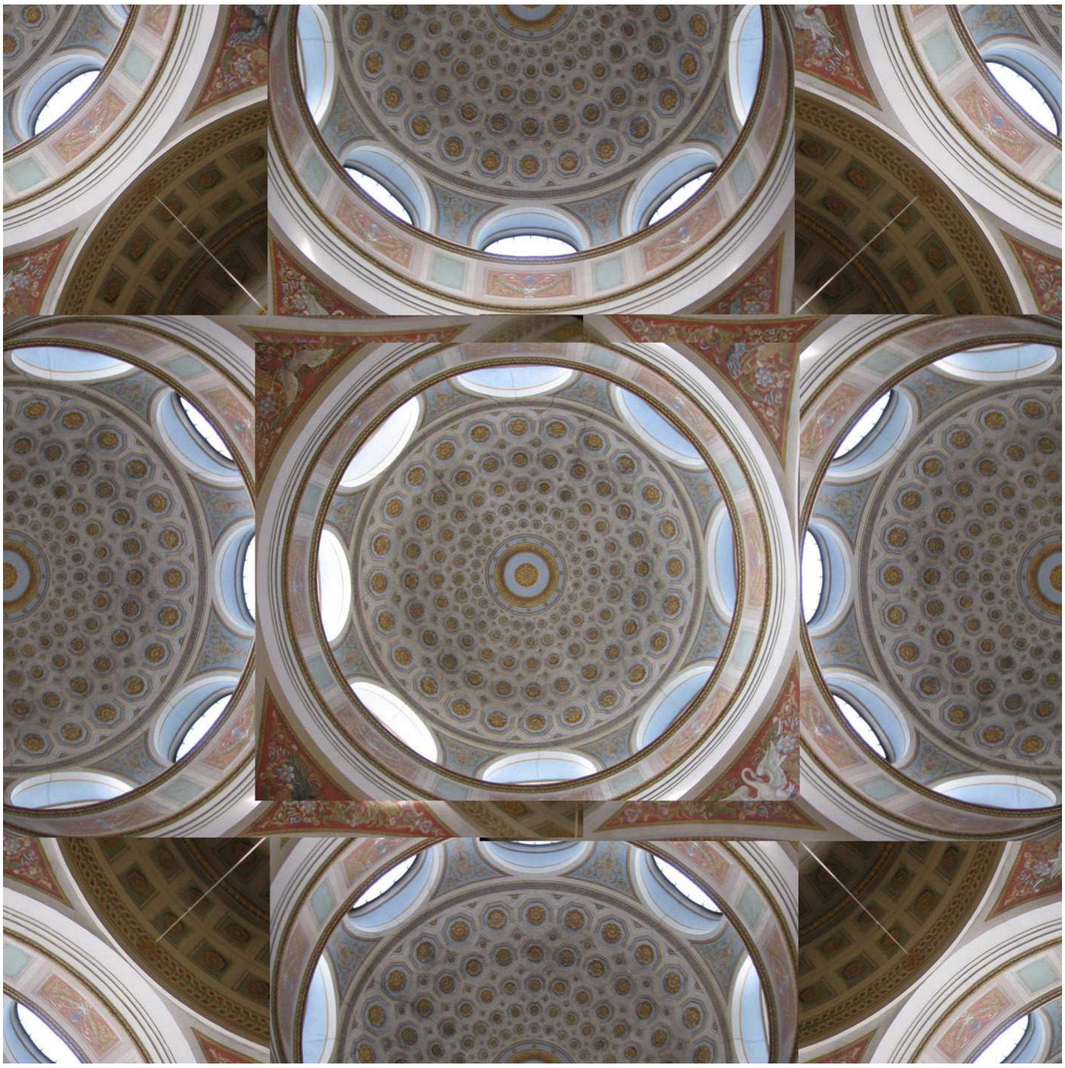
Solmu

Matematiikkalehti
2/2009

http://solmu.math.helsinki.fi/



Solmu 2/2009

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)
ISSN 1459-0395 (Painettu)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)
00014 Helsingin yliopisto

http://solmu.math.helsinki.fi/

Päätoimittaja:
Matti Lehtinen, dosentti, Helsingin yliopisto

Toimitussihteeri:
Juha Ruokolainen, FT, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Sähköposti: *toimitus@solmu.math.helsinki.fi*

Toimituskunta:
Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu
Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu
Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Ari Koistinen, FM, Metropolia Ammattikorkeakoulu
Mika Koskenoja, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Antti Rasila, tutkija, Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu
Hilkka Taavitsainen, lehtori, Ressun lukio

Graafinen avustaja: *Marjaana Beddard*

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:
Virpi Kauko, FT, matemaatikko, virpi@kauko.org, Jyväskylä
Jorma K. Mattila, professori, jorma.mattila@lut.fi
Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenrannan teknillinen yliopisto
Jorma Merikoski, dosentti, jorma.merikoski@uta.fi
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Tampereen yliopisto
Anne-Maria Ernvall-Hytönen, assistentti, anne-maria.ernvall@utu.fi
Matematiikan laitos, Turun yliopisto
Matti Nuortio, jatko-opiskelija, mnuortio@paju.oulu.fi
Matemaattisten tieteiden laitos, Oulun yliopisto
Timo Tossavainen, lehtori, timo.tossavainen@joensuu.fi
Savonlinnan opettajankoulutuslaitos, Joensuun yliopisto

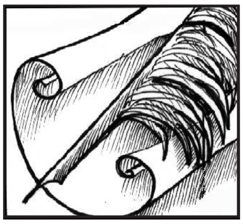
Numeroon 3/2009 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 11.9.2009 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.

Kansi: kuvakollaasi Kansalliskirjaston Kupolisalin katosta.

Sisällys



Matematiikanopetuksen unta ja todellisuutta

Suomi on matematiikanopetuksen mallimaa. Ns. Pisatutkimuksen tulosten kärjessä olevaan valtakuntaan virtaa valtuuskuntia OECD:n kaikilta kolkilta, opetushallinto ja matematiikan opettajien järjestötkin paistattelevat erinomaisuudessaan. Mikäpä sen parempaa?

Mutta onko valtakunnassa kaikki hyvin, kun ylioppilaskirjoituksen matematiikan kokeen voi suorittaa hyväksytysti lähes nollaosaamisella, kun lukion jälkeisten oppilaitosten opettajilta kuuluu jatkuvaa valitusta opiskelijoiden perustaitojen ja -ymmärryksen puutteellisuudesta, kun valtakunnan parhaat jäävät kansainvälisissä kilpailuissa systemaattisesti häntäpäähän, kun internetin keskustelupalstat ovat täynnään sellaisia opiskelijoiden kysymyksiä, joiden pelkkä esittäminen osoittaa ammottavia puutteita matematiikan perusymmärryksessä, kun heterogeeniset opetusryhmät pakottavat kaikki opiskelemaan heikoimpien ehdoin, kun televisio-ohjelman apujuontaja-abiturientti kysyy, oliko ylioppilastehtävässä esiintyvän pyramidin tilavuus sama kuin taulukkokirjan kertoma särmiön tilavuus, kun opettajille tarjottavan runsaan jatkokoulutustarjonnan joukosta ei suurennuslasillakaan löydä matematiikan aineenhallinnan kehittämiseen tarkoitettuja kursseja? Matematiikan loisteliaan ja surkean tilan skitsofrenia tuovat ainakin minulle mieleen nyt uudelleen virinneen keskustelun ”suomettumisen” ajasta, jolloin ”puhuttiin yhtä, tarkoitettiin toista ja ehkä ajateltiin kolmatta”.

Matematiikan opettajat tuntuvat tyytyvän tilanteeseen. Lukioon tulee peruskoulusta oppilaita, hyvin arvosanoin mutta ilman valmiuksia. Peruskoulu on aika, jonka nuori tarvitsee kasvamiseensa, ja tähän kasvamiseen ei näytä kuuluvan säännölliseen työntekoon opettelu esimerkiksi säännöllisen kotitehtävien suorittamisen kautta. Niinpä matematiikan opettajien, ainakin heidän järjestönsä piirissä melko yleisesti todetaan, että lukion oppimäärä on liian vaativa, joten sitä kevennettäköön. Turhat erotusosamäärät ja muu yliopistomatematiikka joutakoot komeroon. Opettajankin työn älyllinen kuormitus siitä vain helpottuisi – vaikka kirjankustantajien auliisti jakamat harjoitustehtävien piirtoheitinvalmiit ratkaisut tekevät sen mukavaksi nytkin.

Matematiikkaan perustuva laskento on maailmassa hyvin tärkeää ja se toki toimii, ja on aina toiminut, vaikkei laskija tai laskimen käyttäjä ymmärtäisi matematiikkaa ollenkaan. Mitäpä nyt siitä, jos jokin suuruusluokkaerhe joskus sattuu. Kaikki muutkin vempeleemme toimivat suunnilleen oikein, jos niitä käyttöohjeen mukaan käsitellään. Matematiikan opetusta ei tarvita siksi, että suomalaiset osaisivat käyttää näppäimistöjä. Eivätkä kaikki suomalaiset oikeastaan todellakaan tarvitse matematiikan opetusta. ”En koskaan ole tarvinnut matematiikkaa” on usein kuultu lausahdus, ja se voi monen kohdalla olla ihan totta. Mutta Suomi tarvitsee aika paljon semmoisiakin ihmisiä, jotka sitten opinnoissaan ja elämässään tarvitsevat matematiikkaa.

Mutta itse matematiikka on oppi, jonka ydintä on olla deduktiivinen. Matematiikka, johon ei sisälly kaiken aineksen perustelu, myös oppijan eteen asetettu tehtävä, ”osoita, että...”, ei ole oikeasti matematiikkaa. Tässä mielessä ei voi sanoa, että Suomen kouluissa opetettai-

Pääkirjoitus

siin matematiikkaa.

