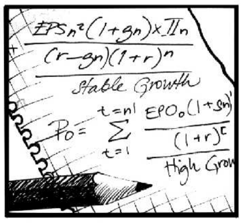


Matematiikasta, mallittamisesta – ja taloustieteestä, osa 1

Mai Allo
VTL, ekonomisti, mai.allo@helsinki.fi

Myös yhteiskuntatieteilijät ja humanistit käyttävät työssään matematiikkaa. Miten?

Aihetta lähestyttiin kansantaloustieteen näkökulmasta marraskuun matematiikkapäivillä Helsingissä.

Perinteiseen tapaan matematiikkapäivä pidettiin Maunulan koululla, jonne lukioikäistä yleisöä saapui Hämeenlinnasta ja Turusta asti. Heistä osa jo tiesi, minne lukion jälkeen aikoo, mutta monelle oma ammatinvalinta oli vielä avoin. Eniten kuulijoita yhdistikin kiinnostus matematiikkaan ja siihen, miten moneen eri alaan sitä voi soveltaa.

Ennen yhtälöiden ja graafien piirtelyä piti tietenkin selvittää, mitä moinen kansantaloustiede on ja mitä se tutkii.

Kansantaloustiede on yhteiskuntatiede

Kansantaloustiede tutkii ihmisen taloudellista käyttäytymistä ja talousjärjestelmiä sekä niiden toimintaa. Näin se kuuluu yhteiskuntatieteisiin. Kansantaloustieteen asiantuntijaa kutsutaan ekonomistiksi.

Kansantaloustiede ei ole sama asia kuin liiketaloustiede. Liiketaloustiede käsittelee asioita yrityksen ja voiton näkökulmasta, kansantaloustiede yhteiskunnan ja sen vuorovaikutusten näkövinkkelistä. Teoriat ja metodit eivät ole yhteneviä kansantaloustieteessä ja liiketaloustieteessä.

Kansantaloustiede nojaa matematiikkaan

Matematiikka on kansantaloustieteilijälle tärkeä apuväline. Myös tilastotiede kuuluu ekonomistin ammattitaitovaatimuksiin, ja käytännön työssä tulee pystyä käsittelemään erilaisia aineistoja.

Matematiikka pysyy sisällöllisesti samana asiana kaikille ja kaikkialla sovellusalueesta riippumatta. Ekonomisti käyttää sinänsä aivan samoja matemaattisia apuvälineitä kuin fyysikko tai kemisti, mutta ko. metodeilla saatujen tulosten tulkinta tietenkin eroaa fysiikan ja taloustieteen maailmassa. Puhutaanhan toisessa elottomasta luonnosta ja toisessa ihmisen luomasta järjestelmästä.

Matematiikan opiskelu kuuluu olennaisena osana ekonomistin koulutukseen. Helsingin yliopistossa opiskelevat kansantaloustieteilijät suorittavat matematiikan pakollisina sivuaineopintoina, mutta monet lukevat matematiikasta täyden oppimäärän (sivulaudatur). Useat tunnetut ekonomistit ovatkin opiskelleet alunperin matemaatikoksi, ja tutustuneet kansantaloustieteeseen sen jälkeen.

Millaisia asioita kansantaloustiede tutkii?

Taloudellisten ilmiöiden kirjo ympärillämme on suunnaton. On helppo mieltää taloudelliseksi kysymykseksi vaikka se, millainen elvytyspolitiikka parhaiten auttaisi meitä selviytymään lamasta. Tai miten eläkevarat tulisi kerätä ja sijoittaa, jotta mahdollisimman moni saisi turvatun vanhuuden.

Kansainvälinen valuuttakauppa tai pörssitoiminta niin hyvine kuin huonoine lieveilmiöineen on niin ikään helppo tajuta kansantaloustieteilijän työkentäksi.

Mutta kansantaloustiede tarjoaa paljon, paljon muitakin kysymyksiä tutkittavaksi. Ala jaetaan karkeasti mikro- ja makrotaloustieteeseen, mutta raja ei ole ehdoton.

Monet ekonomistit pyörittelevät tällä hetkellä esimerkiksi kysymystä siitä, miten kuluttajien vaatimukset eettisistä tuotantotavoista vaikuttavat yrityksen tuotantopäätöksiin. Jotkut selvittävät, miten tulisi säädellä kulutusta ja tuotantoa niin, että ympäristötuhot minimoituisivat. Entä voitaisiinko isot ympäristötuhot estää vaikkapa ympäristöveroilla? Tai millainen taloudellinen kasvu turvaisi hyvinvoinnin, mutta säästäisi luonnonvaroja tulevillekin sukupolville?

