinnässä samoin kuin egyptiläiset, mutta he väistivät erään egyptiläiseen järjestelmään sisältyvän loogisen ongelman nerokkaalla tavalla. Jos toimitaan egyptiläisten tapaan, tarvitaan lopulta hyvin monta erilaista merkkiä. Jatkuuhan jono yksi, kymmenen, sata, tuhat jne. loputtomiin. Nuolenpääkirjoitukseen kehittyi ensimmäisenä niin sanottu paikkajärjestelmä. Numeromerkin arvon määrittää paitsi sen muoto, myös sen paikka merkkien jonossa. Mesopotamialaisten lukujärjestelmässä erityisasemassa oli luku kuusikymmentä. (Meille asti tämä on säilynyt tunnin tai kulma-asteen jaossa minuutteihin ja sekunteihin.) Sama kirjoitusmerkki tarkoitti lukuja yksi, kuusikymmentä tai kolmetuhatta kuusisataa ja toinen kirjoitusmerkki lukuja kaksi, satakaksikymmentä tai seitsemäntuhatta kaksisataa jne. Se, mistä oli kysymys, riippui siitä, kuinka monentena merkkinä lukumerkkien jonossa kyseinen merkki esiintyi. Mesopotamialaisessa järjestelmässä oli myös mahdollista merkitä murtolukuja: yhtä tai kuuttakymmentä tarkoittava merkki saattoi myös tarkoittaa yhtä kuudeskymmesosaa tai yhtä kolmastuhanneskuudessadasosaa.

Kun mesopotamialaiseen järjestelmään vielä liittyi lukumerkkien vähentäminen kymmeneen, ollaankin nykyajan lukujärjestelmässä, *kymmenjärjestelmässä*. Sen syntymäajaksi ja -paikaksi muodostui varhaiskeskiaika ja Intia. Tarvitsemme lukujen merkitsemiseen vain kymmenen merkkiä, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ja 0, desimaalierottimen, joka Suomessa on pilkku, mutta moniaalla piste, ja sopimuksen, jonka mukaan näistä merkeistä muodostettu jono tarkoittaa lukua, jonka suuruuden päättelemiseksi on ensin katsottava, kuinka monta merkkiä jonossa on, ja sitten tiedettävä, että esimerkiksi 4321 tarkoittaa yhteenlaskun 'neljä kertaa tuhat + 3 kertaa sata + 2 kertaa kymmenen + yksi' tulosta.

Olemme niin tottuneet kymmenjärjestelmään, että pidämme sitä jotenkin itsestään selvänä. Kun vähän ajattelee, huomaa, että yleisessä käytössä on muunkinlaisia tapoja ilmaista suuria lukuja niin, että ne on ikään kuin ryhmitelty pienemmiksi kokonaisuuksiksi. Vuodessa on 31 536 000 sekuntia. Kun kirjoitan tätä, vuoden alusta on kulunut noin 7 895 400 sekuntia. Voin kuitenkin sanoa tämän paljon havainnollisemmin kertomalla, että nyt on 2. huhtikuuta ja kello on 9.10. Ajan ilmauksissa minuutti on 60 sekuntia, tunti 60 minuuttia, vuorokausi 24 tuntia ja kuukausi vaihtelevasti 28, 29, 30 tai 31 vuorokautta. Aika mutkikasta, mutta tähänkin olemme tottuneet, samoin kuin anglosaksit tuumiin, jalkoihin, jaardeihin ja maileihin.

Kymmenjärjestelmän olennainen piirre on se, että suuremmissa kokonaisuuksissa on aina kymmenen kertaa niin monta yksilöä kuin lähinnä pienemmässä. Sata on kymmenen kertaa kymmenen ja tuhat on kymmenen kertaa sata eli kymmenen kertaa kymmenen kertaa kymmenen. Matematiikan merkintätapoihin on vakiintunut potenssimerkintä k^n osoittamaan sellaista kertolaskua, jossa sama luku k on tekijänä n kertaa. (Ja on havaittu käytännölliseksi sopia, että $k^0 = 1$.) Tätä merkintää käyttäen sata on 10^2 ja tuhat 10^3. Merkintä 6789 on itse asiassa lyhennys laskutoimitukselle

$$6 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0.$$

Sanomme, että lukujärjestelmämme *kantaluku* on kymmenen.

