Neljä tietä derivaattaan

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Tarmo Hautajärvi, Jukka Ottelin ja **Leena Wallin-Jaakkola:** *Laudatur 7. Derivaatta.* Otava 2006. 195 s. 15,80 euroa.

Markku Halmetoja, Kaija Häkkinen, Jorma Merikoski, Lauri Pippola, Harry Silfverberg, Timo Tossavainen, Teuvo Laurinolli ja **Timo Sankilampi**: *Matematiikan taito 7. Derivaatta.* WSOY Oppimateriaalit 2006. 182 s. 12,90 euroa.

Jukka Kangasaho, Jukka Mäkinen, Juha Oikkonen, Johannes Paasonen, Maija Salmela ja **Jorma Tahvanainen**: *Pitkä matematiikka 7. Derivaatta.* WSOY Oppimateriaalit 2006. 209 s. 12,80 euroa.

Pekka Kontkanen, Jukka Lehtonen, Riitta Liira, Kerkko Luosto ja **Anja Ronkainen**: *Pyramidi 7. Derivaatta.* Tammi 2006. 248 s. 12,80 euroa.

Aluksi

Lukion matematiikan pitkän oppimäärän keskeisenä teemana voi pitää differentiaali- ja integraalilaskentaa. Differentiaalilaskennan keskeinen käsite on derivaatta.

Derivaatta lienee tullut matematiikan sanastoon 1700-luvun lopulla, kun Lagrange rupesi käyttämään merkintää $f'(x)$ ja nimitystä *fonction dérivée*, johdettu funktio. Niinpä derivaatta saksassa on *Ableitung* ja suomeenkin oli 1900-luvun alussa tarjolla sana *johdos*. Lagrangen teko ei ehkä kasvata hänen muuten pitkää ansiolistaansa: derivaatta-sana ja derivaatan laskennolliseen määrittämiseen viittaava merkintä ovat luultavasti häivyttäneet derivaatan, differentiaaliosamäärän, varsinaista merkitystä hetkellisen muutosnopeuden ilmaisijana.

Solmuissa 2/2006 ja 2/2007 esiteltiin rinnakkain lukion oppikirjasarjojen tekijöiden lähestymistapoja lukion pitkän matematiikan kursseihin 1 (funktiot ja yhtälöt) ja 3 (geometria). Tällä kertaa tarkastelun kohteena on kurssi 7, derivaatta, ja neljä tapaa muuntaa opetussuunnitelman keskeiset sisällöt, "rationaaliyhtälö ja -epäyhtälö; funktion raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta; polynomifunktion, funktioiden tulon ja osamäärän derivoiminen; polynomifunktion kulun tutkiminen ja ääriarvojen määrittäminen", oppimateriaaliksi.

Käytän kirjoista alempana lyhenteitä LA, MT, PM ja PY. Kerron vain itse kirjoista. Niihin liittyviä salasanan takaa kustantajien nettisivuilta löytyviä oheismateriaaleja ja tehtävien ratkaisuja ja mahdollisia virheiden oikaisuja en ole nähnyt, en myöskään voi ottaa huomioon sitä, että eri kirjasarjat jakavat aineistoa osin eri kursseihin.

Kirjojen sisällön tarkastelua

Muut kuin PY käyvät suoraan asiaan, opetussuunnitelman ensimmäiseen sisältöön, rationaalifunktioon. PY aloittaa lyhyellä historiallisella katsauksella, sitten luvulla, jossa lähdetään liikkeelle abstraktista funktion tai kuvauksen määritelmästä ja käsitellään seikkaperäisesti funktion monotonisuutta.

Rationaalifunktion kaikki kirjat kertovat olevan kahden yhden muuttujan polynomin osamäärä. MT sallii useamman kuin yhden muuttujan, muttei juuri näytä tätä laajennusta käyttävän. Yksikään ei mainitse, että rationaalifunktioita voisivat olla esimerkiksi

$$f(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x}$$

tai

$$g(x) = \frac{\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x}}{\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x^2 - \sqrt{3}}},$$

siis funktiot, joiden lausekkeessa muuttujaan ja vakioihin on sovellettu vain enintään neljää peruslaskutoimitusta. PM kuitenkin ilmoittaa, että kun murtolausekkeisiin sovelletaan näitä laskutoimituksia, päädytään sievennysten jälkeen kahden polynomin osamäärään eli rationaalifunktioon.