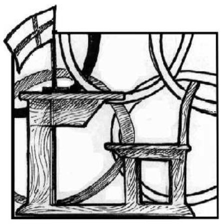
Voimassa olevat lukion opetussuunnitelman perusteet (Opetushallituksen määräys 33/011/2003) kertovat kuitenkin toista. Niissä sanotaan kauniisti "Matematiikan opetuksen tehtävänä on tutustuttaa opiskelija matemaattisen ajattelun malleihin sekä matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin, opettaa käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä sekä kehittää laskemisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja." ja "Pitkän matematiikan opinnoissa opiskelijalla on tilaisuus omaksua matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä sekä oppia ymmärtämään matemaattisen tiedon luonnetta."

Jotta tämä sana tulisi lihaksi, olisi jotain tapahduttava. Radikaalisti voisi ajatella, että matematiikka erotettaisiin oppiaineesta nimeltä laskento (tai laskenta, jos se kuulostaisi fiinimmältä). Laskemisen perustaidot ovat vastaansanomattomasti jokaiselle tarpeen. Peruskoulussa ei sanaa matematiikka tarvitsisi mainitakaan. Lukiossa laskento korvaisi nykyisen matematiikan lyhyen oppimäärän. Aineessa opetettaisiin laskemaan niillä tavoin kuin laskemista lukemattomissa tosimaailman tilanteissa tapahtuu, niillä apuvälineillä, joilla laskentoa harjoitetaan. Tilastotieteilijät ovat hiljattain heränneet esittämään oman tieteenalansa selvempää profilointia myös koulussa. Tilasto-opilliset peruslaskutavat olisivat luonnollista laskento-oppiaineen sisältöä. Toisaalta lukioon perustettaisiin erityinen oppiaine matematiikka, joka sitten olisikin matematiikkaa. Se olisi se 'hieno' aine, joka avaisi portit niihinkin jatko-opintoihin, joissa matematiikalla todella on merkitystä. Sitä opetettaisiin ja opiskeltaisiin nykyistä suuremmalla tinkimättömyydellä ja kunnianhimolla. Vaatimustason nostaminen on yksinkertainen keppi mutta myös porkkana.

Realisti toteaa heti, että näin pitkälle ei voida mennä. Matematiikka on jo vakiintunut sanastoomme laajassa, laskennonkin kattavassa merkityksessä. Ja onhan valoisiakin signaaleja, vaikkapa matemaattisen ajattelun elementtien tuominen jo varhaisessa vaiheessa opetukseen esimerkiksi unkarilaislähtöisissä opetusmenetelmissä.

Suomen Kuvalehden numerossa 11/2009 on artikkeli junnujääkiekosta. Artikkelissa tuodaan julki aivan vakavassa hengessä syvä huolestus siitä, että tasapuolisuussäännöt, joiden mukaan myös vähemmän loistavin jääkiekollisin avuin varustetut pikkukiekkoilijat saavat jääaikaa, hidastavat todellisten kykyjen kehitystä ja näin jopa saattavat tuhota menestyksellisen uran Pohjois-Amerikan ammattilaisotteluissa jo vuosia ennen kuin pelaaja ensi kerran voisi luistella kykyjenetsijän näkökenttään. Emmehän syyllisty jotenkin samaan virheeseen matematiikanopetuksen tasa-arvoistamisessa heikoimman kolmanneksen kykyjen mukaan? Ei kai hyvän matematiikan osaajien kaaderin kouluttaminen ole mitenkään arvossa verrattavissa etevien urheilusirkusesiintyjien kouluttamiseen? Matematiikan opetussuunnitelmien uudistajat, jotka lienevät taas kerran alkamassa työtään, ovat vakavan tehtävän edessä.

Matti Lehtinen



Derivaatan esittämisestä muutosnopeutena

Kyösti Tarvainen
Matematiikan yliopettaja
Metropolia Ammattikorkeakoulu

Tekniikan ja muiden alojen sovellutuksissa derivaatta esiintyy yleensä suureen muutosnopeutena (ajan tai jonkín toisen suureen suhteen). Yliopistojen matematiikan opinnoissa tämä derivaattojen käytännön sovellutuksiin liittyvä puoli ei juuri tule esille, mikä sitten heijastuu myös lukion matematiikan opetukseen. Joissain lukion oppikirjoissa on hyvällä tavalla pyritty tuomaan esiin derivaatta muutosnopeutena, mutta joissain kirjoissa asia sanotaan ikään kuin ilmoitusasiana, jota ei havainnollisesti perustella. Olen monta kertaa kysynyt uusilta opiskelijoilta, mitä derivaatta kertoo funktiosta. Vain muutama on osannut vastata, ja vastaus on yleensä se, että derivaatta on tangentin kulmakerroin. Jatkokysymykseen, mitä se kulmakerroin sitten kertoo funktiosta, ei osata vastata. Vain harva on tiennyt derivaatan muutosnopeudeksi.

Lukion jälkeisten jatko-opintojen kannalta olisi tärkeää, että niin lukion pitkässä kuin lyhyessä matematiikassa opittaisiin derivaatan merkitys muutosnopeutena. Tekniikan opinnoissa tämä asia tulee esiin muun muassa seuraavissa yhteyksissä:

- Monet suureet ovat suoraan toisen suureen derivaattoja (esimerkiksi kiihtyvyys on nopeuden muutosnopeus).
- Differentiaaliyhtälöt ovat erittäin tärkeitä tekniikassa. Ne ovat usein sellaista muotoa, jossa jonkin suureen muutosnopeus riippuu muiden suureiden arvoista (yksinkertaisessa esimerkissä veden korkeuden muutosnopeus [m/s] säiliössä, jossa on reikä pohjassa, riippuu säiliössä olevan veden korkeudesta).
- Yhä useammin käytännön järjestelmiä kuvataan osittaisdifferentiaaliyhtälöillä, jolloin suureet voivat riippua esimerkiksi kolmesta paikkakoordinaatista ja ajasta. Tällöin osittaisderivaatan havainnollistaminen tangentin kulmakertoimena on mahdotonta; sen sijasta on yksinkertaisesti tiedettävä, että osittaisderivaatta jonkin muuttujan suhteen on muutosnopeus tuon muuttujan suhteen, kun muiden muuttujien arvoja ei muuteta.
- Usean muuttujan funktion maksimointi tehdään usein numeerisesti, jolloin voidaan määrittää funktion muutosnopeudet kunkin muuttujan suhteen ja niistä muodostaa gradientti, joka näyttä suunnan, johon funktio kasvaa nopeimmin.
- Optimoinnissa on usein hyödyllistä määrittää, millä nopeudella maksimiarvo kasvaa, kun resursseja lisätään.
- Tekniikassa tarkastellaan laskutulosten sensitiivisyyttä mittausvirheiden suhteen. Tällöin on kyse siitä, miten laskutulos muuttuu, kun jokin mittausarvo muuttuu. Näissä laskuissa käytetään hyväksi derivaattoja ja osittaisderivaattoja.

Derivaatan esittäminen lukiossa tai yliopistossa muutosnopeutena ei ole helppo asia (tangentin kulmakerroin-juttu on paljon helpompi). Seuraavassa kerron, miten olen ammattikorkeakoulussa lähtenyt käsittelemään derivointia, jotta tämä muutosnopeus-merkitys tulisi heti selväksi. Asian esittämiselle on monta tapaa, mutta koska kyse on derivaatan soveltamiseen liittyvästä näkökohdasta, se varmaankin täytyy kertoa epämuodollisemmin kuin yliopistojen matematiikan kurssien formaaleissa esityksissä derivaattoja käsitellään. Joissain lukion kirjoissa onkin hyvällä tavalla johdateltu derivaattaan epämuodollisella tavalla, ennen täsmällisen määritelmän esittämistä.

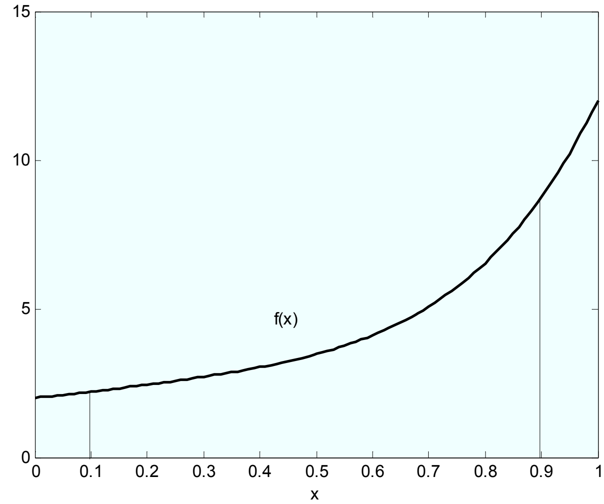
Seuraavassa tekstissä, jonka toivotaan antavan virikkeitä asian esittämiselle lukiossa, on hieman sekaisin asiaa opettajille ja kopioita opiskelijoille kirjoitetusta esityksestä. Lähtökohtina ovat seuraavat seikat:

- Aluksi tehdään selväksi, että funktion muutosnopeus, kun funktion lauseke tunnetaan, on yllättävän vaikea asia määritellä matemaattisesti. (Vastaavanlaiset vaikeudet johtivat Zenonin nuoli-paradoksissa siihen, että liike sinänsä on mahdotonta.) Siksi muutosnopeus on esityksessä määritelty kolmessa vaiheessa: 1) kun funktion kuvaaja suora, 2) derivaatan likiarvo kun funktiosta tunnetaan erillisiä arvoja, 3) yleinen tapaus.
- Tässä toisessa vaiheessa esitetään, miten määritetään derivaatan approksimaatio, kun funktiosta tunnetaan vain erillisiä arvoja. Tällaisia tarkasteluja ei ole ollut tapana tehdä lukiossa. Mutta ne ovat helppoja ja antavat konkreettista kuvaa derivaatan käsitteestä. Nykyisin käytännön sovellutuksissa ei useinkaan ole funktion lausekkeita, joita derivoidaan, vaan meillä on tietokoneohjelma, joka laskee funktion arvoja, tai meillä on digitaalisesti saatuja näytteitä funktiosta. Useat differentiaaliyhtälöiden, osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ja optimointitehtävien ratkaisumenetelmät perustuvat sille, että derivaattoja approksimoidaan erotusosamäärillä tai vastaavanlaisilla tarkemmilla numeerisilla lausekkeilla.
- Liikkeelle lähdetään siitä intuitiivisesta näkemyksestä, että jokaisessa kohdassa (eräitä erikoispisteitä lukuun ottamatta) funktiolla on muutosnopeus ja siitä lopulta päädytään derivaatan yleiseen määrittelyyn, eikä edetä päinvastoin. Nojaudutaan opiskelijan fysikaalisiin ja geometrisiin näkemyksiin (funktion muutosnopeus on sitä suurempi, mitä jyrkemmin funktion kuvaaja nousee; jos kuvaaja on suora, funktion muutosnopeus on vakio).

