Potenssisummia numeerisella integroinnilla

Jorma Merikoski
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Tampereen yliopisto

Johdanto

Olkoon f välillä $[a, b]$ jatkuva reaalifunktio. Lukion pitkän matematiikan kurssiin 12 kuuluu integraalin

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

likimääräinen laskeminen puolisuunnikassäännöllä

$$T = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n)$$

ja Simpsonin säännöllä

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Tässä n on positiivinen kokonaisluku,

$$h = \frac{b-a}{n}$$

ja

$$y_i = f(a + ih), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Lisäksi Simpsonin säännössä n on parillinen. Tulosten tarkkuutta selvittävät virhekaavat. Jos f on kahdesti derivoituva, niin

$$I - T = -\frac{h^2}{12} f''(\xi)(b-a), \tag{1}$$

missä $a < \xi < b$ (mutta ξ:stä ei yleensä tiedetä sen enempää). Jos f on neljästi derivoituva, niin

$$I - S = -\frac{h^4}{180} f^{(4)}(\xi)(b-a), \tag{2}$$

missä $a < \xi < b$. Näiden kaavojen johto (ks. esim. [2], [5]) ei kuulu lukion kurssiin.

Toisaalta, jos f:n integraalifunktio F tunnetaan, niin $I = F(b) - F(a)$ saadaan tarkasti, jolloin syntyy kiinnostava käänteisprobleema: esitettävä tietylle summalausekkeelle likimääräiskaava I:n avulla. Jos $a = 0$, $b = n$, $h = 1$ ja $f(x) = x^k$, missä $k = 1, 2, 3, 4$, niin tulemme huomaamaan, että saamme T:n tai S:n avulla tarkan kaavan, jossa summa

$$1^k + 2^k + \ldots + n^k$$

esitetään n:n $(k+1)$-asteisena polynomina. Tapaukset $k = 2$ ja $k = 3$ ovat kirjan [1] harjoitustehtävänä (teht. 138), mutta me käsittelemme tätä aihetta laajemmin.

Eulerin-McLaurinin summakaava on, kuten Lindelöf ([5], s. 377) sanoo, analyysin kaikkein mielenkiintoisimpia kaavoja. Emme esitä sitä yleisessä muodossaan (ks. esim. [5], s. 389) vaan tyydymme kahteen erikoistapaukseen. Jos f on neljästi derivoituva, niin

$$I - T = -\frac{h^2}{12}(f'(b) - f'(a)) + \frac{h^4}{720} f^{(4)}(\xi)(b-a), \tag{3}$$

missä $a < \xi < b$. Jos f on kuudesti derivoituva, niin

$$I - T = -\frac{h^2}{12}(f'(b) - f'(a)) + \frac{h^4}{720}(f'''(b) - f'''(a)) - \frac{h^6}{30240} f^{(6)}(\xi)(b-a), \tag{4}$$

missä $a < \xi < b$.

Triviaali tapaus $k = 1$

Tiedämme aritmeettisen summan kaavan perusteella, että

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Siksi tapaus $k = 1$ ei ole kiinnostava, mutta täydellisyyden vuoksi käsittelemme senkin. Koska funktiolle $f(x) = x$ on $f''(x) = 0$, on virhekaavan (1) mukaan $T = I$. Siis

$$\frac{1}{2}\big[0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + 2(n-1) + n\big] = \int_0^n x \mathrm{d}x = \frac{n^2}{2},$$

joten

$$\begin{aligned} &1 + 2 + \ldots + (n-1) + n \\ &= 1 + 2 + \ldots + (n-1) + \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \\ &= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Tapaus $k = 2$

