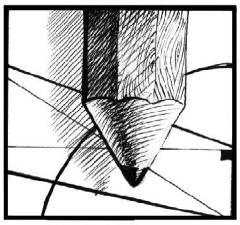
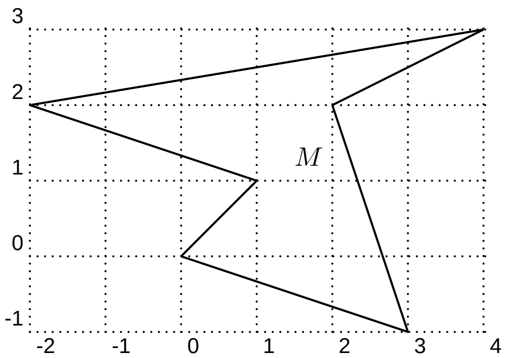


Monikulmion pinta-ala koululaisille

Mika Koskenoja
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Tehtävä. Kuusikulmion M kärjet ovat tason pisteissä $(0,0)$, $(3,-1)$, $(2,2)$, $(4,3)$, $(-2,2)$ ja $(1,1)$. Laske M:n pinta-ala.



Esitän tässä kirjoituksessa tehtävälle kaksi keskenään samantapaista ratkaisua, jotka vaativat ainoastaan jo peruskoulun yläluokkien oppilaiden hallitsemia alkeisgeometrian tietoja. Jatkan samasta aiheesta Solmun jossakin tulevassa numerossa kirjoituksella ”Monikulmion pinta-ala ylioppilaille”, jossa esitän tehtävälle tyystin erilaisen ratkaisun. Tuo ratkaisu edellyttää vektorianalyysin perusteita, jotka opitaan vasta yliopistomatematiikan alussa.

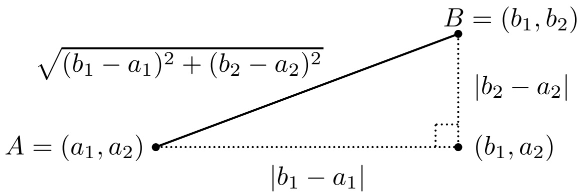
Monikulmion ositus

Osituksella tarkoitetaan monikulmion jakoa äärelliseen määrään uusia monikulmioita, jotka sisältyvät alkuperäiseen monikulmioon peittäen sen kokonaan ja jotka kohtaavat toisiaan vain reunoiltaan. Vaatimuksista seuraa, että alkuperäisen monikulmion pinta-ala on sama kuin osituksen monikulmioiden yhteenlaskettu pinta-ala. Osituksen monikulmioiden lukumäärä voidaan tarvittaessa ilmaista sanomalla, että *osituksessa on k monikulmiota.*

Pinta-alatehtävissä monikulmion osituksen tavoitteena on aikaansaada monikulmioita, joiden pinta-alan osaamme laskea. Tällaisia tuttuja monikulmioita ovat ainakin kolmiot, suorakulmiot ja (puoli)suunnikkaat. Koska muut monikulmiot voidaan osittaa kolmioiksi, niin ositus voidaan aina tehdä niin, että se koostuu ainoastaan kolmioista. Käytämme osituksissa pääasiassa kolmioita, mutta sopivissa tilanteissa myös suorakulmioita ja puolisuunnikkaita.

Osituksessa muodostettujen monikulmioiden pinta-alojen laskeminen edellyttää niiden sivujen pituuksien määräämistä, joka yleensä vaatii kärkipisteiden tuntemisen. Kun sivun (siis tason janan) päätepisteet ovat $A=(a_1,a_2)$ ja $B=(b_1,b_2)$, niin sivun pituus on Pythagoraan lauseen mukaan (katso seuraava kuva)

$$|AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}.$$

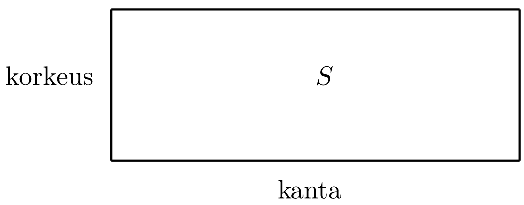


Toisinaan jonkin sivun pituuden saattaa saada helpoiten selville yhdenmuotoisuustarkastelulla, jolloin kaikkia kärkipisteitä ei edes tarvitse tuntea. Näin käy tehtävämme molemmissa ratkaisuissa. Osituksen monikulmioiden sivujen pituuksien ja kärkipisteiden selvittäminen voi joskus olla työlästä, jos alkuperäinen monikulmio on monimutkainen tai ositus monikulmioihin on tehty ajattelemattomasti.