Lukujärjestelmän merkitys ei rajoitu pelkkään lukujen esittämiseen. Aritmetiikka onnistuu käytännössä siksi, että osaamme ulkoa yhteenlaskutaulun ja kertotaulun eli kaikki sellaiset summat $a+b$ ja tulot $a \cdot b$, missä a ja b ovat lukujen $0, 1, 2, \ldots, 9$ joukossa. Kahden luvun yhteenlaskussa käytämme itse asiassa hyväksi vaihdanta- ja osittelulakia. Kun esimerkiksi lasketaan (vaikkapa "allekkain") 537 + 261 tehdään (vaikkei sitä yleensä tiedosteta) näin:

$$\begin{aligned}(5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 7) &+ (2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 1)\\ &= (5+2) \cdot 10^2 + (3+6) \cdot 10 + (7+1)\\ &= 7 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 8 = 798\end{aligned}$$

ja kun kerrotaan $25 \cdot 36$, lasketaan itse asiassa

$$\begin{aligned}&(2 \cdot 10 + 5) \cdot (3 \cdot 10 + 6)\\ &\quad= 5 \cdot (3 \cdot 10 + 6) + 2 \cdot 10 \cdot (3 \cdot 10 + 6)\\ &\quad= (10+5) \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 6 \cdot 10^2 + (10+2) \cdot 10\\ &\quad= 10^2 + (5+3+2) \cdot 10 + 6 \cdot 10^2 + 10^2\\ &\quad= 9 \cdot 10^2 = 900.\end{aligned}$$

Se, että tällaiset laskut perustuvat laskusääntöihin, voidaan käytännössä unohtaa, koska säännöt on rakennettu sisään alakoulussa opittuihin laskutapoihin.

Se, että lukuja merkitään juuri näin, on oikeastaan evoluution aiheuttama sattuma. Jos ihmisen sormien lukumäärä olisi esimerkiksi kuusi kummassakin kädessä (laivakissalla eli suokissalla sanotaan olevan kuusi varvasta joka tassussa) olisimme saattaneet johtua puhumaan ja merkitsemään lukuja niin, että peruslukumääriä olisivat 12, 144, 1728 jne. Se ei olisi varmaankaan juuri hankalampaa kuin tämä tapa, johon olemme tottuneet.

Mutta oikeastikin on tilanteita, joissa 10 ei ole luontevin lukujärjestelmän kantaluku. Elektronisissa laitteissa tiedon esitys perustuu usein johonkin osaseen, jolla on kaksi vaihtoehtoista tilaa, esimerkiksi "korkeampi jännite" ja "matalampi jännite". Usean tällaisen komponentin avulla voidaan esittää lukuja järjestelmässä, jonka kantaluku on kaksi. Tällaista lukujärjestelmää kutsutaan *binäärijärjestelmäksi*. Binäärijärjestelmän "usean kappaleen" lukumäärät ovat kaksi, neljä, kahdeksan, kuusitoista jne. eli $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$ Jokaisesta tällaisesta lukumäärästä on tarpeen tietää vain, onko se mukana vai ei. Tarvitaan siis vain kaksi numeromerkkiä, jotka voivat olla 0 ja 1. Kun binäärijärjestelmään yhdistetään paikkajärjestelmä ja kymmenjärjestelmästä tuttu järjestys, huomataan, että kaikki positiiviset kokonaisluvut voidaan muodostaa ykkösien ja nollien jonoina. Esimerkiksi 101 on

