# Hiukan osittelulaista

Kaikista laskutoimituksista ensimmäinen ja tärkein on yhteenlasku. Voimme ajatella, että kokonaisluvutkin ovat yhteenlaskun tuotetta. Kaksi on se, mitä saadaan, kun yhteen lisätään yksi, kolme on se, mikä saadaan, kun kahteen lisätään yksi ja niin edespäin. Olemme oppineet suorittamaan yhteenlaskut tietyllä menetelmällä, joka toimiakseen vaatii vain, että muistamme, mitä yhteenlaskun tulokset ovat, kun yhteenlaskettavat ovat alle kymmenen suuruisia positiivisia kokonaislukuja (tai nollia). Kun esimerkiksi haluamme laskea $123 + 678$, pääsemme tulokseen 801 suorittamalla yhteenlaskut $3 + 8 = 11$, $2 + 7 + 1 = 10$ ja $1 + 6 + 1 = 5$. Mutta miksi oikeastaan saamme tehdä näin? Jos asiaa tarkemmin miettii, niin huomaa, että tämä tavallinen allekkain laskeminen perustuu kahteen sääntöön, nimittäin yhteenlaskun *vaihdanta-* ja *liitäntälakeihin*, jotka sallivat sopivien yhteenlaskettavien poimimisen ja laskemisen yhteen siitä riippumatta, missä järjestyksessä luvut on alkuaan tarjottu. Edellinen lasku on osiinsa purettuna seuraava: $123+678 = (100+20+3)+(600+70+8) = (3+8)+(20+70)+(100+600) = 11+90+700 = (1 + 10) + 90 + 700 = 1 + (10 + 90) + 700 = 1 + 100 + 700 = 800 + 1 = 801$.

Mutta olinkohan aivan rehellinen, kun sanoin, että tuttu laskutapamme tukeutuu vain vaihdanta- ja liitäntälakeihin ja tietoon siitä, mikä on minkä tahansa kahden luvuista 0, 1, 2, 3, 4 ,5, 6, 7, 8 ja 9 summa? Edellinen lasku vaati onnistuakseen myös tiedon siitä, mitä on $20 + 70$, $10 + 90$ ja $100 + 700$. Tässä kohtaamme *osittelulain*, kolmannen laskemisen perussäännön. $20 + 70 = 90$, koska $20 + 70 = 2 \cdot 10 + 7 \cdot 10 = (2 + 7) \cdot 10 = 9 \cdot 10 = 90$.

Kertolasku on eräänlainen yhteenlaskun lyhennys: kaksi kertaa kolme on sama kuin $3+3$, neljä kertaa viisi on lyhennys yhteenlaskulle $5 + 5 + 5 + 5$.

Osittelulaki (tai osittelulait, sillä usein niitä ajatellaan olevan kaksi) kytkee kertolaskun ja yhteenlaskun toisiinsa. Osittelulaki on erittäin helppo ymmärtää: jos ajatus ”kaksi omenaa ja kolme omenaa on yhteensä viisi omenaa” tuntuu yksinkertaiselta, on ymmärtänyt osittelulain: ”kaksi kuutosta ja kolme kuutosta on viisi kuutosta” on yhtä selvä asia, ja niin sama merkittynä laskutoimituksenakin ”$2 \cdot 6 + 3 \cdot 6 = (2 + 3) \cdot 6 = 5 \cdot 6 = 30$”.

Osittelulain sisällön voi pukea sanoiksi:

> Jos sama luku kerrotaan kahdella (mahdollisesti) eri luvulla ja tulokset lasketaan yhteen, saadaan sama luku kuin jos ensimmäinen luku kerrottaisiin kahden jälkimmäisen luvun summalla.

Jos siirrytään algebran kieleen, saadaan osittelulaki ilmaistua kaavan kielellä. Jos ensimmäinen luvuista olisi $c$ ja ne luvut, joilla $c$ kerrotaan, olisivat $a$ ja $b$, niin osittelulain sisältö näkyisi kaavassa

$$a \cdot c + b \cdot c = (a + b) \cdot c.$$

Entä se toinen osittelulaki. Se kuuluisi näin:

> Jos kahden luvun summa kerrotaan kolmannella luvulla niin tulos on sama kuin jos luvut erikseen kerrottaisin tällä kolmannella luvulla ja tulot laskettaisiin yhteen.

Saman asian ilmaisee algebran kieli on yhtälönä

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Jos hyväksymme ensimmäisen osittelulain, niin tämä toinen seuraa tietysti heti kertolaskun vaihdannaisuudesta.