Työllisyys on aika hyvä...

Ekonomisteja työskentelee tutkijoina yliopistoissa ja työmarkkinajärjestöjen ekonomisteina. Heitä on pankeissa ja vakuutusyhtiöissä analyytikkoina. Kansainväliset järjestöt (YK, IMF, Valuuttarahasto, Worldwatch-instituutti jne.) palkkaavat ekonomisteja.

...mutta harvat rikastuvat

Yksityisissä yrityksissä (pankeissa jne.) ekonomistit ansaitsevat hyvin, järjestöissä ja yliopistoissa taas ei huippupalkkoja makseta. Useimmat yliopisto- ja järjestöekonomistit tosin hakeutuvat alalle työn kiinnostavuuden, ei niinkään palkan vuoksi.

Että kyynisiä materialistejako?

Joskus kysytään, kiinnostaako ekonomisteja vain raha. Tietysti rahatalouden ilmiöt aivan sellaisenaan kiinnostavat joitakin alan ihmisiä. Mutta kansantaloustieteen opiskelijoiksi hakeutuu joka vuosi joukoittain myös maailmanparantajia. Ja sellaisena he pysyvät valmistumisensa jälkeenkin, kuten jäljempänä käy ilmi. Osa taas opiskelee kansantaloustiedettä siksi, että on kiinnostunut yhteiskunnasta, ja osa siksi, että pitää matemaattisista haasteista.

No niin, kyllä joukkoon kuuluu pari julkikyynistä materialistiakin. Mutta luultavasti he ovat sitä koulutuksestaan huolimatta, eivät sen ansiosta.

Aatteiltaan kirjavaa joukkoa

Osa suomalaisistakin talouselämän ja -politiikan vaikuttajista on alunperin hankkinut ekonomistin koulutuksen. Näkyvimmästä päästä lienee helppo muistaa esimerkiksi Jorma Ollila (entinen Nokian pääjohtaja, nykyinen Shellin hallituksen jäsen, elinkeinoelämän vaikuttaja) tai Suvi-Anne Siimes (entinen Vasemmistoliiton puheenjohtaja, nykyinen lääketeollisuuden edustaja) tai Osmo Soininvaara, joka on vihreän liikkeen keulahahmoja. (Hän on varsinaiselta koulutukseltaan tilastotieteilijä, mutta opiskellut täyden oppimäärän kansantaloustiedettä.)

Kansantaloustieteilijöillä on hyvin standardi – kaikilla samanlainen – koulutus, ja perusteorioista vallitsee vankka yksimielisyys; mutta yhteiskunnallisilta näkemyksiltään ekonomistit siis ovat hyvin kirjavaa joukkoa!

Valtaosa ekonomisteista tekee tietenkin työtään tulematta koskaan millään tavalla tunnetuksi, mutta sehän ei liene tarkoituskaan – työ kiittää tekijäänsä yleensä muutenkin.

Malli on analyysin väline

Matemaattisia malleja käytetään lähes joka alalla fysiikasta biologiaan ja valtio-oppiin.

Mallittamalla saadaan selkeyttä ja uusia näkökulmia monimutkaisiin ilmiöihin, tapahtuivat ne sitten elottomassa luonnossa, biosfäärissä tai yhteiskunnassa.

Mallit ovat eräänlaisia matematiikan avulla tehtyjä kuvauksia tai karttoja jostakin ilmiöstä. Malli yksinkertaistaa monimutkaista ilmiötä ja helpottaa sen analysointia.

Kansantaloustieteessäkin käytetään paljon matemaattisia malleja. Ne perustuvat usein yhtälömuotoon formuloituihin oletuksiin, ja mallin tuloksista (esimerkiksi usean yhtälön ratkaisusta) voidaan tehdä empiirisesti testattava hypoteesi.

Testattavuus on tärkeää, koska tieteen tehtävähän on löytää totuus ja selvittää, onko jokin väittämä totta vai ei.

Joskus kysytään, voiko ihmisen toimintaa ylipäätään mallittaa, onhan ihminen aikomuksineen ja tunteineen kovin ailahteleva tutkimuskohde. Ja miten laskea sellaista, jota ei voi mitata rahassa?