Monikulmion erilaisia osituksia kolmioiksi ja suorakulmioiksi on olemassa lukemattomasti, sillä kolmiot ja suorakulmiot voidaan aina osittaa pienemmiksi kolmioiksi ja suorakulmioiksi. Yleensä pinta-alatehtävissä kannattaa osituksissa pitäytyä pienessä määrässä monikulmioita. Vähimpään mahdolliseen suorakulmioiden ja kolmioiden määrään pyrkiminen ei kuitenkaan aina ole laskujen kannalta suotuisaa.

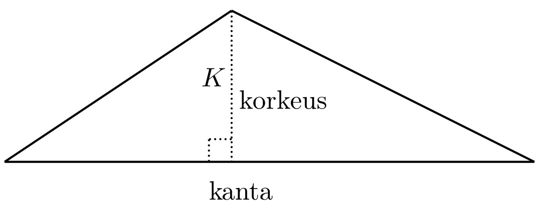
Kerrataan vielä joidenkin tuttujen monikulmioiden pinta-alojen laskukaavat. *Suorakulmion* S pinta-ala on

$$\text{ala}(S) = \text{kanta} \cdot \text{korkeus}.$$



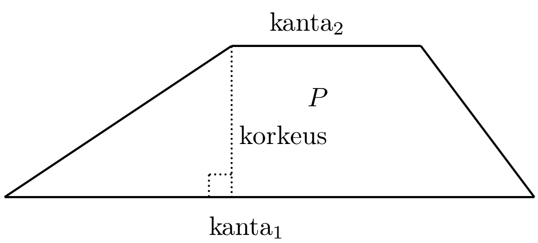
Kolmion K pinta-ala on

$$\text{ala}(K) = \frac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2}.$$



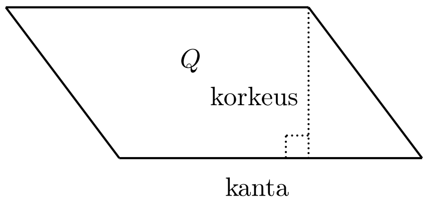
Puolisuunnikkaan P pinta-ala on

$$\text{ala}(P) = \frac{(\text{kanta}_1 + \text{kanta}_2) \cdot \text{korkeus}}{2}.$$



Suunnikkaan Q, joka on suorakulmion yleistys ja puolisuunnikkaan erikoistapaus, pinta-ala on

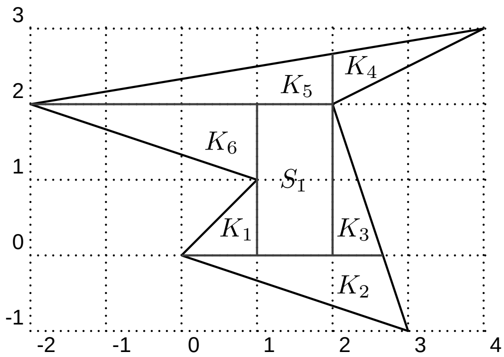
$$\text{ala}(Q) = \text{kanta} \cdot \text{korkeus}.$$



Suorakulmioille ja suorakulmaisille kolmioille kanta ja korkeus saadaan suoraan sivujen pituuksista. Myös vinokulmaisten kolmioiden sekä puolisuunnikkaiden kantojen ja korkeuden määrääminen on yleensä melko vaivatonta, sillä jotkin näistä ovat suoraan sivujen pituuksia ja muut saadaan usein helposti selville kuvan avulla päättelemällä.

Ensimmäinen ratkaisu

Tehtävämme kuusikulmion M ositus kuuteen kolmioon $K_1, \ldots, K_6$ ja yhteen suorakulmioon S_1 voidaan tehdä seuraavassa kuvassa esitetyllä tavalla.