Tapa 1. Käytetään puolisuunnikassääntöä. Vaikka se ei laske tarkasti integraalia

$$I = \int_0^n x^2 \mathrm{d}x,$$

saamme virhekaavalla (1) lausekkeen $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ tarkasti, koska funktion $f(x) = x^2$ toinen derivaatta $f''(x) = 2$ on vakio. Virhekaavan perusteella

$$T = I + \frac{1}{12} \cdot 2(n - 0) = I + \frac{n}{6}$$

eli

$$\frac{1}{2}\big[0 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + \ldots + 2(n-1)^2 + n^2\big] = \int_0^n x^2 \mathrm{d}x + \frac{n}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n}{6},$$

joten

$$\begin{aligned} &1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 \\ &= 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2} \\ &= \frac{n^3}{3} + \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Tapa 2. Käytetään Simpsonin sääntöä. Mutta kannattaako se, koska laskut tulevat pitemmiksi kuin tavassa 1? Voimme vastata myönteisesti, jos kuvittelemme, että tunnemme vain puolisuunnikassäännön ja Simpsonin säännön johtoineen mutta emme virhekaavoja (1) ja (2). Silloin emme voi käyttää tapaa 1, mutta tiedämme, että funktiolle $f(x) = x^2$ on $S = I$.

Jos n on parillinen, niin

$$\frac{1}{3}\big[0 + 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + \ldots + 2(n-2)^2 + 4(n-1)^2 + n^2\big] = \int_0^n x^2 \mathrm{d}x = \frac{n^3}{3}$$

ja

$$\frac{1}{3}\big[1^2 + 4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 4^2 + \ldots + 2(n-1)^2 + 4n^2 + (n+1)^2\big] = \int_1^{n+1} x^2 \mathrm{d}x = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{1}{3}.$$

Yhteenlaskemalla saamme

$$\frac{5}{3} \cdot 1^2 + 2\big[2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2\big] + \frac{5}{3}n^2 + \frac{1}{3}(n+1)^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{1}{3},$$

josta

$$\begin{aligned} &2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 \\ &= \frac{1}{6}\big[n^3 + (n+1)^3 - 5n^2 - (n+1)^2\big] - 1 \end{aligned}$$

ja edelleen

$$\begin{aligned} &1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 \\ &= \frac{1}{6}\big[n^3 + (n+1)^3 - 5n^2 - (n+1)^2\big] - 1 + 1 + n^2 \\ &= \frac{1}{6}\big(2n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 5n^2 - n^2 - 2n - 1 + 6n^2\big) \\ &= \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{1}{6}n \cdot 2(n+1)(n + \frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

Jos n on pariton, niin voimme tarkastella vastaavasti integraaleja

$$\int_0^{n-1} x^2 \mathrm{d}x \quad \text{ja} \quad \int_1^n x^2 \mathrm{d}x.$$

Kuitenkin on mukavampi todeta, että $n-1$ on tällöin parillinen, joten

$$\begin{aligned}
&1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2+n^2\\
&\quad=\frac{1}{6}(n-1)n[2(n-1)+1]+n^2\\
&\quad=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)+n^2\\
&\quad=\frac{1}{6}[n(2n^2-3n+1)+6n^2]\\
&\quad=\frac{1}{6}n(2n^2-3n+1+6n)\\
&\quad=\frac{1}{6}n(2n^2+3n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).
\end{aligned}$$

Tapa 3. Käytetään Eulerin-McLaurinin summakaavaa (3). Jätämme sen lukijan tehtäväksi.

Tapaus $k=3$

Tapa 1. Käytetään Simpsonin sääntöä. Koska Simpsonin säännössä integroitava korvataan paloittain polynomeilla, joiden aste on enintään kaksi, on selvää, että tämä sääntö laskee tarkasti kaikkien tällaisten polynomien integraalit. Mutta on yllättävää, että se laskee tarkasti myös kolmannen asteen polynomien integraalit. Jos nimittäin f on tällainen polynomi, niin $f^{(4)}(x)=0$, joten virhekaavan (2) mukaan $S=I$.