$$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5$$

ja 11111011101 on

$$2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 1 = 2013.$$

Binäärijärjestelmä on kaikista lukujärjestelmistä yksinkertaisin. Yhteenlasku- ja kertotaulut ovat äärimmäisen pelkistettyjä: $0{+}0 = 0$, $1{+}0 = 0{+}1 = 1$, $1{+}1 = 10$; $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$. Tämä on hyvä asia, kun suunnitellaan elektronisia laskimia. Binäärijärjestelmän haittapuoli on se, että varsinkin isomman luvun esitykseen tarvitaan monta merkkiä. Kun kaikki alle 10 miljardin luvut voidaan kirjoittaa kymmenellä tavallisella numeromerkillä, tarvitaan lähellä lukua 10^{10} olevien lukujen kirjoittamiseen 34 binäärimerkin jonoja. Binäärijärjestelmän ohella ovatkin tulleet käyttöön kantalukuun 8 perustuva *oktaalijärjestelmä* ja kantalukuun 16 perustuva *heksadesimaalijärjestelmä*.

Oktaali- niin kuin binäärijärjestelmässäkin selvitään tutuilla numeromerkeillä. Oktaalijärjestelmän numerot ovat 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ja 7, lukua 8 merkitään 10 (siis $1 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^0$) ja

$$144_8 = 8^2 + 4 \cdot 8 + 4 = 64 + 32 + 4 = 100.$$

Tässä on tarpeen käyttää lukujärjestelmän ilmaisevaa alaindeksiä. Heksadesimaalijärjestelmässä tarvitaan 16 numeromerkkiä. Sen sijaan, että olisi keksitty aivan uusia kuvioita, on otettu numeroiksi ”10”, ”11”, ”12”, ”13”, ”14” ja ”15” kirjaimet A, B, C, D, E ja F. Esimerkiksi $7DD_{16} = 7 \cdot 16^2 + 13 \cdot 16 + 13 = 2013$.

Lukujärjestelmän matematiikkaa

Kymmenjärjestelmän, binäärijärjestelmän, oktaalijärjestelmän ja heksadesimaalijärjestelmän yhteinen ominaisuus on se, että mitä tahansa luonnollista lukua x merkitään jonolla, jonka jäsenet ovat tosiasiassa yhtälössä

$$x = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + a_{n-2} q^{n-2} + \cdots + a_1 q + a_0, \quad (1)$$

esiintyvät kertoimet $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$. Lisäksi q on jokin luvuista 10, 2, 8 tai 16, $a_n \neq 0$ ja jokainen luku a_k on jokin luvuista $0, 1, \ldots, q-1$. Yhtälö (1) lisäehtoineen on aivan yhtä mielekäs kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla $q > 1$.

Olemme niin tottuneet kymmenjärjestelmäämme, että mielessämme helposti samastamme luvun ja sen, miten tämän luvun kymmenjärjestelmässä ilmaisemme. Oikeasti kuitenkin luvut ovat jotain sellaista, joka on olemassa aivan riippumatta siitä, millä tavoin niitä nimitämme tai kirjoitamme. Siispä on ihan järkevää kysyä, onko jokaisella luonnollisella luvulla kymmenjärjestelmäesitys ja vain yksi sellainen. Mutta tähän kysymykseen saadaan vastaus, jos kysytään yleisemmin, onko jokaisella luonnollisella luvulla yksi ja vain yksi esitys q-järjestelmässä, kun q on mikä tahansa ykköstä suurempi kokonaisluku.

Tällaisiin kysymyksiin vastaaminen edellyttää eräänlaista tikapuuperiaatetta. Matematiikassa sitä kutsutaan *induktioksi*. Osoittaaksemme, että jokaisella luonnollisella luvulla x on kaavan (1) mukainen esitys, emme voi käydä yksitellen läpi kaikkia luonnollisia lukuja x, koska niitä on äärettömän paljon. Sen sijaan menettelemme tavalla, joka takaa sen, että väitteemme pätee kaikilla x. Lähdemme siitä, että väite pätee, kun $0 \le x \le q-1$: silloin ainoa tapa saada yhtälö (1) ehtoineen pätemään on valita $n = 0$ ja $a_0 = x$. Seuraavaksi oletamme, että väitteemme pätee kaikille niille luvuille x, joille on voimassa $0 \le x \le q^{n+1} - 1$. (Emme tästä ole vielä varmoja, mutta oletamme.) Jos nyt y on luku, joka on $\ge q^{n+1}$, mutta $< q^{n+2} - 1$, niin $y - q^{n+1}$ on luku, joka on pienempi kuin