Seuraavanlainen johdatus derivaattoihin on esitetty niin lukion pitkän ja lyhyen matematiikan suorittaneille kuin myös ammattikoulusta valmistuneille. Sitä ennen on lyhyesti esitetty raja-arvon käsite ja merkintä. Derivaatan algebrallinen määritelmä on tekniikassa tärkeä, koska esimerkiksi monen differentiaaliyhtälön johtaminen tapahtuu algebrallisesti. Olen samaa mieltä Matti Lehtisen [1] kanssa, että derivaatan esittäminen graafisesti sekantti-tangenttitarkasteluilla ei ole hyvä näkökulma.

Muutosnopeuden matemaattisen määrittelyn vaikeus

Jokainen varmaan toteaa kuvasta 1, että muuttujan x arvon kasvaessa funktio $f(x)$ kasvaa nopeammin kohdassa $x = 0.9$ kuin kohdassa $x = 0.1$. Kun kerran tässä vaiheessa kysyin ammattikoulupohjaisella luokalla (jonka oppilaat eivät koskaan olleet kuulleet derivaatasta mitään), miten kasvunopeuden voisi määritellä, yksi opiskelija antoi hyvän ehdotuksen: mitataan se kulma, jossa funktio nousee.



Kuva 1. Funktion muutosnopeutta tarkastellaan intuitiivisesti kahdessa kohdassa.

Kun pyritään vielä käyttökelpoisempaan ja itse asiassa luonnollisempaan määrittelyyn, vaikeutena on se, että kun halutaan määritellä funktion muutosnopeus tietyssä pisteessä x, funktiolla on tietty arvo tässä pisteessä, eikä se ehdi siinä muuttua.

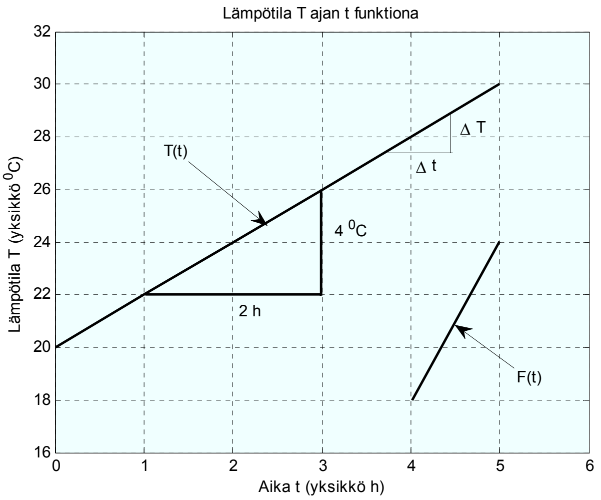
Vanha vitsi johdattaa tämän vaikeuden ratkaisuun. Poliisi pysäytti naisen, joka ajoi ylinopeutta kaupunkialueella: ”Te ajoitte 60 kilometriä tunnissa.” Nainen vastasi: ”Se on täysin mahdotonta, minulla ei ole edes aikaa ajaa yhtä tuntia, sillä täytyy ehtiä 10 minuutissa kampaajalle.”

Auton yhteydessä kohtaamme saman vaikeuden kun edellä: kuinka voimme puhua auton nopeudesta tietyllä hetkellä, kun sillä hetkellä auto on tietyssä paikassa eikä silloin ehdi liikkua ollenkaan. Ratkaisu tähän on se, että kun puhumme auton nopeudesta jollain hetkellä, esimerkiksi poliisin mittaamasta nopeudesta 60 km/h, niin tämä tarkoittaa sitä, että jos auto liikkuisi samalla nopeudella yhden tunnin, matkaa taittuisi 60 kilometriä.

Vastaavasti kun pyrimme määrittelemään matemaattisesti funktion muutosnopeuden jossain pisteessä, meidän on aloitettava tarkastelu siitä, kuinka funktio muuttuu pisteen x ympäristössä. Silloin helpoin tapaus on se, että funktion kuvaaja on suora eikä käyristy kuten kuvassa 1.

Muutosnopeus eli derivaatta, kun funktion kuvaaja on suora

Johdatteleva esimerkki. Kuva 2 esittää, miten lämpötila nousee aamulla. $T(t)$ on lämpötila hetkellä t tuntia vuorokauden alusta. Kuvaaja on suora, joten arkikielellä sanoisimme, että lämpötila kasvaa samalla vauhdilla koko ajan.



Kuva 2. Lämpötila T ajan t funktiona. Funktion $F(t)$ on toinen tapaus, jossa lämpötila kasvaa nopeammin.

On tärkeä huomata, että voimme puhua kolmesta eri asiasta:

1) **Lämpötila tietyllä hetkellä**. Esimerkiksi kello 1 lämpötila T on 22 °C eli $T(1) = 22\,°\mathrm{C}$.

2) **Lämpötilan muutos tietyllä aikavälillä**. Esimerkiksi kahden tunnin aikana kello 1:stä kello 3:een lämpötila nousee 4 °C, kun taasen esimerkiksi kello 1:stä kello 4:een lämpötila nousee 6 °C.

3) **Lämpötilan muutosnopeus**. Edellisen kohdan mukaan lämpötila T nousee kahden tunnin aikana 4 °C. Siten yhdessä tunnissa lämpötila nousee 2 °C. Koska lämpötila kuvan mukaisesti kasvaa samalla nopeudella koko ajan, sanomme, että lämpötilan muutosnopeus on 2 °C/h jokaisella ajanhetkellä t.

Merkintä. Yleisesti funktion $f(x)$ muutosnopeus eli derivaatta on erilainen muuttujan x eri arvoilla eli muutosnopeuskin on x:n funktio, jolle käytetään esimerkiksi merkintöjä $f'(x)$ tai $\frac{df}{dx}(x)$ tai $Df(x)$.

Lämpöesimerkin tapauksessa derivaatta on kuitenkin sama kaikilla t:n arvoilla:

$$T'(t) = 2\,°\mathrm{C/h}$$

tai toisin merkiten

$$\frac{dT}{dt}(t) = 2\,°\mathrm{C/h}.$$

On hyvä merkitä yksiköt, koska nekin muistuttavat siitä, että kyse on muutosnopeudesta.

Siirtyäksemme käsittelemään yleisempää tapausta ja yleisiä merkintöjä, todetaan kuvassa 1, että kolmioiden yhdenmuotoisuuden perusteella sama muutosnopeus 2 °C/h saadaan myös tarkastelemalla mielivaltaisen suuruista aikaväliä Δt ja sen aikana tapahtuvaa lämpötilan muutosta ΔT (katso kuva 1): muutosnopeus saadaan *erotusosamääränä* $\Delta T/\Delta t$.

Yleinen tapaus, jossa kuvaaja on suora

Muissakin tapauksissa [katso kotitehtävät jäljempänä] funktiolle $f(x)$, *jonka kuvaaja on suora*, on luonnollista määritellä muutosnopeus eli derivaatta $f'(x)$ seuraavasti erotusosamääränä, jolloin lasketaan kuinka paljon funktio $f(x)$ muuttuu yhtä x:n yksikköä kohti:

$$f'(x) = \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad \text{(huom. kuvaaja suora)}$$

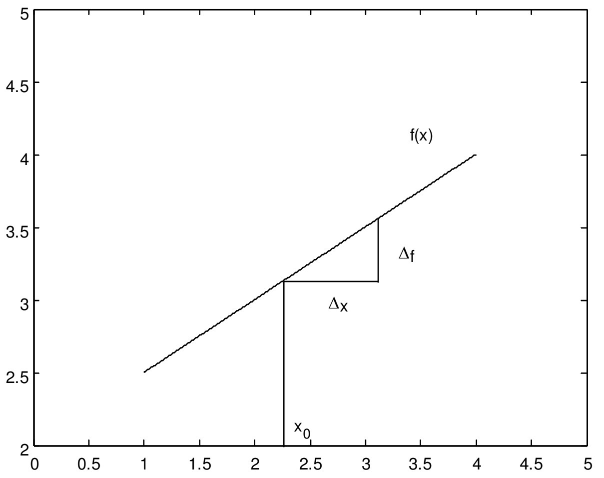
jossa Δf on funktion arvon muutos, kun muuttujassa x tapahtuu muutos Δx, eli matemaattisesti:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad \text{(uusi funktion arvo miinus aiempi arvo)},$$

jossa x_0 on jokin x:n arvo. Tässä, kuten lämpöesimerkissä, kaikilla kohdan x_0 ja x:n muutoksen Δx valinnoilla saadaan sama derivaatan arvo. Kuva 3 havainnollistaa merkintöjä.

Tässä on käytetty sanontaa, että erotusosamäärä $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ ilmaisee funktion $f(x)$ muutoksen muuttujan x ”yhtä yksikköä kohti”: esimerkiksi lämpöesimerkissä lämpötilan muutos on 2 °C tuntia kohti ja autoesimerkissä matkamittarin lukeman muutos on 60 kilometriä tuntia kohti (vaikka tunnin verran ei ajettaisikaan).