Voimme olettaa, että n on parillinen. (Jos n on pariton, niin menettelemme kuten tapauksessa $k=2$.) Tällöin

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\big[0+4\cdot1^3+2\cdot2^3+4\cdot3^3+\ldots+2(n-2)^3\\
&\qquad\qquad+4(n-1)^3+n^3\big]=\int_0^n x^3\mathrm{d}x=\frac{n^4}{4}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\big[1^3+4\cdot2^3+2\cdot3^3+4\cdot4^3+\ldots+2(n-1)^3\\
&\qquad+4n^3+(n+1)^3\big]=\int_1^{n+1} x^3\mathrm{d}x=\frac{(n+1)^4}{4}-\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Jatkamme kuten tapauksessa $k=2$. Saamme

$$\begin{aligned}
&\frac{5}{3}\cdot1^3+2\big[2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3\big]\\
&\qquad+\frac{5}{3}n^3+\frac{1}{3}(n+1)^3=\frac{n^4}{4}+\frac{(n+1)^4}{4}-\frac{1}{4},
\end{aligned}$$

josta

$$\begin{aligned}
&2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3\\
&\quad=\frac{1}{8}\big[n^4+(n+1)^4\big]-\frac{1}{6}\big[5n^3+(n+1)^3\big]-\frac{23}{24},
\end{aligned}$$

ja siis

$$\begin{aligned}
&1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3+n^3\\
&\quad=\frac{1}{8}\big[n^4+(n+1)^4\big]-\frac{1}{6}\big[5n^3+(n+1)^3\big]\\
&\qquad-\frac{23}{24}+1+n^3\\
&\quad=\frac{1}{8}(2n^4+4n^3+6n^2+4n+1)\\
&\qquad-\frac{1}{6}(6n^3+3n^2+3n+1)+\frac{1}{24}+n^3\\
&\quad=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{3}{4}n^2+\frac{1}{2}n+\frac{1}{8}\\
&\qquad-n^3-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+n^3\\
&\quad=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2.
\end{aligned}$$

Tapa 2. Käytetään Eulerin-McLaurinin summakaavaa (3). Jos $f(x)=x^3$, $a=0$, $b=n$ ja $h=1$, niin $f'(x)=3x^2$ ja $f^{(4)}(x)=0$, joten

$$T=I+\frac{1}{12}(3n^2-0)-0=I+\frac{n^2}{4}$$

eli

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\big[0+2\cdot1^3+2\cdot2^3+\ldots+2(n-1)^3+n^3\big]\\
&\qquad\qquad=\int_0^n x^3\mathrm{d}x+\frac{n^2}{4}=\frac{n^4}{4}+\frac{n^2}{4}.
\end{aligned}$$

Saamme siis

$$\begin{aligned}
&1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3+n^3\\
&\quad=1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3+\frac{n^3}{2}+\frac{n^3}{2}\\
&\quad=\frac{n^4+n^2}{4}+\frac{n^3}{2}=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Tapaus $k=4$

Tapa 1. Käytetään Simpsonin sääntöä. Se ei laske tarkasti funktion $f(x)=x^4$ integraalia, mutta koska $f^{(4)}(x)=24$ on vakio, saamme tehtävän ratkaistuksi virhekaavan (2) avulla (vrt. puolisuunnikassääntö tapauksessa $k=2$).

Voimme olettaa, että n on parillinen. Tällöin

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\big[0+4\cdot1^4+2\cdot2^4+4\cdot3^4+\ldots+2(n-2)^4\\
&+4(n-1)^4+n^4\big]=\int_0^n x^4\mathrm{d}x+\frac{24}{180}(n-0)=\frac{n^5}{5}+\frac{2n}{15}
\end{aligned}$$

ja

$$\frac{1}{3}\big[1^4+4\cdot 2^4+2\cdot 3^4+4\cdot 4^4+\ldots+2(n-1)^4$$
$$+4n^4+(n+1)^4\big]=\int\limits_1^{n+1}x^4\mathrm{d}x+\frac{24}{180}(n+1-1)$$
$$=\frac{(n+1)^5}{5}-\frac{1}{5}+\frac{2n}{15}.$$