Onkin totta, että useita asioita on vaikea mitata. Eikä kaikkea voi eikä pidä laskea rahassa, ei edes taloustieteessä. Mutta yllättävän suuri osa ihmisen elämän ja talouden ilmiöistä on jotenkin kvantifioitavissa eli lukuina ilmaistavissa. Siten ne ovat myös mallitettavissa.

Jos halutaan esimerkiksi kuvata jonkin maan hyvinvointia lukuina, pystymme ongelmitta numeroiksi pukemaan muun muassa lukutaitoprosenttia, syntyvyyttä, työpäivän pituutta, sukupuolten samapalkkaisuutta jne.

Taloustieteen kiistattomimmat tulokset perustuvat malleihin. Mutta hyvä taloustieteilijä tietää rajansa. Vaikka matematiikka itsessään on eksaktia, ei siitä seuraa, että taloustieteessä saavutettaisiin aivan joka asiassa yhtä varmoja tuloksia kuin vaikkapa fysiikassa. Ihmistä tutkivilla aloilla ei kaikkea voi testata, koska se olisi joko kallista, epäeettistä tai muuten mahdotonta.

Ja nyt harjoituksiin

Yhden matematiikkapäivän aikana ei tietenkään voi käydä läpi kansantaloustieteen mikro- ja makroteoriaa kokonaisuudessaan. Mutta valaisevia esimerkkejä ehdittiin käsitellä useampiakin. Osa niistä on matemaattisesti mahdollisimman yksinkertaisia, melkein triviaaleja, osa teknisesti vaikeampia. Helpot esimerkit on otettu mukaan, jotta oppilaat näkisivät, miten matemaattisesti yksinkertainenkin työkalu voi kertoa paljon ja antaa käyttäjälleen monipuolisen tulkinnan välineen. Toisin sanoen, tieteessä voidaan tehdä hienoja ja kiinnostavia tuloksia ja väittämiä pelkällä peruskoulualgebralla – aina ei tarvita kunnioitusta herättävän näköisiä ”risuaitoja”. Sitä paitsi: jos kerran kiintoisia tuloksia saa pelkällä yhteen- ja kertolaskulla, niin mitä saammekaan aikaiseksi niillä mutkikkaammilla yhtälöillä!

Edellinen pätee luultavasti kaikilla matematiikkaa käyttävillä tieteenaloilla.

Optimointia

Suuri osa kaikesta tieteellisestä laskennasta on optimointia. Meillä on siis jokin tavoitefunktio (tavoite, joka on kirjoitettu funktiomuotoon), jota maksimoidaan tai minimoidaan. Siis yritämme saada jotakin asiaa mahdollisimman suureksi tai pieneksi ottaen huomioon, että tavoitteemme saavuttamista rajoittaa jokin seikka – se on lyhyesti rajoite. Esimerkiksi: lentokoneeseen pitää mahtua mahdollisimman paljon ihmisiä, mutta koneen pitää olla aivan tietyn muotoinen ja kokoinen, jotta se kuluttaisi mahdollisimman vähän polttoainetta.

Myös kansantaloustieteessä optimoidaan. Konkreettisena esimerkkinä: haluamme ostaa tavaroita ja palveluita, mutta rahaa on vain tietty määrä. Tai: haluamme käyttää aikaa perheemme parissa mahdollisimman paljon, mutta tarvitsemme myös ruokaa. Osa ajasta on siis käytettävä työhön elannon ansaitsemiseksi tai ammattitaidon ylläpitämiseksi. Ja kaiken lisäksi aikakin on rajallinen: vuorokaudessa on vain 24 tuntia – (eikä yksittäisen ihmisen elämä jatku loputtomiin!).

Toinen esimerkki: haluamme käyttää luonnonvaroja pitääksemme yllä hyvinvointia ja vaurautta (lämmintä asuntoa, kännyköitä, hygieenisiä leikkaussaleja), mutta toisaalta luonnonvarojen käyttö tuhoaa tulevia elinmahdollisuuksiamme. Optimointikysymys: miten saamme maksimoitua elintasomme siten, ettei tiettyä luonnonvarojen käyttötasoa ylitetä?