Yleensä ajatellaan ja käytetään positiivista Δx:n arvoa, mutta sama derivaatan arvo saadaan negatiivisellakin Δx:lla, sillä silloin myös funktion muutoksen Δf merkki muuttuu.

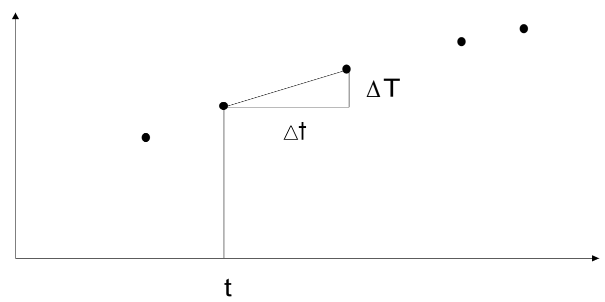


Kuva 3. Funktion $f(x)$ kuvaaja on suora. Kohdassa x_0 muuttujaan x on tehty muutos Δx, josta aiheutuu funktion arvoon muutos Δf.

Derivaatan likiarvo, kun funktiosta tunnetaan tai lasketaan vain erillisiä arvoja

Nykyään lämpötila ja muut suureet mitataan yleensä digitaalisesti ottamalla suureesta näytteitä erillisinä (diskreetteinä) ajankohtina, jolloin funktiosta tunnetaan vain joukko arvoja. Tällöin meillä ei ole edellisten kuvien mukaista kuvaajaa funktiolle eikä mitään algebrallista lauseketta funktiolle.

Myös monissa tietokonesovellutuksissa funktiolle ei ole käytössä kuvaajaa tai algebrallista lauseketta, vaan tilanne on se, että tietokoneohjelmalla voidaan laskea kutakin muuttujan x arvoa kohti funktion $f(x)$ arvo. Jos olemme tällaisessa tapauksessa laskeneet funktion $f(x)$ arvoja joillain x:n arvoilla, tilanne on oleellisesti sama kuin kuvassa 4, jossa on erillisinä ajankohtina mitattuja lämpötilan T arvoja.



Kuva 4. Funktiosta $T(t)$ on näytteitä. Kun siirrytään ajankohdasta t seuraavaan ajankohtaan, aikaväli on Δt ja lämpötilan muutos on ΔT.

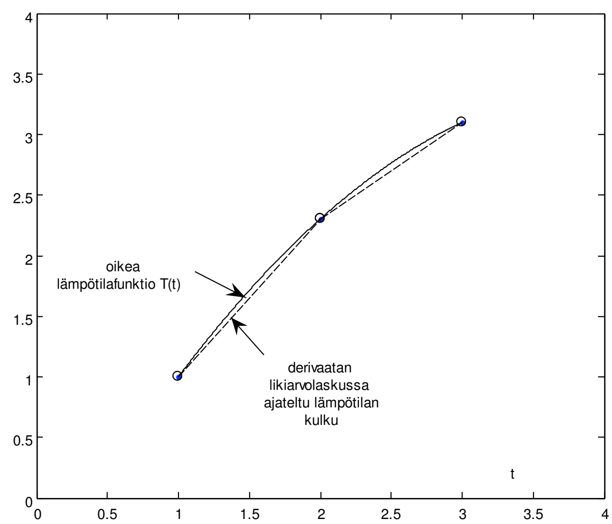
Lämpötila T on tässä ajan t funktio $T(t)$, mutta meillä on tiedossa siitä vain erillisiä arvoja. Lämpötiloissa ei yleensä tapahdu äkillisiä muutoksia, vaan lämpötila muuttuu lyhyellä aikavälillä lähes suoraviivaisesti – sitä tarkemmin mitä lyhyempi aikaväli on. Oletetaan, että lämpötilaa on mitattu lyhyin aikavälein ja että siten lämpötilafunktion $T(t)$ kuvaaja on lähes suoraviivainen mittausarvojen välillä.

Jos kuvaaja olisi täysin suoraviivainen aikapisteen t ympäristössä ja koko aikavälillä $[t, t + \Delta t]$, edellisen kohdan mukaisesti lämpötilan derivaatta ajanhetkellä t olisi $\Delta T/\Delta t$, jossa ΔT on lämpötilan muutos kyseisellä aikavälillä (katso kuva 4). Todennäköisempää on, että lämpötila ei ole muuttunut aivan suoraviivaisesti, tasaisella nopeudella. Yleisesti erotusosamäärä $\Delta T/\Delta t$ antaa siten likiarvon derivaatalle ajanhetkellä t eli

$$T'(t) \approx \frac{\Delta T}{\Delta t},$$

jossa ΔT on siis lämpötilan muutos ajanhetkestä t ajanhetkeen $t + \Delta t$.

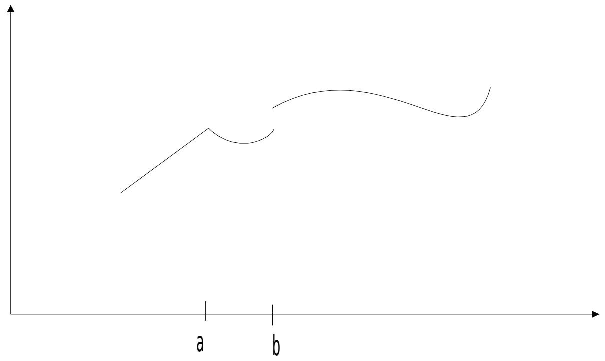
Kuva 5 havainnollistaa tätä likiarvon laskentaa. Jatkuva käyrä on lämpötilan kuvaaja; pallot ovat mittausarvoja, jotka ovat käytettävissä. Edellä oleva derivaatan likiarvo on saatu ajattelemalla, että lämpötila muuttuisi tasaisella nopeudella mittausarvojen välillä (katkoviivat). Kuvasta nähdään, että ajanhetkellä $t = 1$ oikea lämpötila nousee hieman jyrkemmin kuin katkoviiva, joten likiarvolasku antaa oikeaa arvoa hieman pienemmän derivaatan arvon tässä esimerkissä. Kuvasta voi hahmottaa, että jyrkkyysero pienenee ja likiarvo paranee, jos seuraava t:n arvo (joka kuvassa on 2), on lähempänä pistettä $t = 1$, jossa derivaattaa määrätään.



Kuva 5. Lämpötilafunktio $T(t)$ ja derivaatan likiarvon laskemisessa ajateltu lämpötilan kulku (katkoviiva).

Derivaatan yleinen matemaattinen määritelmä

Matematiikassa voidaan määritellä hyvinkin erikoisia funktioita, mutta käytännössä esiintyvät funktiot ovat kahta tapausta lukuun ottamatta sellaisia, että ne pienellä muuttujan välillä muuttuvat lähes suoraviivaisesti – sitä tarkemmin mitä pienempää muuttujan väliä tarkastellaan, jolloin lyhyesti voi sanoa, että funktio muuttuu paikallisesti suoraviivaisesti. Kuvassa 6 näkyvät esimerkit näistä poikkeustapauksista.



Kuva 6. Kohdat a ja b, joissa funktio ei muutu paikallisesti suoraviivaisesti.

Pisteessä a funktion kuvaajassa on kulma. Esimerkiksi jos kyseessä on vesisäiliön vedenkorkeus, vedenpinta on noussut hetkeen a mennessä, mutta hetkellä a vettä on alettu poistaa säiliöstä ja vedenpinta on alkanut laskea.

Pisteessä b taasen funktiossa on hyppäyksellinen epäjatkuvuus. Tällaista epäjatkuvuutta ei voi tapahtua vedenpinnan korkeudessa, mutta esimerkiksi jos kyseessä on lämmönjohtavuus paikan funktiona, epäjatkuvuus lämmönjohtavuuteen tulee materiaalin vaihtuessa toiseen.

Lukuun ottamatta tämäntapaisia kulmatapauksia ja epäjatkuvuustapauksia, käytännön sovellutuksissa esiintyvät funktiot ovat sellaisia, että paikallisesti ne muuttuvat suoraviivaisesti (vertaa siihen, että maapallo näyttää paikallisesti pannukakulta). Seuraava esimerkki havainnollistaa asiaa.

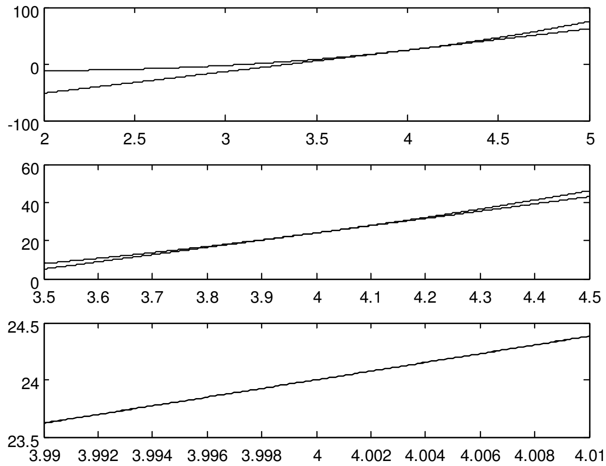
Esimerkki. Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^3 - 10x$. Tehtävänä on määrittää sen derivaatta kohdassa $x = 4$ eli $f'(4)$. Oheisen kuvasarjan ylimmässä kuvassa funktion kuvaaja on piirretty välillä $[2, 5]$. Kuvaan on piirretty myös tangentti, kun $x = 4$. Näemme funktion kuvaajan kaartumisesta ylöspäin, että funktion muutosnopeus kasvaa kuvan alueella.

Seuraavassa osakuvassa funktion kuvaaja on piirretty pisteen $x = 4$ pienemmässä ympäristössä $[3.5, 4.5]$. Kuvassa on myös sama tangentti. Tällä välillä funktion muutosnopeuden lisäys on varsin vähäistä, muutosnopeus on lähes vakio.