$$q^{n+2} - 1 - q^{n+1} = (q-1)q^{n+1} - 1.$$

Mutta silloin on olemassa tasan yksi sellainen p, $0 \le p < q - 1$, että

$$p \cdot q^{n+1} \le y - q^{n+1} < (p+1) \cdot q^{n+1}$$

eli

$$0 \le y - (p+1)q^{n+1} \le q^{n+1} - 1.$$

Jos edellä tehty oletus on oikea, niin luvulla $y - (p+1)q^{n+1}$ on esitys q-järjestelmässä. Mutta silloinhan myös luvulla y on tällainen esitys.

Mutta onko oletus oikea? Tässä tulevat ne tikapuut. Oletus on varmasti oikea, kun $n = 0$, senhän aluksi huomasimme. Siispä esittämämme väite on oikea, kun $n = 1$. Koska se on oikea, kun $n = 1$, se on oikea, kun $n = 2$. Näin voidaan jatkaa loputta. Väite on siis kaikkiaan oikea: jokaisella luonnollisella luvulla on esitys q-järjestelmässä, oli q mikä tahansa ykköstä suurempi luonnollinen luku.

Mutta voiko kahdella eri luvulla olla sama esitys? Onneksi ei. Tämän voimme todistaa epäsuorasti, osoittamalla, että jos kaksi eri esitystä olisi, syntyisi ristiriita. Ja sellaista ei matematiikka salli.

Mutta oletetaanpa, että jollakin luvulla x olisi kaksi eri esitystä q-järjestelmässä:

$$\begin{aligned} x &= a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \cdots + a_1 q + a_0 \\ &= b_m q^m + b_{m-1} q^{m-1} + \cdots + b_1 q + b_0. \end{aligned}$$

Jos $n \neq m$, voidaan toiseen esitykseen lisätä alkuun kertoimia, jotka ovat nollia, ja täten päästä tilanteeseen, jossa $m = n$. Olkoon sitten k suurin niistä luvuista i, joille $a_i \neq b_i$. Voidaan olettaa, että $a_k > b_k$. Tarkastellaan lukua

$$\begin{aligned} 0 = c - c = (a_k - b_k)q^k + (a_{k-1} - b_{k-1})q^{k-1} + \\ \cdots + (a_1 - b_1)q + (a_0 - b_0). \quad (2) \end{aligned}$$

Jokainen luku $a_i - b_i$ on kahden joukkoon

$$\{0, 1, \ldots, q-1\}$$

kuuluvan luvun erotus. Siis $|a_i - b_i| \leq (q-1)$ ja

$$|(a_{k-1} - b_{k-1})q^{k-1} + \cdots + (a_0 - b_0)| \leq q^k - 1.$$

Toisaalta $(a_k - b_k)q^k \geq q^k$. Mutta tämä merkitsee sitä, että yhtälö (2) ei voi olla tosi. Oletus, että c:llä olisi kaksi eri esitystä q-kantaisessa lukujärjestelmässä johti ristiriitaan, joten sen täytyy olla väärä.

Lukujärjestelmästä toiseen

Jossain q-järjestelmässä lausutun luvun siirtäminen kymmenjärjestelmään onnistuu suoraan kaavan (1) avulla. On tiedettävä (tai laskettava) potenssit q^k ja suoritettava kaavan (1) kerto- ja yhteenlaskut. Sama olisi mahdollista myös silloin, kun siirrytään vaikkapa 10-järjestelmästä q-järjestelmään: nyt tarvitaan lukujen 10^k ja $0, 1, 2, \ldots, 9$ muodot q-järjestelmässä ja q-järjestelmän yhteenlasku- ja kertolaskutaulut. Esimerkiksi binäärijärjestelmässä on $2 = 10_2$, $3 = 11_2$, $4 = 100_2$, $5 = 101_2$, $6 = 110_2$, $7 = 111_2$, $8 = 1000_2$, $9 = 1001_2$, $10 = 1010_2$, $10^2 = 1010_2 \cdot 1010_2 = 1100100_2$, $10^3 = (1010_2) \cdot (110010)_2 = 1111101000_2$ jne. Siten

$$2013 = 10_2 \cdot 1111101000_2 + 1010_2 + 11_2 = 11111011101_2.$$

(Jos suorittaa laskut ”allekkain”, huomaa, miten yksinkertaista on laskea binäärisesti.)