Kaikessa optimoinnissa tarvitaan differentiaalilaskentaa. Tässä näytetään kuitenkin esimerkkejä, joista selviää ilman differentiaalilaskentaa, joten lukion ykkösluokkalaisetkin pääsevät mukaan.

Katsokaamme ensin optimointitehtävää ilman mitään erityistä tulkintaa (tehtävä löytyy Alpha Chiangin kirjasta Fundamental Methods of Mathematical Economics, 3. painos). Tehtävän kanssa lämmiteltyämme voimme siirtyä yhteen mikrotaloustieteen peruspilariin, kuluttajan valintateoriaan.

Olkoon meillä funktio

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + 2x_1, \quad x_1, x_2 \geq 0,$$

jolle haluamme mahdollisimman suuren arvon. Näin f on tavoitefunktiomme, jota maksimoimme.

Olkoon meillä rajoite muotoa

$$4x_1 + 2x_2 = 60.$$

Haluamme siis tietää, mikä arvo tulisi antaa x_1:lle ja x_2:lle, jotta f:n arvo olisi mahdollisimman suuri, kuitenkin niin, että x_1 ja x_2 toteuttavat rajoitteen

$$4x_1 + 2x_2 = 60.$$

Formaalisti:

$$\max\ x_1 x_2 + 2x_1 \ \text{ siten, että } \ 4x_1 + 2x_2 = 60.$$

Ratkaisu 1 (ilman differentiaalilaskentaa)

Ratkaistaan rajoitteesta x_2 ja sijoitetaan se tavoitefunktioon:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &= 60 \\ 2x_2 &= 60 - 4x_1 \\ x_2 &= 30 - 2x_1 = -2x_1 + 30. \end{aligned}$$

Sijoittamalla saadaan tavoitefunktio muotoon

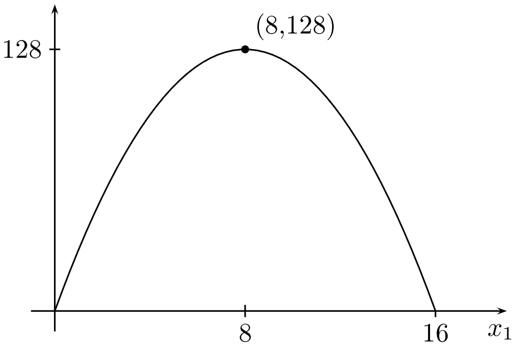
$$\begin{aligned} f^*(x_1) &= f(x_1, -2x_1 + 30) \\ &= x_1(-2x_1 + 30) + 2x_1 \\ &= -2x_1^2 + 30x_1 + 2x_1 = -2x_1^2 + 32x_1. \end{aligned}$$

Näemme, että $f^*(x_1) = -2x_1^2 + 32x_1$ on alaspäin aukeava paraabeli, joten ko. funktion maksimikohta on paraabelin huipussa.

Etsitään paraabelin nollakohdat esim. 2. asteen yhtälön ratkaisukaavalla tai ratkaisemalla

$$-2x_1(x_1 - 16) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ tai } x_1 = 16.$$

Näin ollen paraabelin huippu on pisteessä $x_1 = 8$ (ks. kuva).



Kun $x_1 = 8$, saamme x_2:n sijoittamalla x_1 rajoitteeseen:

$$x_2 = -2 \cdot 8 + 30 = 14.$$

Tavoitefunktiomme saavuttaa maksiminsa pisteessä $(8, 14)$ ja maksimiarvo on näin ollen

$$f(8, 14) = 8 \cdot 14 + 2 \cdot 8 = 128.$$

Ratkaisu 2 (differentiaalilaskentaa käyttäen)

Ratkaisu olisi löytynyt ehkä suoraviivaisemmin differentiaalilaskennalla. Kun rajoitteen sisältävää tavoitefunktiota merkitään f^*, voidaan ratkaisu saada asettamalla