Alimmassa osakuvassa funktio ja tangentti on piirretty vielä pienemmässä pisteen $x = 4$ ympäristössä $[3.99, 4.01]$: nyt funktion kuvaaja on niin suora, että tässä kuvassa sitä ei voi erottaa tangentista. Funktion muutosnopeus kasvaa tällä välillä niin vähän, että piirtämistarkkuuden rajoissa se ei tule esiin. Toisin sanoen tällä pienellä välillä funktion muutosnopeus on lähes sama joka pisteessä, ja tapaus on melkein sama kuin aluksi tarkasteltu tapaus, jossa funktion kuvaaja on suora. Siten hyvän likiarvon muutosnopeudelle välin joka pisteessä, ja erityisesti kohdassa $x = 4$, saa kun laskee suoran tapauksen mukaisesti, kuinka paljon funktio muuttuu yhtä x:n yksikköä kohti, kun siirrytään esimerkiksi pisteestä $x = 4$ esimerkiksi pisteeseen $x = 4.001$, jolloin x:n muutos $\Delta x = 0.001$. Siis

$$\begin{aligned} f'(4) &\approx \frac{f(4.001) - f(4)}{0.001} \\ &= \frac{(4.001^3 - 10 \cdot 4.001) - (4^3 - 10 \cdot 4)}{0.001} \\ &= 38.012 \end{aligned}$$

Tätä sanotaan *keskimääräiseksi muutosnopeudeksi* välillä $[4, 4.001]$.



Kuva 7. Funktion $f(x) = x^3 - 10x$ kuvaajan zoomauksia kohdan $x = 4$ ympäristössä.

Kun tarkasteluväliä vielä pienennetään, funktion muutosnopeus ehtii muuttua vielä vähemmän, jolloin äskeisen kaltainen lasku antaa vielä tarkemman likiarvon funktion muutosnopeudelle välin jokaisessa pisteessä ja erityisesti pisteessä $x = 4$.

Jos esimerkiksi tarkastelemme funktion muutosta, kun x muuttuu arvosta 4 arvoon 4.0000001, jolloin x:n muutos $\Delta x = 0.0000001$, saamme samanlaisella laskulla kuin edellä derivaatan $f'(4)$ likiarvoksi:

$$f'(4) \approx 38.0000012$$

Edelleen vielä tarkemmin muutosnopeuden pisteessä $x = 4$ saamme, kun tarkastelemme vielä pienempiä x:n muutoksia Δx. Derivaatta määritelläänkin matemaattisesti sinä keskimääräisen muutosnopeuden raja-arvona, jota lähestytään, kun x:n muutos Δx lähestyy 0:aa.

Derivaatan matemaattiseen määritelmään sisältyy se, että tämä raja-arvo on sama muutoksen Δx sekä positiivisilla että negatiivisilla arvoilla. Tämä vaatimus on fysikaalisestikin ajatellen selvä: esimerkiksi edellä kuvassa 6, jossa kohdassa a kuvaajassa on kulma, on sen vasemmalla puolella eri muutosnopeus kuin oikealla puolella eikä fysikaalisesti sen takia ole mielekästä puhua muutosnopeudesta pisteessä a. Samanlainen tilanne on kuvan 6 erikoispisteessä b.

Näin on havainnollisesti perusteltu derivaatan määritelmää, joka matematiikassa on otettu käyttöön:

Määritelmä. Jos funktio $f(x)$ on määritelty pisteen x_0 ympäristössä, derivaatta pisteessä x_0 määritellään raja-arvona:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

jossa $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, edellyttäen että raja-arvo on olemassa ja äärellinen (raja-arvo voi olla ääretön, mutta sitä ei hyväksytä derivaataksi, koska se sotkisi derivointisäännöt).

Kun tätä määritelmää sovelletaan edellisen esimerkkitapauksen funktioon $f(x) = x^3 - 10x$, saadaan suoraviivaisilla laskuilla: $f'(4) = 38$. Kuten edellä nähtiin, erotusosamäärän avulla saadut likiarvot lähestyivät tätä tarkkaa arvoa.

Derivaatan geometrinen tulkinta

Derivaatan tulkinta tangentin kulmakertoimena on joskus hyödyllinen. Tämä tulkinnan näemme kuvasta 7 (etenkin alin osakuva): funktio jossain pisteessä ja pisteeseen piirretty tangentti kasvavat samalla vauhdilla. Tangentin kulmakerroin on itse asiassa määritelty samalla tavalla kuin derivaatta (tai tämä ominaisuus voidaan johtaa), joten pätee, että funktion derivaatta jossain pisteessä on yhtä suuri kuin vastaavaan kuvaajan pisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin. Kuvan 6 erikoispisteissä a ja b, joissa ei ole derivaattaa, ei myöskään ole yksikäsitteisiä tangentteja.

Fysikaalinen perustelu derivaatan määritelmälle

Edellä derivaatan yleinen määritelmä raja-arvona perusteltiin geometrisesti. Asiaan voidaan liittää myös fysikaalisia perusteluita, jotka on havainnollisinta esittää nopeuden avulla. Olkoon $f(x)$ matka, jonka auto on kulkenut jostain alkuajasta ajanhetkeen x. Tällöin erotusosamäärä $(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))/\Delta x$ on auton keskinopeus aikavälillä $[x_0, x_0 + \Delta x]$. Ajatellaan esimerkiksi tapausta, jossa aikavälin pituus Δx on 100 sekuntia ja auton nopeus kasvaa tällöin arvosta 50 km/h arvoon 52 km/h. Keskinopeus on silloin näiden nopeuksien välillä, suuruusluokkaa 51 km/h. Pidetään ajanhetkeä x_0, jolla hetkellä auton nopeus on siis 50 km/h, koko ajan samana, mutta ajatellaan pienempiä aikavälejä Δx. Esimerkiksi, jos se on 1 sekunti, auton nopeus on ehtinyt kasvaa arvosta 50 km/h esimerkiksi vain arvoon 50.02 km/h, jolloin keskinopeus on suuruusluokkaa 50.01 km/h. Edelleen jos tarkastellaan 0.001 sekunnin pituista aikaväliä Δx, auton nopeus on ehtinyt kasvaa vielä vähemmän, ehkä arvoon 50.00002 km/h, jolloin keskinopeus tällä aikavälillä on suuruusluokkaa 50.00001 km/h. Näin näemme fysikaalisesti, että kun aikavälin pituus Δx lähenee nollaa, keskinopeus tällä välillä lähenee auton nopeutta hetkellä x_0. Siten jos tunnemme auton ajaman matkan $f(x)$, auton nopeus eli ajetun matkan muutosnopeus saadaan samanlaisena keskimääräisen muutosnopeuden raja-arvona kuin edellä geometrisin perusteluin.

Kotitehtäviä

Edellä käsiteltyihin kohtiin voidaan liittää esimerkiksi seuraavantapaisia kotitehtäviä.

Kuvaaja suora. Voidaan antaa kuvan 2 mukaisia tapauksia:

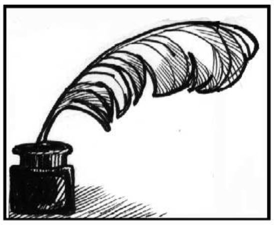
1) Auton matkamittarin lukema [km] ajan [h] funktiona. Pyydetään määrittämään derivaatta ja kysytään, miksi sitä arkielämässä sanotaan (nopeus; $v(t) = s'(t)$).
2) Auton nopeus [m/s] ajan [s] funktiona. Pyydetään määrittämään derivaatta ja kysytään, miksi sitä arkielämässä sanotaan (kiihtyvyys; $a(t) = v'(t)$).
3) Verojen määrä [euroja] tulojen [euroja] funktiona (kuvaaja voi olla paloittain suoraviivainen, kuten muissakin esimerkeissä). Pyydetään määrittämään derivaatta suurimmilla tuloilla ja kysytään, miksi sitä 100:lla kerrottuna arkielämässä sanotaan (marginaaliveroprosentti).
4) Talon energiamittarin lukema [kWh] ajan funktiona [h]. Pyydetään määrittämään derivaatta ja kysytään, miksi sitä arkielämässä sanotaan (teho [W]).
5) Säiliössä on vettä ja sitä tulee lisää putkesta. Annetaan säiliössä olevan veden määrä [m^3] ajan [h] funktiona. Pyydetään määrittämään derivaatta ja kysytään, miksi sitä arkielämässä sanotaan (virtaama [m^3/h]).

Derivaatan likiarvo. Voidaan antaa kuvan 4 mukaisia tapauksia, jotka voivat olla samanlaisia sovellutuksia kuin suoran tapauksessa, nyt vain funktion arvot on annettu erillisillä argumentin arvoilla. Toinen tärkeä tehtävätyyppi on sellainen, jossa annetaan funktion lauseke, joka voi olla varsin monimutkainenkin useita alkeisfunktioita sisältävä, ja pyydetään laskemaan jossain pisteessä derivaatan likiarvo, kuten edellä laskettiin likimäärin funktion $f(x) = x^3 - 10x$ derivaattaa $f'(4)$. Tällöin voidaan tehdä kokeiluja, mikä vaikutus käytetyllä Δx:n suuruudella on. Periaatteessa on sitä parempi, mitä pienempi Δx on. Mutta sen takia, että laskimet ja tietokoneet esittävät luvut vain tietyllä tarkkuudella, liian pieni Δx:n arvo heikentää laskentatarkkuutta pyöristysvirheiden takia. Lopulta jos esimerkiksi $x_0 = 1$ ja $\Delta x = 10^{-16}$, niin $x_0 + \Delta x = 1.0000000000000001$. Jos laskimen tai tietokoneen muistipaikkoihin mahtuvat vain 16 ensimmäistä numeroa, niin viimeinen ykkönen ei sovi muistiin, ja tämä luku pyöristyy 1:ksi, jolloin derivaatan approksimaatioksi tulee 0. Nyrkkisäännön mukaan tietokoneohjelmissa yleensä tarkimman derivaatan arvon saa, kun käyttää Δx:n arvoa 10^{-8} . Laskimissa, joissa lasketaan noin 12 numerolla, vastaava optimaalinen arvo on luokkaa 10^{-6}. Laskimissa, joissa on numeerinen derivointi, voi saada valita Δx:n arvon, mutta laskimet käyttävät erotusosamäärää tarkempaa menetelmää (esim. ns. keskeisdifferenssiä), jolloin paras Δx:n arvo on yleensä paljon suurempi (esim. 10^{-4}).