Osittelulaki on mukana, vaikkei asiaa yleensä tule ajatelleeksi, tavallisessa kokonaislukujen kertolaskussa. Kun esimerkiksi suoritamme kertolaskun $38 \cdot 46$, laskemme $8 \cdot 46 = 368$ ja $3 \cdot 46 = 138$ ja kirjoitamme nämä välitulokset allekkain niin, että yhteenlaskun tulokseksi tulee 1748. Miksi teemme näin? Itse asiassa käytämme osittelulakia: $38 \cdot 46 = (30+8) \cdot 46 = 30 \cdot 46 + 8 \cdot 46 = 1380 + 368 = 1748$. Se, että kaikenlaisten kertolaskujen suorittamiseen riittää $9 \times 9$-kertotaulun muistaminen, on siis osittelulain ansiota!

Tähän asti olemme ajatelleet, että tarkastelemamme luvut ovat positiivisia kokonaislukuja. Mukaan voidaan ottaa myös negatiiviset luvut ja murtoluvut eli rationaaliluvut. Jos viidestä omenasta poistetaan kaksi omenaa jää kolme omenaa, joka on sama kuin $5-2$ omenaa. Samoin $(5-3) \cdot 6 = 2 \cdot 6 = 12$ ja $5 \cdot 6 - 3 \cdot 6 = 30 - 18 = 12$ ja yleisesti $(a-b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$. Kaksi omenan puolikasta ja kolme omenan puolikasta on sama kuin viisi omenan puolikasta. Samoin $2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} = 5 \cdot \frac{1}{2} = (2+3) \cdot \frac{1}{2}$. Jos murtoluku kerrotaan kahden positiivisen kokonaisluvun summalla, tulos on sama kuin jos murtoluku kerrottaisiin erikseen kummallakin kokonaisluvulla ja tulokset laskettaisiin yhteen. Algebran kielellä:

$$(a+b) \cdot \frac{p}{q} = a \cdot \frac{p}{q} + b \cdot \frac{p}{q}.$$

Kun sijoitamme edelliseen kaavaan $p = 1$, olemme samalla saaneet *jakolaskun osittelulain*:

> Kahden luvun summa voidaan jakaa kolmannella niin, että yhteenlaskettavat jaetaan erikseen tällä luvulla ja osamäärät lasketaan yhteen.

Algebran kielellä siis

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Entä jos kertojana on kahden murtoluvun summa? Osittelulain pätevyys voidaan varmistaa suoraviivaisella laskulla, jossa käytetään hyväksi murtolukujen yhteen- ja kertolaskun perusominaisuuksia ja supistamista:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{p}{q} &= \left(\frac{ad+bc}{bd}\right) \cdot \frac{p}{q} = \frac{(ad+bc) \cdot p}{(bd) \cdot q} = (ad+bc) \cdot \frac{p}{bdq} \\ &= ad \cdot \frac{p}{bdq} + bc \cdot \frac{p}{bdq} = a \cdot \frac{p}{bq} + c \cdot \frac{p}{dq} = \frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} + \frac{b}{c} \cdot \frac{p}{q}.\end{aligned}$$

Osittelulaki pätee toki myös irrationaaliluvuille. Sen perusteleminen riippuu siitä, millä määrittelyillä itse irrationaaliluvut otetaan käyttöön. Usein aita ylitetään matalimmasta kohdasta eli sovitaan yhdeksi reaalilukujen perusaksioomaksi yhteen- ja kertolaskut kytkevä osittelulaki.

Osittelulaki on myös sääntö, johon varmaan useimmin nojaudutaan algebrallisia lausekkeita käsiteltäessä. Peruskuvio on sulkeiden poistaminen lausekkeesta $(a+b)(c+d)$ (tässä on tavan mukaan jätetty kertolaskun merkki pois). Sulkeiden poisto perustuu osittelulakien käyttöön kahdesti:

$$(a+b)(c+d) = (a+b)c + (a+b)d = ac + bc + ad + bd.$$

Osittelulain takaa löytyvät siis esimerkiksi ne hyödylliset relaatiot, joita jotkut vähän harhaanjohtavasti kutsuvat *muistikaavoiksi*:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b = a^2 + ba + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2,\\ (a-b)^2 &= (a-b)(a-b) = (a-b)a + (a-b)(-b) = a^2 - ba - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

ja

$$(a+b)(a-b) = (a+b)a + (a+b)(-b) = a^2 + ba - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Muistikaavoja ei tarvitse muistaa, osittelulaki riittää!