$$\frac{df^*}{dx_1} = 0$$

ja varmistamalla tämän jälkeen, että

$$\frac{d^2 f^*}{dx_1^2} < 0.$$

Tähän esimerkkiin sovellettuna

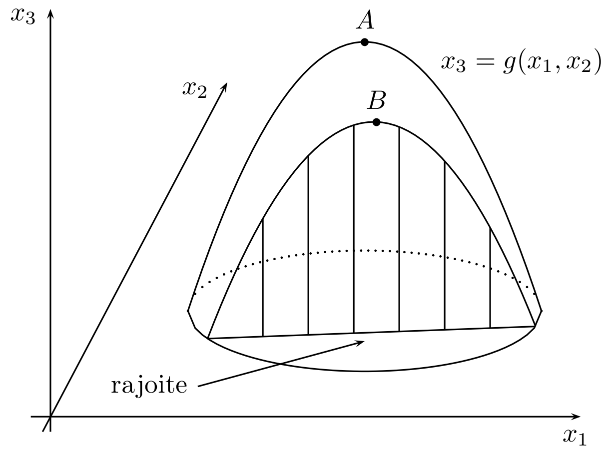
$$\frac{df^*}{dx_1} = -2x_1^2 + 32x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 8$$

ja

$$\frac{d^2 f^*}{dx_1^2} = -4x_1 < 0.$$

Olemme juuri ratkaisseet erään tyypillisen, joskin teknisesti helpon, optimointiongelman.

Voimme havainnollistaa rajoitettua optimointia kuvalla:



Kuvassa funktion $x_3 = g(x_1, x_2)$ rajoittamaton maksimi on pisteessä A ja rajoitettu maksimi pisteessä B.

Siirrytään nyt soveltamaan rajoitettua optimointia jo mainittuun kuluttajan valintateoriaan. Siinä ratkaistaan kuluttajan ongelma. **Haluamme tietää, miten kuluttaja valitsee hyödykkeitten välillä, kun käytettävissä on rajallinen määrä rahaa.** Hyödykkeet voivat olla tavaroita ja palveluja, vaikka leipää ja sirkushuveja. Käytettävissä olevaa rahaa nimitämme budjettirajoitteeksi.

Jotta saisimme esimerkistämme mahdollisimman helpon, oletamme yksinkertaisuuden vuoksi[1]:

1) kuluttaja kuluttaa vain kahta hyödykettä ja valitsee siis kahden hyödykkeen välillä,

2) kuluttaja on sitä tyytyväisempi, mitä enemmän hän saa hyödykkeitä ja

3) kuluttaja käyttää kaiken tulonsa näihin hyödykkeisiin.

Kuluttajan siis oletetaan maksimoivan hyötyään, ja esimerkissämme tämä hyöty riippuu vain kahdesta hyödykkeestä.

Puemme oletuksemme nyt optimointiongelmaksi näin:

Riippukoon kuluttajan hyöty U kahdesta hyödykkeestä x_1 ja x_2 siten, että $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Siis kun x_1:n määrä kasvaa, kasvaa myös kuluttajan hyöty U, ja sama pätee x_2:lle.

Formuloituna:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} > 0 \text{ ja } \frac{\partial U}{\partial x_2} > 0.$$

Olkoon edelleen kuluttajan käytettävissä oleva tulo $M = 24$, ja olkoot hyödykkeiden x_1 ja x_2 hinnat $p_{x_1} = 4$ ja $p_{x_2} = 8$ (lyhenne "p" tulee sanasta "price").

[1] Tyypillisesti kuluttajan teoriassa oletetaan preferenssit monotonisiksi, transitiivisiksi ja konvekseiksi, ja rajasubstituutioaste hyödykkeitten välillä väheneväksi. Esimerkkilaskumme pystyy käymään läpi ilman ko. määritteiden yksityiskohtaista hallintaa.

Kuluttajan ongelmassa kysytään, kuinka paljon hyödykkeitä x_1 ja x_2 kuluttaja valitsee yo. hinnoilla ja budjettirajoitteella.

Matemaattisesti formuloituna ongelma on

$$\max U(x_1, x_2) = x_1 x_2 \text{ siten, että } 4x_1 + 8x_2 = 24.$$

Rajoite on nyt budjettirajoite, josta näkyy, että kuluttaja käyttää kaikki tulonsa kahteen hyödykkeeseen.

Ratkaistaan ilman differentiaalilaskentaa, kuten edellinenkin tehtävä.