Derivaatan geometrinen tulkinta. Tähän kohtaan voi liittää samanlaisia käytännön sovellutuksia kuin edellä on mainittu, nyt vain kuvaajat eivät ole suoria. Tehtävänä on määrätä derivaatan likiarvo jossain pisteessä piirtämällä tangentti ja määrittämällä sen muutosnopeus, kulmakerroin.

Viitteet

M. Lehtinen: Neljä tietä derivaattaan. *Solmu* 1/2009.



Derivaatta – turhakkeesta sanataiteeksi

Maisa Spangar
Kiimingin lukio

Silloin tällöin kuulee jonkun jo koulunsa lopettaneen ihmisen muistelevan, että olihan sitä matikkaakin aika paljon. Jos tarina jatkuu tyyliin ”En minä siitä mitään ymmärtänyt”, seuraavat sanat ovat todennäköisesti ”enkä ole työssäni mihinkään tarvinnutkaan”. Kerronnassa saattaa joskus aistia jopa suoranaista ylpeyttä. Kertojalta voisi tietenkin myötätuntoisesti kysäistä, oppiko hän kuitenkin lukemaan ja/tai kirjoittamaan, mutta se taas kuulostaisi jostain syystä suorastaan solvaukselta.

Miksi näin? Lukemista, laskemista ja kirjoittamista on aina pidetty perustaitoina, joita myös harjoitellaan koulun alusta alkaen. Näistä taidoista kuitenkin vain matematiikan tarve saatetaan myöhemmin kyseenalaistaa ja silloinkin usein sellaisten ihmisten toimesta, jotka eivät varsinaista matematiikkaa ole koskaan opiskelleetkaan, vaan laskentoa, josta on turhan aikaisessa vaiheessa ruvettu käyttämään sanaa matematiikka. Laskento olisi ihan kunniallinen termi, ja laskento ehkä enemmän miellettäisiin myös elämässä tarpeelliseksi taidoksi.

Kun sitten hivuttaudutaan enemmän matematiikkaan, tuntuu, että käsitys derivaatasta ja sen tarpeellisuudesta on aika hatara kohtuullisen suuresta asiaan käytetystä tuntimäärästä huolimatta. Yhteys tangentin kulmakertoimeen näyttäisi pysyvän mielessä, mutta kun puhuu jonkin asian muutosnopeudesta ilman tarkasteltavaa funktiota, sillä ei ymmärretä olevan tekemistä derivaatan kanssa. Keskitymmekö ehkä liiaksikin tutkimaan määritelmän nojalla erilaisten patologisten funktioiden jatkuvuutta ja derivoituvuutta annetussa pisteessä? Taito tietysti sekin, mutta kokonaisuus ei saisi hämärtyä yksityiskohtien tankkauksessa.

Hätkähdyttävimmän derivaattalausunnon kuulin yli kymmenen vuotta sitten eräässä koulumme juhlassa, jossa juhlapuhuja, silloinen kansanedustaja Niilo Keränen listasi, mitä hyödyllistä koulussa oppii. Sen jälkeen hän totesi, että turhaakin siellä opiskellaan kuten jotakin derivaattaa, jota ei kukaan maailmassa tarvitse mihinkään. Tällainen lausunto humanistin suusta kirvonneena ei ole mitenkään epätavallinen, mutta nyt oli kyseessä lääkärikoulutuksen saanut henkilö, joka todennäköisesti oli aikanaan saanut pitkän matematiikan suorittamisesta tukun pisteitä lääkikseen sisäänpääsyä avittamaan.

Juhlapuheen sekaan ei voi kommentteja heittää. Siltä istumalta päätin kuitenkin tehdä omalta osaltani jotain ylimääräistäkin asian hyväksi: oppilaani saavat joka vuosi kirjoittaa aineen derivaatasta ja sen merkityksestä, eikä kirjoituksessa saa olla yhtään kaavaa. Näin on tapahtunutkin ja olen lukenut monia ansiokkaita kirjoituksia aiheesta. Pari vuotta sitten ehdotin, että asian voi aineen sijasta kiteyttää myös japanilaiseen haiku- tai tankamuottiin. Haiku on kolmirivinen runo, jossa saa riveittäin olla tavuja viisi, seitsemän ja viisi. Tankassa puolestaan on viidellä rivillä tavuja viisi, seitsemän, viisi, seitsemän ja viisi. En väitä, että derivaatan merkitys olisi tämän jälkeen kultakirjaimin mieleen painunut. Uskon kuitenkin tietoisuuden siitä, että derivaatalla ylipäänsä on maailmassa jokin merkitys, pysyvän oppilaiden mielessä. Eivät ainakaan myöhemmässä elämässä päästelisi suistaan sammakoita.

Vuoden 2008 haiku- ja tankasatoa:

Derivaatalla
esitetään funktion
muutosnopeutta.

Mikko Mourujärvi

Derivaatalla
on moniakin kivoja
sovelluksia.

Tapio Väisänen

Derivaatta on
matikan hyödyllisin
osa-alue.

Tuomas Kosola

Funktion arvo
taloudellisimmillaan
voidaan laskea
derivaatan avulla.
Fiksu kauppias!

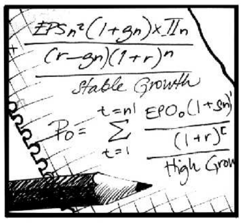
Taija Ylitolva

Käyrän pisteeseen,
vallan mielivaltaiseen
tehdyn tangentin
jyrkkyys voidaan määrittää
derivaatan avulla.

Samuli Honkaniemi

Derivaatalla
tutkitaan myös funktion
kasvutahtia
käyttämällä hyväksi
kulmakerrointa.

Susanna Kynsilehto



Matematiikasta, mallittamisesta - ja taloustieteestä, osa 2

Mai Allo
VTL, ekonomisti, mai.allo@helsinki.fi

Globalisaation ongelmista suoran yhtälöön

”Kansainvälisellä kaupalla maailma vaurastuu. – Miksi sitten osa kansakunnista on edelleen köyhiä?”

”Globalisaatio tuo mukanaan paljon hyvää kaikille. – Mutta entä ympäristötuhot?”

”Siirtyykö kaikki tuotanto Kaukoitään?”

Jokainen meistä pohtii joskus kansainvälisen kaupan kiemuroita. Yllä esitetyn kaltaisia väittämiä ja kysymyksiä tulee mieleen esimerkiksi lähimarketin hedelmätiskillä. Siellä kun pitää päättää, nosteleeko pussiinsa Chiquitaa, reilun kaupan banaaneja vai kotimaista lanttua.

Ja matematiikkako siis auttaisi ratkomaan globalisaation ongelmia? – Kyllä vain! Kansainvälisen kaupan teoria ja tutkimus kuuluu kansantaloustieteen alaan ja ekonomistien työkenttään, johon tutustuimme Solmun edellisessä numerossa 1/2009. Samassa yhteydessä kävimme läpi mallittamisen perusteita ja taloustieteen matemaattisia sovelluksia. Jatkamme nyt samasta aiheesta.

Kansantaloustiede tarjoaa useita lähestymistapoja kansainvälisen kaupan ja valuuttaliikkeiden sekä niiden seurausten analysoimiseen.

Yksi niistä on suhteellisen edun teoria, jota alkoi kehittää David Ricardo -niminen ekonomisti kolmatta sataa vuotta sitten. Sen paikkansa pitävyyttä on testattu kokeellisesti, ja se selittää vielä tänäkin päivänä huomattavan osan kansainvälisen kaupan tapahtumista.

Käsittelemme suhteellisen edun teoriaa useasta syystä. Ensinnäkin, se on yksi kansantaloustieteen vahvimmista teorioista, jonka pelkistetyinkin muoto johtaa selkeisiin tuloksiin ja tarjoaa mielenkiintoisia tulkinnan mahdollisuuksia. Toiseksi, arkikeskustelussa ja mediassa kyseinen teoria esitetään usein väärin. Kolmanneksi, yläasteen matematiikka riittää suhteellisen edun teorian perusteiden ymmärtämiseen. Matemaattisen mallin kun ei tarvitse olla pelottavan näköistä salakirjoitusta, vaan jo hyvin yksinkertaisin keinoin päästään kiehtoviin sovelluksiin. Neljänneksi, suhteellisen edun teorian sovellukset eivät rajoitu valtioiden välisen kaupan analyysiin. Samaa teoriaa voi käyttää myös yhden maan sisäisten tai vaikka perheenjäsenten välisten työnjakokysymysten ratkaisemiseen.

Tutustutaan aluksi kyseisen teorian pääväittämään, joka kuuluu karkeasti ottaen näin:

Maat erikoistuvat tuottamaan ja viemään niitä hyödykkeitä, joissa niillä on vaihtoehtoiskustannuksien eroavuuteen perustuva suhteellinen etu.

Näin toimien kaikki osapuolet hyötyvät, koska vauraus kasvaa – keskimäärin. Koska vauraus kasvaa keskimäärin, tarkoittaa se, että vaihdannassa (kaupassa) voi olla voittajia ja häviäjiä. Mutta vaihdannasta saatava hyöty (vaurauden lisäys) on niin suuri, että jos ”voittajat” kompensoisivat ”häviäjille”, saisivat kaikki ainakin vähän enemmän kuin ennen vaihdantaa.

Melkoinen väittämä, vai mitä? Siitä voisi vetää sen johtopäätöksen, että joidenkin kansakuntien köyhyys ei johdukaan kauppasuhteista tai suhteellisen edun mukaisesta toiminnasta sinänsä, vaan siitä, että me ihmiset olemme jakaneet kaupankäynnin tarjoamat hyödyt epätasaisesti.