Seuraavan oppisisällön osion käsittelyn kaikki kirjat alkavat raja-arvosta. MT on laittanut osin alkuun muutaman viittauksen siihen, että 1600-luvulla alettiin tarkastaa muutosta matemaattisesti, ja tässä on keskeisessä asemassa raja-arvo. Huomautusta voi pitää hiukan harhaanjohtavana sikäli, että raja-arvo tuli näiden muutostarkastelujen tueksi matematiikkaan oikeastaan vasta 200 vuotta myöhemmin. PY alkaa koko raja-arvotarkastelun toispuolisista raja-arvoista. Kaikki kirjat käyttävät jonkinlaisena johdantoperusteluna tyyppiä

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

olevan funktion käyttäytymistä arvon a lähellä. Funktion arvoja lasketetaan laskimella ja havaitaan niiden osuvan $2a$:n lähelle. Vain MT sanoo rehellisesti heti, että tarkasteltava lauseke on sama kuin $x + a$ aina, kun $x \neq a$. Minusta tämän ilmeisen tiedon panttaaminen siksi, kunnes laskintyötä on tarpeeksi tehty, on eräänlaista oppilaan ja matematiikan ylenkatsomista.

Raja-arvon määritelmäksi kaikki kirjat valitsevat eräänlaisen dynaamisen version: $\lim_{x\to a} f(x) = b$ tarkoittaa sitä, että f:n arvot *saadaan* mielivaltaisen lähelle arvoa b, kun x lähestyy a:ta. Raja-arvossa ei kuitenkaan oikeastaan ole kyse siitä, mitä saadaan aikaan kun muuttuja kuljeskelee rajakohdan lähellä, vaan yksinkertaisesti funktion arvojen sijainnista, aivan staattisesti. MT ja PY esittävät myös täsmällisen raja-arvon määritelmän, edellinen kurssin ulkopuolista ainesta osoittavan merkin jälkeen, jälkimmäinen kirjan lopussa olevassa syventävässä aineksessa. Muut kirjat kuin PM esittävät raja-arvojen rationaaliset laskusäännöt – ilmoitusasioina, ilman viitettäkään siihen suuntaan, että säännöt olisivat määritelmän nojalla todistettavaa ainesta. Vain MT määrittelee raja-arvon äärettömässä ja myöskin "raja-arvon ∞".

Erityisesti PM esittää raja-arvo-osiossa useita esimerkkejä rationaalifunktion raja-arvon laskemisesta nimittäjän nollakohdassa, pisteessä, jossa funktio ei ole määritelty. Esimerkit alkavat aina niin, että funktion argumentiksi sijoitetaan tämä nimittäjän nollakohta ja todetaan ongelma. Kun juuri edellä on opeteltu sitä, että rationaalifunktion nimittäjän nollakohdat eivät kuulu funktion määrittelyjoukkoon, menetelmä – vaikka toki harmiton – on hiukan kyseenalainen. PY on tässä kohden huolellinen.

Funktion raja-arvo liittyy funktion jatkuvuuteen. Jatkuvuutta käsittelee laajimmin PY, suppeimmin MT. LA esittää hiukan omituisen määritelmän käsitteelle funktion f jatkuvuus kohdassa a: "Funktio on jatkuva määrittelyjoukkonsa kohdassa (sen läheisessä ympäristössä), jos tässä kohdassa funktiolla on raja-arvo ja se on yhtä suuri kuin funktion arvo." Mitä tässä tarkoittaa läheinen ympäristö ja miksi sitä tarvittaisiin? Samalla aukeamalla LA:n kirjoittajille näyttää tulleen toinenkin oikosulku: he tarkastelevat funktiota $f(x)$, joka määritellään eri lausekkeilla, kun $x \neq -2$ ja $x = -2$; kysymys on tietysti jatkuvuudesta kohdassa -2. Tällöin ei ole mielekästä ruveta kyselemään sen edellisen arvoa kohdassa -2, kuten kirjassa tehdään, vaan raja-arvoa. PY ja PM esittävät jatkuvien funktioiden väliarvolauseen eli Bolzanon lauseen, PY lisäksi lauseen, joka takaa jatkuvan funktion saavan suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa. Bolzanon lause kuuluu myös MT:n ainekseen, mutta kirja esittää sen vasta loppupuolella funktion kulun tutkimista käsittelevässä luvussa.