Jatkamme kuten tapauksissa $k=2$ ja $k=3$. Saamme

$$\frac{5}{3}\cdot 1^4+2\big[2^4+3^4+\ldots+(n-1)^4\big]+\frac{5}{3}n^4+\frac{1}{3}(n+1)^4$$
$$=\frac{n^5}{5}+\frac{(n+1)^5}{5}-\frac{1}{5}+\frac{4n}{15},$$

josta

$$2^4+3^4+\ldots+(n-1)^4$$
$$=\frac{1}{10}[n^5+(n+1)^5-1]$$
$$+\frac{2n}{15}-\frac{1}{6}[5n^4+(n+1)^4+5].$$

Täten

$$1^4+2^4+\ldots+(n-1)^4+n^4$$
$$=\frac{1}{10}[n^5+(n+1)^5-1]+\frac{2}{15}n$$
$$-\frac{1}{6}[5n^4+(n+1)^4+5]+1+n^4$$
$$=\frac{1}{10}(2n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n)+\frac{2}{15}n$$
$$-\frac{1}{6}(6n^4+4n^3+6n^2+4n+6)+1+n^4$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+n^3+n^2+\frac{1}{2}n+\frac{2}{15}n-n^4$$
$$-\frac{2}{3}n^3-n^2-\frac{2}{3}n-1+1+n^4$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n$$
$$=\frac{1}{30}n(6n^4+15n^3+10n^2-1).$$

Huomaamme kokeilemalla, että polynomilla $p(n)=6n^4+15n^3+10n^2-1$ on rationaaliset nollakohdat $n=-1$ ja $n=-\frac{1}{2}$, joten se on jaollinen polynomilla $q(n)=(n+1)(n+\frac{1}{2})$. Suorittamalla jakolaskun saamme $p(n)/q(n)=6n^2+6n-2$, joten $p(n)=(n+1)(n+\frac{1}{2})(6n^2+6n-2)=(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$. Näin saamme tuloksen muotoon

$$1^4+2^4+\ldots+n^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

Tapa 2. Käytetään Eulerin-McLaurinin summakaavaa (3). Jos $f(x)=x^4$, $a=0$, $b=n$ ja $h=1$, niin $f'(x)=4x^3$ ja $f^{(4)}(x)=24$, joten

$$T=I+\frac{1}{12}(4n^3-0)-\frac{1}{720}\cdot 24(n-0)$$
$$=\int\limits_0^n x^4\mathrm{d}x+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}=\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$$

eli

$$\frac{1}{2}\big[0+2\cdot 1^4+2\cdot 2^4+\ldots+2(n-1)^4+n^4\big]=\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}.$$

Siis

$$1^4+2^4+\ldots+(n-1)^4+n^4$$
$$=1^4+2^4+\ldots+(n-1)^4+\frac{n^4}{2}+\frac{n^4}{2}$$
$$=\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}+\frac{n^4}{2}$$
$$=\frac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n).$$

Tapaukset $k=5$ ja $k=6$

Puolisuunnikassäännössä integroitava korvataan paloittain polynomeilla, joiden aste on enintään yksi. Simpsonin säännössä käytetään vastaavasti polynomeja, joiden aste on enintään kaksi. Periaatteessa voidaan myös käyttää polynomeja, joiden aste on enintään kolme, enintään neljä jne. Esimerkiksi käyttämällä enintään kolmannen asteen polynomeja saadaan

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{3h}{8}(y_0+3y_1+3y_2+2y_3+3y_4+3y_5$$
$$+2y_6+\ldots+2y_{n-3}+3y_{n-2}+3y_{n-1}+y_n),$$

missä n on jaollinen 3:lla. (Ks. esim. [2], s. 316, missä integraali on laskettu yhden osavälikolmikon yli.) Kuitenkaan tämä sääntö ei ole Simpsonin sääntöä parempi, sillä nytkin virhe on muotoa vakio kertaa $h^4f^{(4)}(\xi)$ eli likimäärin verrannollinen potenssiin h^4. (”Likimäärin” siksi, että jos esimerkiksi h puolitetaan, niin ξ yleensä muuttuu, jolloin uusi virhe ei ole täsmälleen $\frac{1}{16}$ vanhasta vaan voi erota siitä paljonkin.) Siis tällä säännöllä saadaan lasketuksi summa $1^k+2^k+\ldots+n^k$ vain tapauksessa $k\le 4$, kuten saadaan Simpsonin säännölläkin, ja laskut ovat pitemmät. Toisaalta nämä laskut ovat hyödyllistä ”kaavamanipuloinnin” harjoittelua, joten summan $1^4+2^4+\ldots+n^4$ laskeminen tällä tavalla on hyvä harjoitustehtävä.