Sijoitetaan rajoite tavoitefunktioon. Rajoitteesta saadaan $x_1 = -2x_2 + 6$, jolloin

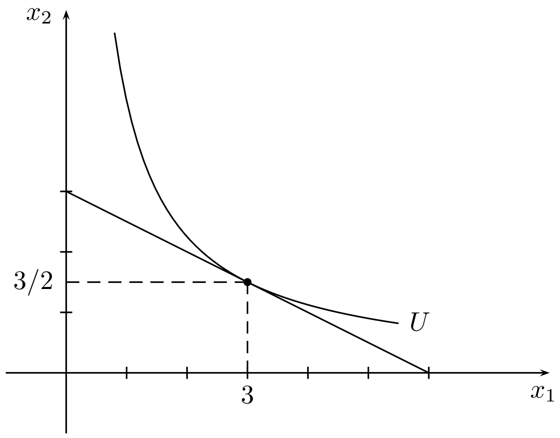
$$\begin{aligned} U^*(x_2) &= U(-2x_2 + 6, x_2) \\ &= (-2x_2 + 6)x_2 = -2x_2^2 + 6x_2. \end{aligned}$$

Ratkaisemme tästä alaspäin aukeavasta paraabelista nollakohdat ja saamme $x_2 = 0$ tai $x_2 = 3$, jolloin $U^*(x_2)$ maksimoituu, kun $x_2 = 3/2$.

$U(x_1, x_2)$ saavuttaa maksimiarvonsa, kun $x_2 = 3/2$ ja $x_1 = -2 \cdot 3/2 + 6 = 3$.

Kuluttaja siis valitsee hyödykettä x_1 3 yksikköä ja hyödykettä x_2 3/2 yksikköä.

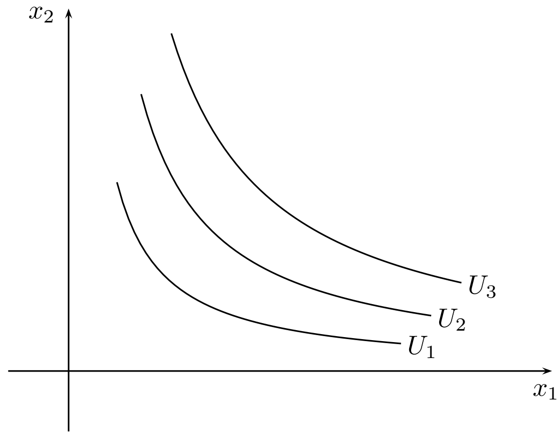
Graafisesti ratkaisu näyttää tällaiselta:



Budjettirajoite on (x_1, x_2)-koordinaatistoon piirretty suora. Sen leikkauspisteet koordinaattiakselien kanssa saadaan laskemalla, paljonko hyödykettä x_1 kuluttaja saisi, jos käyttäisi vain siihen kaikki rahansa. Esimerkiksi x_2:ta saataisiin $24/8 = 3$ kappaletta, jos x_1:tä valittaisiin 0 kappaletta.

Kuluttajan hyötyä kuvaava käyrä (sitä nimitetään indifferenssikäyräksi) sivuaa budjettirajoitetta yhdessä pisteessä, siinä, joka on optimoinnin ratkaisu.

Alla vielä indifferenssikäyriä. Palatkaamme tekemiimme oletuksiin 1), 2) ja 3) kuluttajan mieltymyksistä. Pitkin yhtä käyrää kuluttajan hyöty on vakio. Jos x_1:stä luovutaan, on tilalle saatava x_2:ta lisää, jotta hyöty pysyisi yhtä suurena. Kuluttaja saisi sitä suuremman hyödyn, mitä kauempana origosta sijoittuvalle käyrälle hän yltäisi (sitä enemmän hyödykkeitä!), mutta hän joutuu tyytymään siihen käyrään, johon pääsee budjettirajoitteen puitteissa.



Pitkin kutakin käyrää U_i, $i = 1, 2, 3$, hyöty on vakio. Hyötytaso on U_3:ssa suurempi kuin U_1:ssä ja U_2:ssa.

Myös ensin tekemämme "lämmittelytehtävän" olisi voinut tulkita kuluttajan ongelmaksi. Siinä kuluttajan hyöty riippui niin ikään kahdesta hyödykkeestä x_1 ja x_2, ja kuluttaja maksimoi hyötyään, joka oli muotoa

$$x_1 x_2 + 2x_1.$$

Hyödykkeiden hinnat kyseisessä esimerkissä olisivat olleet 4 ja 2, ja käytettävissä oleva tulo olisi ollut 60.