Kaikki kirjat siirtyvät funktion jatkuvuudesta derivaattaan. Jokainen määrittelee derivaatan graafisesti, sekantti-tangenttitarkastelulla. Implisiittisesti oletetaan, että tangentti on ymmärrettävä ja realisoitavissa oleva käsite. Mutta mitä tarkkaan ottaen merkitsee esimerkiksi se, että "sekantti rajatta lähenee tiettyä suoraa"? Vaihtoehtoista (ja tämän kirjoittajan mielestä huomattavasti konkreettisempaa) tarkastelukulmaa, keskinopeuden ja hetkellisen nopeuden myötä suoraan saatavaa erotusosamäärää ja sen raja-arvoa, joka myös historiallisesti perustelee koko raja-arvokäsitteen tarpeellisuuden, ei derivaatan määrittelyyn käytetä, vaikka toki kaikki kirjat kertovat derivaatan ja muutosnopeuden yhteyden, ja LA alkaa koko derivaattaluvun asian pohdiskelulla. Kirjat ovat juuri saaneet käsiteltyä enemmän tai vähemmän kattavasti raja-arvokäsitettä. Miksei siihen luoteta, miksi tarvitaan kiertotie funktion kuvaajan ja vaikeasti määriteltävän tangenttikäsitteen kautta. Kun derivaatta on – raja-arvona – käytettävissä, ei ole ongelma päätyä tangentin määritelmään suorana, jonka kulmakerroin on derivaatta.

Derivaatan merkintänä kaikki kirjat käyttävät Lagrangen pilkkumerkintää $f'(x)$. LA, MT ja PY listaavat myös operaattorimerkinnän $Df(x)$ ja Leibnizin havainnollisen ja derivoinnin kohteena olevan muuttujan ilmaisevan $\dfrac{df}{dx}$:n, PM:lle riittää vain operaattorimerkki. Newtonin derivaattamerkkiä $\dot{f}$, joka on kovin tavallinen erilaisissa aikaderivaatoissa, eivät kirjat ota esiin. – Derivaattafunktiolla saattaa olla derivaatta jne. Toinen ja n:s derivaatta mainitaan tekstiosastossa vain MT:ssa ja PY:ssa. Niitä ei kirjoissa sen tarkemmin kuitenkaan analysoida tai hyödynnetä. PM:ssa on harjoitustehtävä, jossa tulee vastaan toinen derivaatta ja sen yhteys käyrän kuperuussuuntaan, MT:ssa useitakin tehtäviä, joissa toisella derivaatalla on rooli.

Derivaatan käyttökelpoisuus perustuu luonnollisesti siihen, että derivaatan muodostaminen voidaan usein tehdä helposti muutamien derivointisääntöjen perusteella. PY listaa heti kaikki derivaatan ja rationaalisten laskutoimitusten yhteydet, MT alkaa kahden funktion summalla ja tulolla, PM rajoittuu aluksi vain kaavoihin $(kf)'(a) = kf'(a)$ ja $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$. LA:n ensimmäinen derivointikaava on potenssin derivointikaava, joka johdetaan, kun eksponentti on 1, 2 tai 3 ja tästä päätellään kaavan yleinen muoto. Jotenkin tasapainottomalta vaikuttaa se, että tämän jälkeen kahden funktion summan ja vakiolla kerrotun funktion derivaattojen muoto esitellään derivaatan määritelmän nojalla perusteltuina. – Muutkin kirjat perustelevat nämä kaavat, tietenkin nojautuen vastaavaan raja-arvojen laskusääntöön, joka on joka kirjassa annettu puhtaana ilmoitusasiana.

Potenssin derivaatan kaava on kirjoissa tärkeä, onhan käytössä olevien funktioiden valikoima melkein rajoitettu polynomifunktioihin. LA:n kevyt suhtautuminen tähän kaavaan on jo yllä mainittu. Toista äärilaitaa edustaa MT, joka käsittelee asiaa jo esipuheessa. MT ottaa potenssin derivoinnin yhteydessä esiin matemaattisen induktion ja saa perusteltua potenssin derivoinnin tulon derivointikaavan avulla. LA on lykännyt todistuksen kirjan lopun erikoisainekseen ja suoriutuu siellä tehtävästä olennaisesti laskemalla jakolaskua

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0},$$

tosin ilman jakokulmaa. PM ottaa suoraan käyttöön polynomin $x^n - a^n$ tekijöihin jaon, perusteluna alaviitteessä laskettu $x^4 - a^4$:n tekijöihin jako.