Osituksen suorakulmion S_1 pinta-ala on

$$\text{ala}(S_1) = 1 \cdot 2 = 2.$$

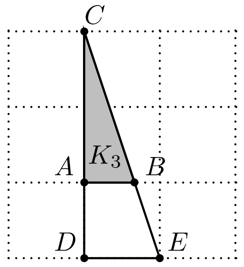
Kolmiot K_1, K_3, K_5 ja K_6 ovat suorakulmaisia. Niistä kolmioiden K_1 ja K_6 kateettien piduudet ovat selviä, ja saadaan

$$\text{ala}(K_1) = \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \tfrac{1}{2}$$

ja

$$\text{ala}(K_6) = \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = \tfrac{3}{2}.$$

Molempien suorakulmaisten kolmioiden K_3 ja K_5 pidemmän kateetin pituus on selvä, mutta lyhemmän kateetin pituuden määrääminen vaatii pohdintaa kuvan avulla. Merkitään kolmion K_3 kulmia kirjaimilla A, B ja C, ja lisätään kuvaan apupisteet D ja E.



Kolmioiden ABC ja DEC yhdenmuotoisuuden perusteella

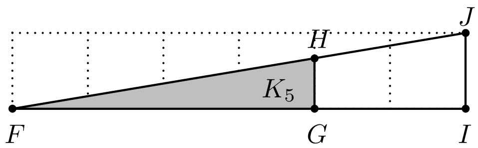
$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|DE|} \quad \text{eli} \quad \frac{2}{|AB|} = \frac{3}{1} = 3,$$

joten $|AB| = \frac{2}{3}$. Näin ollen

$$\text{ala}(K_3) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot 2 = \tfrac{2}{3}.$$

Havaitsemme lisäksi, että $B = (2 + \frac{2}{3}, 0) = (\frac{8}{3}, 0)$, mutta emme tarvitse tätä tietoa kolmion K_3 vaan vasta myöhemmin kolmion K_2 pinta-alan laskemisessa.

Selvitämme kolmion K_5 korkeuden vastaavalla yhdenmuotoisuustarkastelulla. Merkitään kolmion K_5 kulmia kirjaimilla F, G ja H, ja lisätään kuvaan apupisteet I ja J.



Kolmioiden FGH ja FIJ yhdenmuotoisuuden perusteella

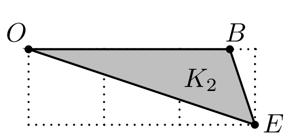
$$\frac{|FG|}{|GH|} = \frac{|FI|}{|IJ|} \quad \text{eli} \quad \frac{4}{|GH|} = \frac{6}{1} = 6,$$

joten $|GH| = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Näin ollen

$$\text{ala}(K_5) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot 4 = \tfrac{4}{3}.$$

Havaitsemme lisäksi, että $H = (2, 2 + \frac{2}{3}) = (2, \frac{8}{3})$, mutta tässäkään tapauksessa tietoa ei tarvita vielä kolmion K_5 vaan vasta kolmion K_4 pinta-alan määräämisessä.

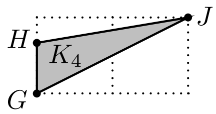
Määrätään sitten kolmion K_2 pinta-ala piirtämällä avuksi kuva, jossa ovat samat pisteet B ja E kuin kolmion K_3 pinta-alan laskemisen yhteydessä. Lisätään kuvaan vielä piste O.



Kolmion K_2 kannaksi kannattaa valita kolmion päällä oleva sivu OB. Koska aikaisemman laskun mukaan $B = (\frac{8}{3}, 0)$ ja $O = (0, 0)$, niin kanta on $\frac{8}{3}$. Kolmion K_2 korkeus on 1, joten

$$\text{ala}(K_2) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{8}{3} \cdot 1 = \tfrac{8}{6} = \tfrac{4}{3}.$$

Lasketaan vielä kolmion K_4 pinta-ala. Piirretään avuksi kuva, jossa ovat samat pisteet G, H ja J kuin kolmion K_5 pinta-alan laskemisen yhteydessä.