Korkeammankaan asteen polynomeja ei kannata käyttää. Tosin virhe yleensä pienenee, jos derivaatat pysyvät kohtuullisissa rajoissa, sillä polynomin asteen ollessa k se on muotoa vakio kertaa $f^{(k+2)}(\xi)h^{k+2}$, kun k on parillinen, ja vakio kertaa $f^{(k+1)}(\xi)h^{k+1}$, kun k on pariton. Mutta saadut kaavat tulevat kovin mutkikkaiksi:

kerrointen suuruusluokka kasvaa ja jotkin niistä saattavat olla negatiivisia. Siksi on parempi soveltaa joko Simpsonin sääntöä pienemmällä h:lla tai jotakin aivan muuta menetelmää.

Korkeamman asteen polynomeilla saatuja integrointikaavoja ei myöskään kannata käyttää summan $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ laskemiseksi. Periaatteessa niin voitaisiin tehdä, mutta käytännössä laskut tulevat varsin työläiksi. Sen sijaan näitäkin summia voidaan laskea helposti Eulerin-McLaurinin summakaavan avulla. Käsittelemme tapaukset $k = 5$ ja $k = 6$ soveltamalla kaavaa (4).

Funktiolle $f(x) = x^5$ on $f'(x) = 5x^4$, $f'''(x) = 60x^2$ ja $f^{(6)}(x) = 0$, joten

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[0 + 2\cdot 1^5 + 2\cdot 2^5 + \ldots + 2(n-1)^5 + n^5]\\ &\quad = \int_0^n x^5 \mathrm{d}x + \frac{1}{12}(5n^4 - 0) - \frac{1}{720}(60n^2 - 0) + 0\\ &\quad = \frac{n^6}{6} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}.\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}&1^5 + 2^5 + \ldots + (n-1)^5 + n^5\\ &\quad = 1^5 + 2^5 + \ldots + (n-1)^5 + \frac{n^5}{2} + \frac{n^5}{2}\\ &\quad = \frac{n^6}{6} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12} + \frac{n^5}{2}\\ &\quad = \frac{1}{12}n^2(2n^4 + 6n^3 + 5n^2 - 1).\end{aligned}$$

Tapaukset $k = 1$ ja $k = 3$ houkuttelevat otaksumaan, että polynomi $p(n) = 2n^4 + 6n^3 + 5n^2 - 1$ on jaollinen polynomilla $q(n) = (n+1)^2$. Niin todellakin on, ja suorittamalla jakolaskun saamme $p(n)/q(n) = 2n^2 + 2n - 1$. Siis

$$1^5 + 2^5 + \ldots + n^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1).$$

Siirrymme tapaukseen $k = 6$. Jos $f(x) = x^6$, niin $f'(x) = 6x^5$, $f'''(x) = 120x^3$ ja $f^{(6)}(x) = 720$, joten

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[0 + 2\cdot 1^6 + 2\cdot 2^6 + \ldots + 2(n-1)^6 + n^6]\\ &\quad = \int_0^n x^6 \mathrm{d}x + \frac{1}{12}(6n^5 - 0)\\ &\qquad - \frac{1}{720}(120n^3 - 0) + \frac{n}{30240}\cdot 720\\ &\quad = \frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}.\end{aligned}$$

Saamme siis

$$\begin{aligned}&1^6 + 2^6 + \ldots + (n-1)^6 + n^6\\ &\quad = 1^6 + 2^6 + \ldots + (n-1)^6 + \frac{n^6}{2} + \frac{n^6}{2}\\ &\quad = \frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42} + \frac{n^6}{2}\\ &\quad = \frac{1}{42}n(6n^6 + 21n^5 + 21n^4 - 7n^2 + 1).\end{aligned}$$