Olisikohan potenssin derivaattaa tässä kurssissa mahdollista lähestyä katselemalla potenssia $(a + h)^n = (a+h)(a+h)\cdots(a+h)$? Ei ole vaikeaa hahmottaa sitä, että lauseke saa sulkujen poistamisen jälkeen muodon $a^n + na^{n-1}h + h$:n korkeampia potensseja (ja jos halutaan, induktiota voi käyttää). Erotusosamäärän raja-arvon oikea muoto on tästä heti nähtävissä.

Kaikki kirjat perustelevat tulon derivointikaavan derivaatan määritelmän ja raja-arvojen laskusääntöjen avulla. Yleensä suoraviivainen PM ei tyydy tässä yhteydessä tavalliseen temppuun $f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x) = f(x + h)g(x + h) - f(x + h)g(x) + f(x + h)g(x) - f(x)g(x)$, vaan keksii eksoottisennäköisen hajotelman

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - f(a)g(a) \\ &= (f(x) - f(a))g(a) + f(a)((g(x) - g(a)) \\ &\quad +(f(x) - f(a))(g(x) - g(a)). \end{aligned}$$

Kyseessä on – niin kuin kirjassa todetaankin – pinta-alojen välinen relaatio, kun suorakaide jaetaan neljäksi osasuorakaiteeksi.

Osamäärän derivointikaavan johto löytyy täydellisempänä vain LA:sta ja MT:stä. PM ilmoittaa osamäärän derivoituvaksi ja määrittää derivaatan lausekkeen tulon derivointikaavan avulla. PY esittää saman asian harjoitustehtävänä, muttei viittaa siihen, että tämä laskutapa edellyttää osamäärän olevan derivoituvan.

Derivaatan määrityksen olennaisimpia peruspilareita on mahdollisuus muodostaa yhdistetyn funktion derivaatta, kun yhdistämiseen osallistuvien funktioiden derivaatat ovat hallinnassa. Lukion opetussuunnitelman omituisuuksien takia derivaatta-kurssin funktiovalikoima on suppea, joten yhdistetyn funktion derivoinnin lykkääntyminen myöhemmäksi ei liene katastrofi. MT ja PM ilmoittavat kuitenkin kaavan $(f(x)^n)' = nf(x)^{n-1}f'(x)$.

Derivaattaa sovelletaan joka kirjassa tangentin määritykseen – joka toisaalta on ollut derivaattakäsitteen lähtökohtana. LA ja PY esittävät yhtenä sovelluksena kahden toisiaan leikkaavan käyrän välisen kulman määrittämisen. Tässähän on kyse leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien välisestä kulmasta, johon päästään käsiksi, kun tangenttien kulmakertoimet tunnetaan. LA esittää kaavan, joka periytyy tangenttien suuntaisten vektorien pistetulosta, PY puolestaan kaavan, joka lähtee kahden kulman erotuksen tangentista. Kumpikin kaava esitetään perusteluitta, *deus ex machina*. LA antaa toiseksi mahdollisuudeksi käyttää kaavaa $\tan\alpha = k$ kertomatta sanallakaan, mikä on k.

"Funktion kulun tutkiminen" on kaikissa kirjoissa käsitelty derivaatan sovellus. PM esittää tämän kirjoittajalle aikaisemmin tuntemattoman, näppärän termin *terassikohta*. Sellainen on esimerkiksi funktiolla x^3 origon kohdalla. LA puhuu *tasannekohdasta* ja kertoo tällaisia kohtia nimitettävän "käännepisteiksi". Kun käännepisteen yleisempi merkitys ei tule mainituksi, saattaa oppilaalle jäädä hiukan virheellinen käsitys.