Kolmion K_4 kannaksi valitaan sen vasen, pystysuora sivu GH. Koska aikaisemman laskun mukaan $H = (2, \frac{8}{3})$ ja $G = (2, 2)$, niin kanta on $\frac{2}{3}$. Kolmion K_4 korkeus (kuvassa pikemminkin leveys) on 2, joten

$$\text{ala}(K_4) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot 2 = \tfrac{2}{3}.$$

Nyt kaikkien osituksen monikulmioiden pinta-alat ovat selvillä. Laskemalla nämä yhteen saadaan kuusikulmion M pinta-alaksi

$$\begin{aligned} \text{ala}(M) &= \text{ala}(S_1) + \text{ala}(K_1) + \text{ala}(K_2) + \text{ala}(K_3) \\ &\quad + \text{ala}(K_4) + \text{ala}(K_5) + \text{ala}(K_6) \\ &= 2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{4}{3} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{3} + \tfrac{3}{2} \\ &= \tfrac{12+3+8+4+4+8+9}{6} = \tfrac{48}{6} = 8. \end{aligned}$$

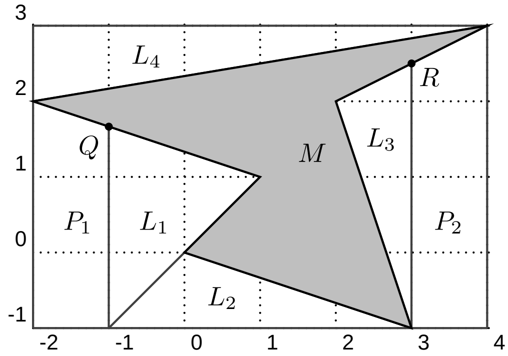
Toinen ratkaisu

Pinta-alatehtävissä monikulmion osittamista voi soveltaa myös niin, että peittää monikulmion ensin yhdellä (tai useammalla) tutulla monikulmiolla ja muodostaa peitetyn monikulmion poistamalla peittävästä monikulmiosta tuttuja monikulmioita. Toisin sanoen peittävän ja peitetyn monikulmion väliin jäävä alue (joka voi koostua yhdestä tai useammasta monikulmiosta) ositetaan monikulmioiksi, joiden pinta-alan osaamme laskea.

Peitetään kuusikulmio M suorakulmiolla S_0, jonka kärjet ovat pisteissä $(-2, -1)$, $(4, -1)$, $(4, 3)$ ja $(-2, 3)$. Tämän pinta-ala on

$$\text{ala}(S_0) = 6 \cdot 4 = 24.$$

Suorakulmion S_0 ja kuusikulmion M väliin jää kolme monikulmiota: kolmio, nelikulmio ja viisikulmio. Muodostetaan peitetty kuusikulmio M poistamalla suorakulmiosta S_0 kolmiot $L_1, \ldots, L_4$ sekä puolisuunnikkaat P_1 ja P_2 seuraavassa kuvassa esitetyllä tavalla.

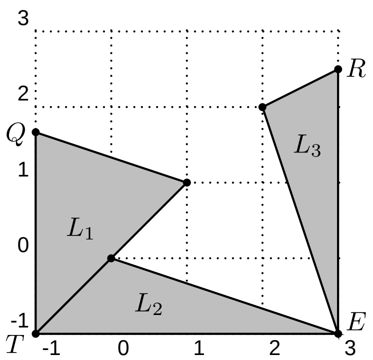


Kuvaan on merkitty pisteet Q ja R, jotka on tunnettava kolmioiden L_1 ja L_3 sekä puolisuunnikkaiden P_1 ja P_2 pinta-aloja laskettaessa. Helpohkoilla yhdenmuotoisuuspäättelyillä nähdään, että $Q = (-1, \frac{5}{3})$ ja $R = (3, \frac{5}{2})$. Jääköön näiden täsmällinen perustelu harjoitustehtäväksi lukijalle.

Kolmio L_4 on suorakulmainen ja sen pinta-alaksi saadaan

$$\text{ala}(L_4) = \tfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 = 3.$$

Piirretään muista kolmioista L_1, L_2 ja L_3 kuva, johon lisätään pisteiden Q ja R lisäksi apupisteet T ja E.