Suhteellisen edun teoria kertoo, mikä olisi paras tapa ”kasvattaa yhteistä kakkua”. Se ei kerro, miten kakku tulisi jakaa, vaan auttaa ainoastaan päättelemään, millä tavoin potentiaalista jaettavaa saadaan eniten.

Tämä ei tietenkään tarkoita sitä, että kysymykset tulonjaosta tai oikeudenmukaisuudesta olisivat vähemmän tärkeitä. Mutta ne ovat arvovalintoja, jotka luultavasti eivät ratkea yksiselitteisellä tavalla minkään tieteenalan keinoin.

Näin ollen tyydymme etsimään vastausta siihen, miten saadaan suurin mahdollinen ja jollakin tavalla mitattava tuotos, kun voimavarat ovat rajalliset. Kyse on siis pohjimmiltaan optimoinnista, jota käsittelin Solmun edellisessä numerossa.

Rakennamme nyt yhdessä mallin suhteellisen edun mukaisesta työnjaosta.

Kun malli on valmis, koetamme sen avulla vastata esittämiimme kysymyksiin – kuten siihen, tuotetaanko kohta jokainen tavara tai palvelu Kiinassa tai Pakistanissa. Ja ennakkovastauksena kärsimättömimmille ja kiireisimmille lukijoille paljastan jo tässä, että vastaus on suhteellisen edun teorian mukaan: ei.

Mallittaminen alkaa oletuksista

Lähdemme liikkeelle seuraavista oletuksista:

I) maailmassa on vain kaksi ihmistä, ja

II) he tarvitsevat elääkseen tarkalleen kahta asiaa eli hyödykettä

III) kumpikin ihmisistämme – eli taloudellisesta toimijastamme – osaa tuottaa näitä kahta hyödykettä

IV) mallimme kahden ihmisen – toimijan – aika ja kyvyt ovat rajalliset

Oletukset I), II) ja III) on tehty siksi, että malliamme on helpompi käsitellä kaksi- kuin moniulotteisena. Oletus IV) tuntunee lukijastakin aivan todellisuutta vastaavalta: ovathan aikamme ja kykymme rajatut myös oikeassa maailmassa!

Tarkennamme nyt oletuksiamme ja nimeämme mallimme toimijat ja hyödykkeet. Näin työskentely on mukavampaa. Mallihenkilömme olkoot Maija ja Matti. Olkoon toinen hyödyke kalaa ja toinen marjoja. Laskiessamme käytämme niistä kirjainlyhenteitä K ja M.

Oletamme Maijan työkyvyn seuraavanlaiseksi:

V) jos Maija käyttää koko työaikansa ja tarmonsa kalastamiseen, saa hän maksimissaan kolme (3) kiloa kalaa. Tällöin häneltä ei tietenkään riitä enää aikaa eikä voimia marjojen etsimiseen. Mutta jos hän keskittyy pelkkään poimimiseen, pystyy hän keräämään kaksi (2) litraa marjoja. Silloin hän ei ehdi kalastaa lainkaan.

Entä mitä oletamme Matista?

Kuulukoon oletus näin:

VI) jos Matti keskittyy vain kalastamaan, nousee merestä kaksi (2) kiloa saalista, mutta jos hän kyykkii koko työaikansa marjametsässä, hän saa täyteen kolmen (3) litran kopan.

Taulukoidaan Maijan ja Matin voimavaroista ja kyvyistä tekemämme oletukset V) ja VI).

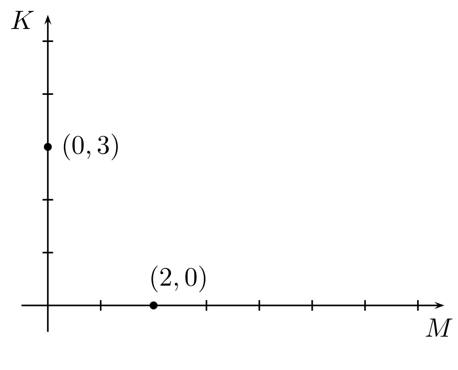
Hyödyke	max M	max K
Maija	2	3
Matti	3	2

Taulukko I.

Maija ja Matti voivat tuottaa myös sekä kalaa että marjoja eli jonkin kombinaation kalasta ja marjoista. Mutta koska työaika ja -kyvyt on jo oletettu rajallisiksi, seuraa siitä, että jos kumpi tahansa toimijamme haluaa kalaa enemmän, täytyy hänen tyytyä pienempään marjamäärään, ja päinvastoin.

Luokaamme nyt kahden hyödykkeen, marjojen ja kalan, (M, K)-koordinaatisto, jossa tutkimme Maijan ja Matin talouksia.

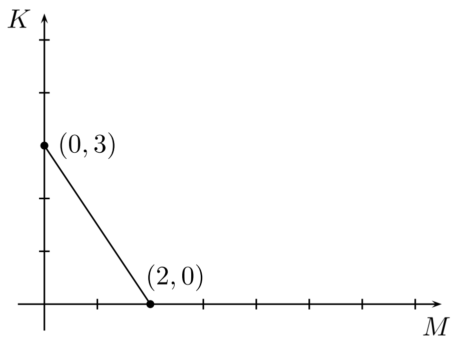
Aloitamme Maijasta. Seuraavassa (M, K)-koordinaatistossa pisteet $(0, 3)$ ja $(2, 0)$ kuvaavat niitä tilanteita, jossa Maija tuottaa vain jompaa kumpaa hyödykettä (vertaa taulukkoon I).



Kun yhdistämme nuo pisteet, saamme suoran[1], jonka yhtälö on

$$K = -\frac{3}{2}M + 3, \qquad (1)$$

graafisesti esitettynä



Kuva 1.

Jos yhtälö (1) symboleineen tuntuu hankalalta, kuvittele mieleesi matematiikankirjasi standardikoordinaatisto, jossa K:n paikalla on y ja M:n paikalla x.

Yhtälö (1) on nimeltään Maijan talouden tuotantomahdollisuuksien käyrä. Se kertoo, millaiset ovat Maijan tuotantomahdollisuudet, jos hän toimii yksin. Kaikki pisteet, jotka sijaitsevat suoralla, kuvaavat tehokasta toimintaa. Tehokas kuuluu kansantaloustieteen termeihin ja se tarkoittaa tässä sitä, että Maija käyttää työaikanaan kaikki voimavaransa ja saa näin olemassa olevilla voimavaroillaan niin paljon kalaa ja marjoja kuin mahdollista. Pisteet, jotka sijaitsevat suoran oikealla puolella, siis joille pätee

$$K > -\frac{3}{2}M + 3$$

eivät ole Maijan resursseilla saavutettavissa lainkaan (oletus V). Jos taas

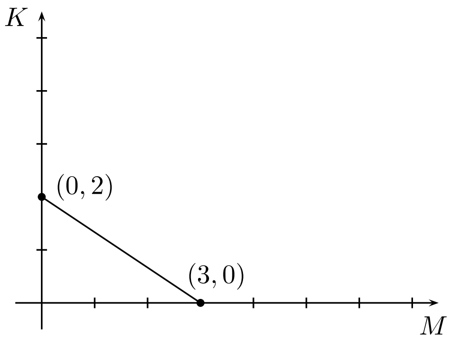
$$K < -\frac{3}{2}M + 3,$$

kuvataan tehotonta toimintaa. Suoran ja koordinaattiakselien rajaaman kolmion sisäpuolelle jääviä pisteitä nimitämme tehottomiksi siksi, että Maija voisi saada käytettävissä olevilla kyvyillään enemmän jompaa kumpaa hyödykettä luopumatta silti toisesta.

Ja nyt Matin talouteen. Oletuksen VI) ja taulukon I perusteella Matin kalastusmaksimia kuvaa (M, K)-avaruuden piste $(0, 2)$ ja suurinta mahdollista marjastuskapasiteettia piste $(3, 0)$. Matin omavaraistaloutta kuvaa näin ollen yhtälö

$$K = -\frac{2}{3}M + 2, \qquad (2)$$

joka graafisesti esitettynä näyttää tällaiselta



Se toimii samoin periaattein kuin Maijankin: tehokkaat pisteet sijaitsevat suoralla, tehottomille pätee

$$K < -\frac{2}{3}M + 2,$$

kun taas pisteitä, joille pätee

$$K > -\frac{2}{3}M + 2,$$

Matti ei omin voimin enää saa. Ei, vaikka kuinka yrittäisi – mehän olemme sen estäneet oletuksessa VI). Ja jotta malli toimisi, täytyy oletuksista pitää kiinni.

Kulmakerroin ilmaisee vaihtoehtoiskustannukset

Jatkamme vielä mallin perustusten luomista. Tutkimme, mitä oletuksistamme seuraa.

Keskitymme hetkeksi vain Maijan talouteen. Jokaisessa suoran (1) pisteessä pätee seuraava sääntö:

Jos Maija haluaa lisää marjoja ja ryhtyy siis poimimaan niitä ahkerammin, on hänen jokaista tuotettua lisämarjalitraa kohti luovuttava $\frac{3}{2}$ kalakilon tuotannosta. Tätä kuvaa suoran kulmakerroin $-\frac{3}{2}$. Jos hän taas haluaisikin yhden lisäkalakilon, on silloin luovuttava $\frac{2}{3}$ marjalitran noukkimisesta (ja syömisestä!). Kulmakertoimen negatiivinen etumerkki symbolisoi valintaa: jos jotain halutaan lisää, on jostain muusta silloin luovuttava.