Derivaatasta funktion kululle saatava keskeisin tulos on

$$f'(x) \geq 0 \text{ välillä }]a, b[\Rightarrow f(a) \leq f(b).$$

Kirjat perustelevat sen yleensä graafisesti, nojautuen ajatukseen nousevien tangenttien ja kasvavuuden samansisältöisyydestä. PY esittää lisätieto-osastossaan asian täsmällisen todistuksen edellyttämän differentiaalilaskennan väliarvolauseen todistuksineen (tietysti nojautuen Rollen lauseeseen, jonka täsmällinen todistus vaatisi Bolzano-Weierstrassin tai Heine-Borelin lauseen tai vastaavan päättelyn ja viime kädessä reaalilukujen täydellisyysominaisuuden). Myös MT mainitsee väliarvolauseen lopun tutkimus- ja harrastustehtäviä -osastossa. Huolestuttava on LA:n esitys: kirja perustelee (ei kylläkään ihan korrektisti) sen, että kasvavan funktion derivaatta on positiivinen ja ilmoittaa tämän jälkeen heti, että jos derivaatta on positiivinen, funktio on kasvava! Matematiikan oppikirjan ei soisi antavan tämänlaisia riittävän ja välttämättömän ehdon sekoittamisen malleja.

Derivaattakurssin työkalupakkiin ei kuulu toinen derivaatta. Sille olisi käyttöä funktion kulun tarkastelussa. Esimerkiksi LA:n sivun 110 esimerkin ”Millä vakion $a \neq 0$ arvoilla funktiolla $f(x) = \frac{1}{4}ax^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$ on minimikohtia?” hankalannäköinen ratkaisu lyhenisi kovin, jos saisi käyttää hyväksi tietoa funktiosta $f''(x) = 3ax^2 - 1$.

Derivaatan helposti markkinoitava ”hyödyllinen” sovellusala on yhden muuttujan funktion optimointi. (Jätän tässä kertomatta tosiperäisen kertomuksen matematiikan opetuksesta ja Kiinan kulttuurivallankumouksesta.) Kaikki kirjat esittelevät geometrisia optimointitehtäviä. Kun funktiovalikoima on pieni, esimerkkivalikoimakin jää rajalliseksi. Ainakin LA, MT ja PM käsittelevät tehtävän, jossa suorakulmaisesta levystä poistetaan neljä kärkineliötä niin, että saadaan taiteltua mahdollisimman suuritilavuuksinen uunipelti. PM:n kirjoittajat ovat keksineet hiukan innovatiivisen esimerkkialan: rakennelmat, joiden tilavuutta maksimoidaan niitä pystyssä pitävien teräsputkien pituuden suhteen. – PY markkinoi ääriarvotehtävän ratkaisuksi ”Fermat'n lausetta”, jonka mukaan ”suljetulla välillä jatkuva ja avoimella välillä derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai derivaatan nollakohdassa”. Vaikka Pierre de Fermat ratkaisikin ääriarvotehtäviä laskutoimituksin, jotka vastaavat derivaatan nollakohdan määritystä, on hänen nimensä kytkeminen asiaan, jossa kaikki käsitteet ovat huomattavasti Fermat'n kuoleman jälkeen syntyneitä, aika keinotekoista. Itse en ainakaan ole tähän Fermat'n lauseeseen muualla törmännyt.

Toista derivaatan vähintään yhtä hyödyllistä sovellusta, ”funktion argumentin pientä muutosta h vastaava funktion arvon pieni muutos on likimain $f'(x)h$” eli differentiaalikehitelmää en kirjoista löydä. Miksi?

Kirjojen pintavertailua

Kaikissa kirjoissa on kertausosasto, jossa asiat esitetään tiivistetysti. Se saattaisi olla paras opetuksen runko. Kirjoissa on asiahakemisto ja MT:ssä myös pieni suomalais-englantilainen sanasto (joka näyttää periytyvän kirjan aiemmasta versiosta, kun myös *yhdistetty funktio* on mukana).