Otaksumme nyt tapausten $k = 2$ ja $k = 4$ perusteella, että polynomi $p(n) = 6n^6 + 21n^5 + 21n^4 - 7n^2 + 1$ on jaollinen polynomilla $q(n) = (n+1)(2n+1)$. Osoittautuu, että näin on. Jakolaskulla saamme $p(n)/q(n) = 3n^4 + 6n^3 - 3n + 1$, joten

$$1^6 + 2^6 + \ldots + n^6 = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1).$$

Eulerin-McLaurinin summakaavan yleisessä muodossa tarvitaan *Bernoullin lukuja* (ks. esim. [5], s. 383), joten ne näkyvät myös kertoimissa, kun summa $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ esitetään n:n $(k+1)$-asteisena polynomina. Kirjansa esipuheessa ([5], s. IV) Lindelöf kutsuu Bernoullin lukuja "merkillisiksi". Näiden lukujen määritelmä (palautuskaavalla tai tietyn sarjan kerrointen avulla) näyttää kovin mutkikkaalta ja keinotekoiselta (seitsemän ensimmäistä Bernoullin lukua ovat $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{5}{66}$, $\frac{691}{2730}$ ja $\frac{7}{6}$), joten on todellakin merkillistä, että niillä on keskeinen rooli mm. eräissä sarjakehitelmissä (esimerkiksi $\tan x$:n, ks. [5], s. 387).

Puolisuunnikassäännön parantaminen

Eulerin-McLaurinin summakaavasta (3) saamme "paremman puolisuunnikassäännön"

$$T_1 = T - \frac{h^2}{12}(f'(b) - f'(a)),$$

jonka virhekaava on

$$I - T_1 = \frac{h^4}{720}f^{(4)}(\xi)(b-a).$$

Jos siis f on neljästi derivoituva ja $f^{(4)}$ pysyy kohtuullisissa rajoissa, niin tämän säännön virhe on likimäärin verrannollinen potenssiin h^4 eli samaa suuruusluokkaa kuin Simpsonin säännön virhe.

Vastaavasti saamme Eulerin-McLaurinin summakaavasta (4) "vielä paremman puolisuunnikassäännön"

$$T_2 = T - \frac{h^2}{12}(f'(b) - f'(a)) + \frac{h^4}{720}(f'''(b) - f'''(a)),$$

jonka virhekaava on

$$I - T_2 = -\frac{h^6}{30240}f^{(6)}(\xi)(b-a).$$

Jos siis f on kuudesti derivoituva ja $f^{(6)}$ pysyy kohtuullisissa rajoissa, niin virhe on likimäärin verrannollinen potenssiin h^6.

Täten on odotettavissa, että "parempi puolisuunnikassääntö" on suunnilleen yhtä hyvä kuin Simpsonin sääntö, ja että "vielä parempi puolisuunnikassääntö" on näitä parempi. Jätämme lukijan tehtäväksi tutkia kokeellisesti, onko asia todella näin.

On mielenkiintoista, että pelkkä tieto derivaatoista välin päätepisteissä saa aikaan tällaiset parannukset. Kuitenkin, jos funktiota ei ole annettu lausekkeena vaan taulukkona, niin derivaatat täytyy laskea numeerisesti likimääräismenetelmillä, jolloin tehdyt virheet saattavat kumota nämä parannukset. Erityisen painavasti tämä huomautus koskee "vielä parempaa puolisuunnikassääntöä", jossa tarvitaan kolmatta derivaattaa.

Muita menetelmiä

Summan $s_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$ kaava voidaan johtaa monella muullakin tavalla.