Koska $Q = (-1, \frac{5}{3})$ ja $T = (-1, -1)$, niin kolmion L_1 kanta QT on $\frac{8}{3}$. Kolmion L_1 korkeus on 2, joten sen pinta-alaksi saadaan

$$\text{ala}(L_1) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{8}{3} \cdot 2 = \tfrac{8}{3}.$$

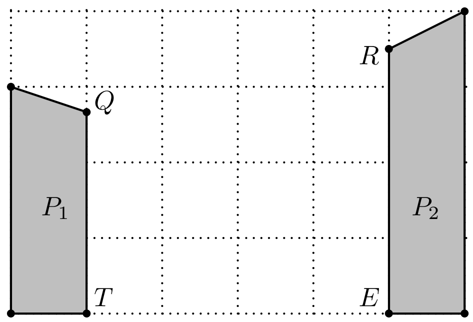
Kolmion L_2 kanta TE on 4 ja korkeus on 1, joten

$$\text{ala}(L_2) = \tfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2.$$

Koska $R = (3, \frac{5}{2})$ ja $E = (3, -1)$, niin kolmion L_3 kanta RE on $\frac{7}{2}$. Kolmion L_3 korkeus on 1, joten sen pinta-alaksi saadaan

$$\text{ala}(L_3) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{7}{2} \cdot 1 = \tfrac{7}{4}.$$

Vielä pitää laskea puolisuunnikkaiden P_1 ja P_2 pinta-alat. Piirretään kuva, johon lisätään edellisessäkin kuvassa olevat apupisteet T ja E.



Tarkastellaan molempia puolisuunnikkaita niin, että niiden kannat ovat pystyssä olevia sivuja, jolloin kummankin korkeus on kuvassamme niiden leveys. Puolisuunnikkaan P_1 korkeus on 1 ja pidempi kanta on 3. Lyhempi kanta on sama kuin kolmion L_1 kanta QT edellä eli $\frac{8}{3}$. Näin ollen

$$\text{ala}(P_1) = \tfrac{1}{2}(3 + \tfrac{8}{3}) \cdot 1 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{17}{3} = \tfrac{17}{6}.$$

Puolisuunnikkaan P_2 korkeus on vastaavasti 1 ja pidempi kanta on 4. Lyhempi kanta on sama kuin kolmion L_3 kanta RE edellä eli $\frac{7}{2}$. Näin ollen

$$\text{ala}(P_2) = \tfrac{1}{2}(4 + \tfrac{7}{2}) \cdot 1 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{15}{2} = \tfrac{15}{4}.$$

Lopulta saamme kuusikulmion M pinta-alaksi

$$\begin{aligned}
\text{ala}(M) &= \text{ala}(S_0) - \big[\,\text{ala}(L_1) + \text{ala}(L_2) + \text{ala}(L_3) \\
&\quad + \text{ala}(L_4) + \text{ala}(P_1) + \text{ala}(P_2)\big] \\
&= 24 - \left(\tfrac{8}{3} + 2 + \tfrac{7}{4} + 3 + \tfrac{17}{6} + \tfrac{15}{4}\right) \\
&= 24 - \tfrac{32+24+21+36+34+45}{12} = 24 - \tfrac{192}{12} \\
&= 24 - 16 = 8,
\end{aligned}$$

kuten tuloksen tietysti pitääkin olla ensimmäisen ratkaisun perusteella.

Tehtäviä lukijalle

Tehtävä 1. Keksi kuusikulmion M ositus, jossa on kahdeksan monikulmiota.

Tehtävä 2. Keksi kuusikulmion M ositus, jossa on 2 erikokoista neliötä ja muut ovat kolmioita.

Tehtävä 3. Etsi kuusikulmiolle M ositus, joka koostuu kolmioista, suorakulmioista ja puolisuunnikkaista, ja jossa on mahdollisimman vähän kolmioita.

Tehtävä 4. Etsi kuusikulmiolle M ositus, jossa on vain kolmioita, mutta niitä on mahdollisimman vähän.

Tehtävä 5. Laske M:n pinta-ala tehtävissä 1–4 keksimiesi ositusten perusteella.

Tehtävä 6. Peitä M kolmiolla ja osita peittävän kolmion ja M:n väliin jäävä alue kolmioiksi ja suorakulmioiksi. Laske lopuksi M:n pinta-ala muodostamiesi monikulmioiden avulla.

Tehtävä 7. Keksi 10-kulmio ja laske sen pinta-ala.