Yllä olevissa esimerkeissä kuluttajan ongelma oli kovin yksinkertainen. Oletimme muun muassa, että rajoite on yhtälö. Se voisi olla myös epäyhtälö muotoa $ax_1 + bx_2 \leq M$ tai $ax_1 + bx_2 \geq M$, jolloin voisimme kuvata sitä, että kuluttaja säästää tai elää velaksi. Optimointi epäyhtälörajoitteella vain on jonkin verran monivaiheisempaa kuin yllä esitetty.

Taloustieteen arkityössä kuluttajan hyötyfunktiot ja niitä koskevat oletukset ovat niin ikään vähemmän suoraviivaisia kuin tehtävässämme. Eihän esimerkiksi kuluttaja aina tule sitä tyytyväisemmäksi, mitä enemmän hyödykkeitä saa, vaan jokin hyödyke voi olla "haitake".

Ja kuluttajan hyöty, tyytyväisyys ja tarpeentyydytys voi riippua myös täysin aineettomista asioista, vaikka omien lasten hoitamisesta. Ne voidaan yllä esitetyin periaattein mainiosti mallittaa, sillä nekin ovat talouteen kuuluvia ilmiöitä, vaikka ovatkin arvovalintoja ja "tunneasioita". Niiden formuloiminen tosin saattaa vaatia paljon työtä.

Seuraavaksi tutustumme peliteoriaan. Se on aivan oma, kiehtova maailmansa. Jo oppimiamme optimointitekniikoita käytetään myös peliteoreettisissa yhteyksissä.

Peliteorian vallankumous

Matemaatikko John Nash kehitti 50-luvulla peliteorian, joka on yksi käytetyimmistä analyyttisista kehikoista niin taloustieteessä kuin biologiassa, evoluutioteoriassa ja politiikantutkimuksessa. Kansantaloustieteen kehitykseen peliteoria vaikutti suorastaan mullistavasti; ei ihme, että Nashille myönnettiin ns. taloustieteen Nobel -palkinto hienosta elämäntyöstä.

Peliteorian avulla kuvataan tilannetta, jossa osapuolten toimet tai päätökset ovat toisistaan riippuvaisia. Lienee helppo kuvitella ekonomistien löytämiä sovellusmahdollisuuksia – talous muodostuu juuri siitä, että ihmiset, yritykset ja instituutiot ovat vuorovaikutuksessa keskenään.

Perheenjäsenet neuvottelevat siivousvuoroista ja viikkorahoista. Yritysten työnantajat ja työntekijät sopivat palkoista, valtiot asettavat itselleen ja toisilleen saastepäästörajoja Kiotossa, EU-maat kiistelevät keskenään rahaliiton säännöistä... Paljon lyhemmän listan saisi koottua hakemalla esimerkkejä siitä, millainen ihmisten välinen toiminta ei sopisi peliteorian puitteisiin.

Ohessa näemme jälleen kerran yksinkertaisimman mahdollisen pelin: se esitetään pelkkänä numerotaulukkona. Sillä havainnollistetaan tilannetta, jossa osapuolet tekevät päätöksiä sen mukaan, mitä olettavat toisen päättävän tai päättäneen (jos sinä näin, niin minä näin, mutta jos sinä noin, niin minä noin).

Peliesimerkkimme pohjautuu ns. vangin pulmaan, joka saattaa joillekin lukijoille olla tuttu yläasteen matematiikan kursseilta. Tässä vangin pulmaksi nimitetty tilanne on laitettu esittämään kahden yrityksen pyrkimystä jakaa markkinat keskenään. Ehkä voisimme puhua vaikkapa öljymarkkinoista. Merkitään näitä yrityksiä A:lla ja B:llä.

Olettakaamme, että kumpikin yritys voi valita joko korkean tuotannon tason (K) tai matalan tuotannon tason (M). Jos molemmat tuottavat paljon, öljyn hinta laskee. Olkoot tällöin voitto yritystä kohti 1 yksikkö. Jos kumpikin tuottaa vähän, öljyn tarjonta kokonaisuudessaan jää vähäiseksi ja hinta nousee. Voitto yritystä kohti olkoon silloin 2. Paras tulos yhdelle yritykselle olisi se, että toinen tuottaisi vähän ja se itse paljon; koko toimialan tuotanto pysyisi silloin riittävän alhaalla, mikä estäisi hinnan laskun. Mutta se, joka voisi tuottaa hiukan enemmän tuolla korkealla hinnalla, saisi parhaan voiton, 3 yksikköä. Oletamme, että "lyhemmän korren" vetänyt tekisi tässä tilanteessa nollatuloksen.