Helpoin menetelmä keksiä lienee seuraava. Aritmeettisen summan kaavan perusteella $s_1(n)$ on toisen asteen polynomi, joten otaksutaan, että $s_k(n)$ on $(k+1)$-asteinen polynomi. Tarkastellaan siis polynomia $p_k(n) = a_0 n^{k+1} + a_1 n^k + \ldots + a_k n + a_{k+1}$. Vaaditaan, että

$$p_k(1) = s_k(1), p_k(2) = s_k(2), \ldots, p_k(k+2) = s_k(k+2). \quad (5)$$

Ratkaistaan tästä lineaarisesta yhtälöryhmästä tuntemattomat $a_0, a_1, \ldots, a_{k+1}$. (Voidaan todistaa, ks. esim. [5], s. 16, että sillä on yksikäsitteinen ratkaisu.) Lopuksi osoitetaan induktiolla, että $p_k(n) = s_k(n)$ kaikilla muillakin n:n arvoilla.

Yhtälöryhmä (5) voidaan suurillakin k:n arvoilla ratkaista helposti käyttämällä jotakin matemaattista tietokoneohjelmistoa. Kuitenkin täytyy varautua seuraavaan. Jos tietokone soveltaa *liukulukuaritmetiikkaa*, niin tulokset ovat desimaalimuotoisina likiarvoina, jolloin niiden muuttaminen tarkoiksi arvoiksi voi suurilla k:n arvoilla olla vaikeaa, koska pyöristysvirheiden kasautuminen saattaa sotkea desimaaliluvun jaksollisuutta. Jos taas kone soveltaa *tarkkaa aritmetiikkaa*, niin suurilla k:n arvoilla ehkä joudutaan operoimaan niin hankalilla murtoluvuilla, että muisti loppuu tai aikaa kuluu kohtuuttomasti taikka ohjelman suoritus jumiutuu muuten. Pienillä k:n arvoilla ongelmia ei synny kummassakaan tapauksessa. Lukija voi kokeilla, millaisista k:n arvoista hänen tietokoneensa ja sen matemaattinen ohjelmisto selviytyy.

Edellä käsittelemiemme menetelmien eräänlaisena puutteena on, ettei niillä saada tietoja k:n eri arvoja vastaavien $s_k(n)$:ien välisistä yhteyksistä. Tavallisin sellainen menetelmä, jolla näitä yhteyksiä saadaan, on *Pascalin menetelmä* (ks. esim. [3], luku 2.1, [6], s. 359 ja tapauksessa $m = 3$ myös [4], s. 335-336). Se perustuu kaavaan

$$(n+1)^m - 1 = m s_{m-1} + \binom{m}{2} s_{m-2} + \binom{m}{3} s_{m-3} + \ldots + m s_1 + n.$$

Aluksi sijoitetaan $m = 2$, jolloin saadaan s_1. Seuraavaksi sijoitetaan $m = 3$, jolloin saadaan s_2, koska s_1 tunnetaan. Sitten sijoitetaan $m = 4$, jolloin saadaan s_3, koska s_1 ja s_2 tunnetaan. Jatkamalla vastaavasti saadaan jokainen potenssisumma s_k esitetyksi potenssisummien $s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}$ avulla.

Muita menetelmiä löytyy Kotiahin artikkelista [3].

Kiitokset

Kiitän lehtori Markku Halmetojaa ja professori Seppo Mustosta heidän käsikirjoituksestani tekemistään huomautuksista.

Viitteet

[1] M. Halmetoja, K. Häkkinen, J. Merikoski, L. Pippola, H. Silfverberg ja T. Tossavainen, *Matematiikan taito 12: Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä.* WSOY, 2007.

[2] E. Isaacson ja H. B. Keller, *Analysis of Numerical Methods.* John Wiley, 1966.

[3] T. C. T. Kotiah, Sums of powers of integers - A review. *Internat. J. Math. Educ. Sci. Tech. 24* (1993), 863-874.

[4] E. Lindelöf, *Johdatus korkeampaan analyysiin.* 4. p. WSOY, 1956.

[5] E. Lindelöf, *Differentiali- ja integralilasku ja sen sovellutukset I. Yhden muuttujan funktiot.* 2. p. WSOY, 1950.

[6] P. J. Myrberg, *Differentiaali- ja integraalilaskennan oppikirja.* 4. p. Otava, 1961.