Kirjoista ei puutu laskutehtäviä. Niiden lukumäärät ovat LA 392, MT 420, PM 437 ja PY 466. Tehtäviin on annettu ratkaisut. Jostain syystä LA ja PY jättävät ratkaisun tai ratkaisuviitteen antamatta niissä (harvoissa) tapauksissa, jossa tehtävä alkaa sanoin ”osoita, että” tai ”todista, että”. Tehtävät ovat lähes kautta linjan helppoja. Loistavan singulariteetin muodostaa MT:n tehtävä numero 340, selvästi matematiikkakilpailutasoinen tehtävä, jonka kuulumista kurssiin sopii epäillä, kun ratkaisu perustuu Vietan kaavan soveltamiseen 20. asteen yhtälöön. LA maustaa tehtäväosastoaan muutamalla erikielisellä tehtävällä – kielivalikoimaan on tullut jopa nynorsk. Vieraiden kielten kielentarkistus ei ole ehkä aivan loppuunsa hioutunut, kun tekstit ovat paikoin kömpelönoloisia ja ainakin tehtävässä 132 englannin sanan *parallel* paikalle on lipsahtanut *linear*. LA on myös sirotellut kirjaan ongelmia, vakavia ja vitsikkäitä.

LA, MT ja PM esittävät alussa ehdotuksen kurssin ajankäytöstä, LA erikseen 45 ja 75 minuutin pituisille oppitunneille. Kirjoissa LA ja PY on muutama huvittava kuva. LA, MT ja PM käyttävät painatuksessa yhtä lisäväriä, LA siniharmaata, MT sinertävää ja PM punaista. PY on muita värikkäämpi.

Siitä huolimatta, että aikaisemmissa oppikirjavertailuissa jo asiaa kummastelin, en malta olla puuttumatta LA:n, PM:n ja PY:n omituiseen kieliasuun. Onko jossain todella päätetty ja määrätty, että matematiikan kirjaa kirjoitettaessa ei toimita niin kuin suomen kielessä yleensä, vaan käytetään esim. rakenteita ”Derivoi. a) x^2 b) x^4 c) x^{28} d) x^{2007} e) x” (ilman loppupistettä tietysti)? Ja miksi malliesimerkit pitää kirjoittaa kirjaan ikään kuin liitutaululle laskua selitettäessä syntyvät välimerkinnät? Vain MT on johdonmukaisesti normaalikielinen. PM käyttää osin oikeaa kieltä. LA (josta yllä oleva lainaus oli), kirjoittaa tehtävien tekstit kunnolla silloin, kun tehtävä on lainattu vanhoista ylioppilaskirjoituksista, mutta samalla sivulla oleva aivan samanrakenteinen ”alkuperäistehtävä” on ilman välimerkkejä.

Lopuksi

Mikä olisi ”toimituksen suositus” derivaattakurssin kirjaksi? Se ei varmaankaan olisi LA. LA:sta välittyvä kuva ei ole solidia tietämystä henkivä. Kömmähdyksiä ja epätarkkuuksia on aika paljon. Kirjalle olisi varmaan ollut eduksi jonkinasteinen ennakkotarkastus. PY käyttää runsaasti tilaa ”oikean matematiikan” opettamiseen mielenkiinnoltaan kyseenalaisessa kehyksessä, funktion monotonisuuden yhteydessä, ja on muutenkin kovin laaja ja rönsyilevä – onko raja-arvoihin todellakin mentävä toispuolisten raja-arvojen kautta? Valintani kävisi MT:n ja PM:n välillä. Jälkimmäinen on "kansanauto", vailla erikoisominaisuuksia, mutta tekee sen, minkä tekee, ihan kunnolla. MT olisi monessa suhteessa matemaatikon valinta – ainoa kirja, josta voi ainakin nähdä, miten matematiikkaa esitetään ja kirjoitetaan. Makuasia, kumman valitsee. Ja makuasioista on parempi kiistellä kuin puhtaista faktoista.

Mutta kaikkien oppikirjojen poukkoilevat kompromissit matemaattisen – siis loogis-deduktiivisen – ja heuristis-käytännöllisen esityksen välillä panevat kyllä vakavasti miettimään matematiikanopetuksen perimmäisiä kysymyksiä. Onko opetettava matematiikkaa vai laskentoa? Jos päätetään opettaa matematiikkaa, niin ainakin nyt esillä oleva kvartetti osoittaa, että oppisisältönä analyysi ei tätä tarkoitusta oikein pysty palvelemaan. Matematiikan opetukselle ja oppimiselle saattaisi olla siunauksellista palata lukiossa *precalculus*-sisältöihin. Niissä riittäisi matemaattista ainesta, joka olisi myös rehellisesti esitettävissä.

Solmun keskustelupalsta

Solmun keskustelupalsta on osoitteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/cgi-bin/yabb2/YaBB.pl`