Ehkäpä kuitenkin tavanomaisempi tapa siirtyä kymmenjärjestelmästä q-järjestelmään on noudattaa samaa ajatuskulkua, jota edellä käytimme luvun q-järjestelmäesityksen olemassaolon päättelemiseen. Jos x on jokin luku, selvitetään ensin ne q:n peräkkäiset potenssit, joiden välissä x on: $q^n \leq x < q^{n+1}$. Jakolasku x/q^n johtaa jakoyhtälöön: $x = a_n q^n + r_n$, missä nyt kokonaisluku a_n on ainakin 1, mutta enintään $q - 1$, ja jakojäännös r_n on pienempi kuin q^n. Tiedämme, että x:n q-järjestelmäesityksen ensimmäinen ”numero” on a_n. Seuraava tai seuraavat numerot saadaan, kun haetaan ne q:n potenssit q^k ja q^{k+1}, joiden välissä r_n on, ja toistetaan jakolasku ja jakojäännöksen muodostaminen. Näin esimerkiksi 2013 siirtyisi oktaalijärjestelmään seuraavasti: $8^3 = 512$ ja $8^4 = 2048$. $2013 = 3 \cdot 512 + 477$; $8^2 = 64 \leq 477 < 8^3$; $477 = 4 \cdot 64 + 29$; $29 = 3 \cdot 8 + 5$. Siis $2013 = 3735_8$.

Lukujärjestelmästä toiseen siirtyminen on erityisen yksinkertaista silloin, kun toinen kantaluku on toisen potenssi. Jos luvut kirjoitettaisiin 100-kantaisessa järjestelmässä, ”numeroita” voisivat olla

$$00, 01, 02, \ldots, 09, 10, 11, \ldots, 99$$

ja luvun 10- ja 100-kantaiset esitykset näyttäisivät koko lailla samoilta. Tämä ilmiö tulee vastaan etenkin silloin, kun siirrytään binäärijärjestelmästä oktaali- tai heksadesimaalijärjestelmään. Edellä luvun 2013 kirjoitetusta oktaaliesityksestä saadaan aikaisempi binääriesitys kirjoittamalla peräkkäin $11_2 = 3_8$, $111_2 = 7_8$, $011_2 = 3_8$ ja $110_2 = 5_8$ ja binääriesityksestä oktaaliesitys ryhmittelemällä binääriesityksen numerot kolmen ryhmiin (oikealta alkaen) ja tulkitsemalla kunkin ryhmän osoittama binääriluku oktaaliluvuksi. Samoin tästä esityksestä 11111011101_2 saadaan luvun 2013 heksadesimaaliesitys ryhmittelemällä jono oikealta alkaen neljän ryhmiin ja muuttamalla nämä heksadesimaaliluvuiksi: $1101_2 = 13 = D_{16}$, $111_2 = 7_{16}$. Siis $2016 = 7DD_{16}$.

* * *

Tämän kirjoituksen aihepiiristä löytyy lisää tietoa Solmusta, esimerkiksi suomen ja suomensukuisten kielten lukusanoista:

`http://solmu.math.helsinki.fi/2001/2/suihkonen/suihkonen.pdf`

ja roomalaisten tavasta merkitä numeroita:

`http://solmu.math.helsinki.fi/2000/2/lehtinen/lehtinen.pdf`

Myös Solmun Unkari-aineistossa,

`http://solmu.math.helsinki.fi/2002/unkari/luento5a.html`

on lukujärjestelmiin liittyvää asiaa.