Taulukossa jokaisen laatikon vasemmanpuoleinen numero kuvaa A:n ja oikeanpuoleinen B:n voittoa yllä kuvatuissa eri tilanteissa.

		yritys B: K	yritys B: M
yritys A	K	1 1	3 0
	M	0 3	2 2

Miten peli etenee? Katso ensin tilannetta yrityksen A näkökulmasta. Ensin A harkitsee, mitä tehdä, jos B päättäisi tuottaa paljon öljyä. Silloin A on jommassa kummassa vasemmanpuoleisessa kuvion laatikossa. A saa voiton 1, jos se valitsee korkean tuotannon tason, ja jää nollille, jos se valitsee matalan tuotannon tason. A:n on siis parasta tuottaa itsekin paljon. Entä jos B päättääkin tuottaa vähän? A valitsee silloin jomman kumman oikeanpuoleisista laatikoista. Silloinkin A:n näyttäisi olevan parasta valita korkea tuotannon taso ($3 > 2$).

Sanomme, että yrityksen A dominoiva strategia on tuottaa paljon, koska se on parasta, mitä A voi tehdä riippumatta siitä, mitä B tekee.

Tee nyt seuraava harjoitus: katso asiaa B:n näkökulmasta. Jos teet harjoituksen oikein, huomaat, että myös B:n dominoiva strategia on tuottaa paljon, teki A sitten miten päin tahansa.

Niinpä peli päätyy "tasapainoon" vasemmassa yläkulmassa, jossa kumpikin saa voiton 1 ja kumpikin tuottaa paljon. Nimitämme tätä tilannetta Nash-tasapainoksi.

Mutta kuinka näin käykään – näemmehän taulukosta, että kumpikin yritys saisi voiton 2, jos kumpikin tuottaisi vähän! Miksi yritykset eivät päädy siihen?

Ne eivät päädy siihen siksi, että kumpikin tietää toisen kiusauksen pettää eli tuottaa sittenkin vähän enemmän toisen tuottaessa vähemmän. Elleivät yritykset voi tehdä sitovaa sopimusta, joka estää pettämisen, päätyy tämä peli aina kummallekin epäedulliseen lopputulokseen (emme tässä nyt ota lainkaan huomioon öljyn ostajien etua).

Kumpikin yritys siis voittaisi, jos pelaajat pystyisivät sopimaan asioistaan etukäteen – ja sitovasti.

Tämän yksinkertaisenkin pelilaatikon kanssa analyysia voisi rikastaa vaikka kuinka pitkälle – kuin sakkilaudalla. Pelejä on eri mittaisia, toistuvia tai vain yhden kerran pelattavia. Ja sopimistapoja niin ikään monen tyyppisiä.

Esimerkissämme kuviteltiin kahta öljyntuottajaa (OPEC pääseekin usein peliteoreetikkojen papereihin). Mutta ei ole vaikea rakentaa itse aivan toisenlaisia asioita esittäviä pelejä. Ajatellaanpa vaikka tilannetta, jossa yhteiskunnan kannalta olisi toivottavaa, että jotakin tuotetta, joka saastuttaa, tehtäisiin ja käytettäisiin vähemmän.

Taloustieteilijän arkityössä peliteoreettiset tutkimukset eivät näytä nelikulmioon kootuilta numeroilta, vaan joukolta tavoitefunktioita, joille haetaan ratkaisua. Edellä käsittelimme optimointia. Peliteoreettinen malli voi olla esimerkiksi sellainen, jossa yksi tilanteen osapuoli ensin maksimoi tavoitettaan jollakin rajoitteella, ja tämän maksimoinnin tulos sitten asetetaan toisen osapuolen tavoitefunktion rajoitteeksi.

Optimoinnin ja peliteorian alkeitten jälkeen matematiikkapäivien yleisö siirtyi miettimään muun muassa keynesiläistä talouspolitiikkaa ja kansainvälisen kaupan kiemuroita. Niihin palataan osassa 2, joka julkaistaan Solmun seuraavassa numerossa 2/2009.

Lähteet

David Begg – Stanley Fischer – Rudiger Dornbusch: Economics 7th ed., 2005

Peter Birch Sorensen – Hans Jorgen Whitta-Jacobsen: Introducing Advanced Macroeconomics, 2005

Mai Allon omat luennot Helsingin yliopistossa