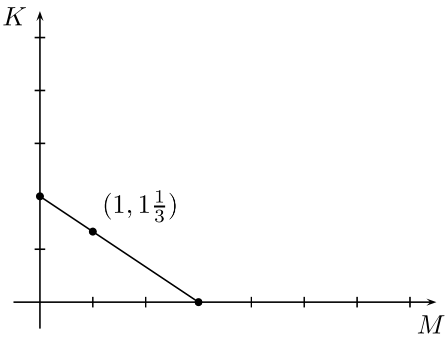
Pysähdy tähän ja varmistu siitä, että olet ymmärtänyt edellä olevan säännön. Jos se on vaikeaa, tee näin: ota kynä ja katso Maijan talouden kuvaa (kuva 1). Pistä kynänkärki johonkin Maijan tuotantomahdollisuuksia kuvaavan suoran kohtaan ja siirrä sitten kynää pienen pätkän verran suoran suuntaisesti kohti vaaka-akselia. Huomaat, että kohdassa, mihin olet siirtynyt, on pystyakselin koordinaattiarvo nyt alempana kuin ennen kynänkärjen siirtymistä. Ja se on alentunut – siis vähentynyt! – tarkalleen $\frac{3}{2}$-kertaisesti verrattuna vaaka-akselin koordinaattiarvon kasvuun.

[1] Olemme olettaneet vakioiset skaalatuotot. Yksinkertaisuuden vuoksi oletamme, ettei taloudessamme toteudu ns. vähenevien tuottojen sääntö, joka tekisi kuvaajastamme suoran sijasta kaartuvan käyrän. Yksinkertaistuksemme ei muuta analyysin perustaa eikä lopputulosta.

Lähestymme juuri nyt yhtä kansantaloustieteen tärkeimmistä käsitteistä, vaihtoehtoiskustannusta. Edellä tulimme sen juuri laskeneeksi! Maijan taloudessa yhden kalakilon vaihtoehtoiskustannus marjalitroissa laskettuna on $\frac{2}{3}$.

Yleisemmin ilmaisemme, että minkä tahansa hyödykkeen vaihtoehtoiskustannus on se määrä muita hyödykkeitä, joista täytyy luopua tuon yhden hyödykkeen lisäyksikön saamiseksi.

Pian näemme, miten suhteellisen edun teoria rakentuu vaihtoehtoiskustannuksen käsitteen varaan. Mutta verrataksemme Maijaa ja Mattia tulee meidän selvittää Matin vaihtoehtoiskustannukset.

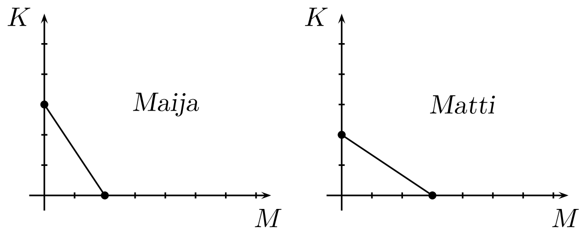


Kuva 2.

Katso nyt kuvaa 2. Jos Matti aluksi tuottaisi pelkkää kalaa, kuvaisi hänen tuotanto- ja kulutusmahdollisuuksiaan piste $(0, 2)$. Mutta vain kalaa sisältävä ruokavalio alkaisi ehkä kyllästyttää, ja vitamiininpuute vaivaisi. Tällöin Matti päättäisi poimia hiukan marjoja, esimerkiksi yhden litran. Se onnistuu kyllä, mutta silloin hänen taloudelleen jää käytettäväksi $\frac{2}{3}$ kalakiloa vähemmän! Matti tuottaisi ja kuluttaisi pisteessä $(1, 1\frac{1}{3})$, joka kertoo, että käytössä olisi litra marjoja ja $1\frac{1}{3}$ kiloa kalaa.

Näin ollen Matin taloudessa yhden marjalitran vaihtoehtoiskustannus kalakiloissa laskettuna on $\frac{2}{3}$. Voimme ilmaista asian myös niin, että yhden marjalitran tuottaminen "maksaa" Matille $\frac{2}{3}$ kiloa kalaa. Lyhimmin tämä ilmenee Matin tuotantomahdollisuuksia kuvaavan suoran kulmakertoimesta, joka on juuri $-\frac{2}{3}$.

Piirrämme tähän vielä kerran rinnakkain Maijan ja Matin taloudet. Niissä he nyt elelevät yksinään, kumpikin tuottaen joko kalaa tai marjoja tai molempia, ja tyytyen siihen kulutustasoon, jonka yksin saavat aikaiseksi.



Yhteisvoimin enemmän

Mutta entä jos Matti tai Maija jostakin syystä tarvitsisikin enemmän hyödykkeitä kuin mitä itse pystyy tuottamaan? Vastaisit ehkä, että no, tehköön pitempää työpäivää! Mutta katsopa oletuksiamme: työaika on jokin kiinteä tuntimäärä. Maija ja Matti eivät jaksa tehdä enempää. On siis löydettävä jokin muu keino hyödykemäärän lisäämiseksi.

Se muu keino on työnjako suhteellisen edun periaatteen mukaisesti. Huomaamme, että sen avulla kummallakin on mahdollisuus saada lisää hyödykkeitä työpanostaan muuttamatta.

Ajatellaan ensin, että Maija ja Matti päättävät ryhtyä kalastamaan yhdessä. Silloin he saavat yhteensä 2+3 eli 5 kiloa kalaa. Ja jos he kumpikin käyttävät kaiken aikansa marjastukseen, saisivat he syödäkseen niin ikään $3 + 2$ eli 5 litraa marjoja. Tämä ei vielä sinänsä muuta tilannetta suuntaan tai toiseen, koska henkeä kohden laskettuna syötävää ei olisi aiempaa enempää.

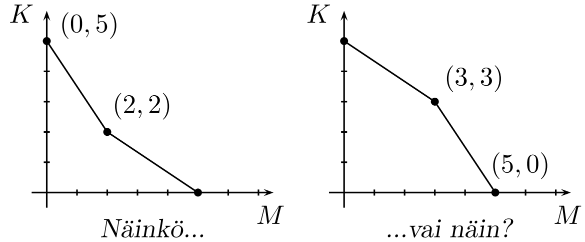
Tarvitsemme kuitenkin jatkoa varten nuo yhden hyödykkeen yhteistuotantomaksimit, koska ne kertovat resurssien käytön ääripäät, jota ei voida ylittää.

	max M	max K
Maija	2	3
Matti	3	2
Yhdessä	5	5

Taulukko II.

Selvitämme nyt, mitä pitäisi tehdä, jos Matti ja Maija haluaisivat jonkin kombinaation hyödykkeistä, ja ainakin toista enemmän kuin yksinään voivat tuottaa.

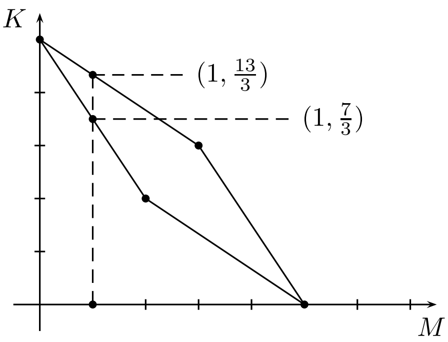
Hahmotamme pulmaa ensin visuaalisesti. Piirretään (M, K)-avaruuteen koordinaatisto, johon on valmiiksi merkitty yhteistuotannon maksimipisteet $(0, 5)$ ja $(5, 0)$. Kysymys kuuluu nyt, miten yksinäistalouksien koordinaatistoissa näkyvät suorat tulisi yhdistää, jotta niiden muodostaman käyrän ja koordinaattiakselien väliin jäävä tila maksimoituisi?



Nyt on aika ottaa käyttöön edellä määrittelemämme vaihtoehtoiskustannus!

Osoitimme aiemmin, että jos Maija haluaa yhden marjalitran lisää, joutuu hän luopumaan $\frac{3}{2}$ kalakilon pyydystämisestä, eli Maijan vaihtoehtoiskustannus yhden marjalitran tuottamiseksi on $\frac{3}{2}$ kalakiloa. Matin oletimme taidoiltaan toisenlaiseksi, hänelle yhden kalakilon vaihtoehtoiskustannus vastaavasti laskien on $\frac{3}{2}$ marjalitraa.

Kuvitelkaamme itsemme Maijan ja Matin yhteistalouden pisteeseen $(0, 5)$, jossa he tuottavat ja kuluttavat viittä kalakiloa, mutta eivät yhtään marjaa. Jos he haluaisivat yhden marjalitran, mutta silti mahdollisimman paljon kalaa, kannattaisi yhden marjalitran poimimiseen siirtää se henkilö, joka taitojensa ja kykyjensä perusteella luopuu pienemmästä määrästä kalaa yhden marjalitran vuoksi. Graafisesti:



Näin päätellen kannattaa kalastuspuuhista irrottaa poimijaksi Matti. Matilla on marjan tuotannossa suhteellinen etu, koska

$$\left|-\frac{2}{3}\right| < \left|-\frac{3}{2}\right|.$$

Toisin sanoen hän luopuu yhden marjalitran tähden pienemmästä määrästä kalantuotantoa kuin Maija.

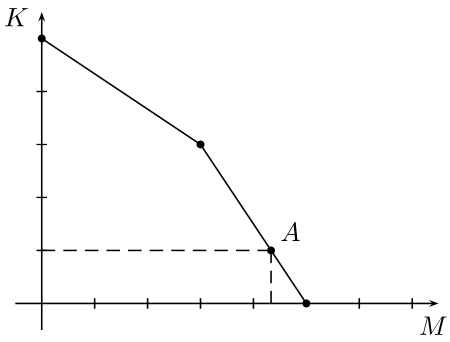
Pisteessä $(1, \frac{13}{3})$ Matti käyttää kiinteästä työajastaan osan siihen, että poimii marjoja. Litran poimittuaan hän alkaa kalastaa. Samaan aikaan Maija istuu koko työaikansa rannassa kalastaen.

Koska Maija joutuu yhden lisämarjalitran poimimiseksi luopumaan suuremmasta määrästä kalaa kuin Matti, maksimoituu yhteistalouden kokonaistuotanto siten, että välillä $M \in]0, 3[$ Maija tuottaa pelkkää kalaa ja Matti sekä kalaa että marjoja.

Siten tällä välillä yhteistalouden tuotantomahdollisuuksien kuvaajan kulmakerroin määräytyy Matin vaihtoehtoiskustannusten perusteella.

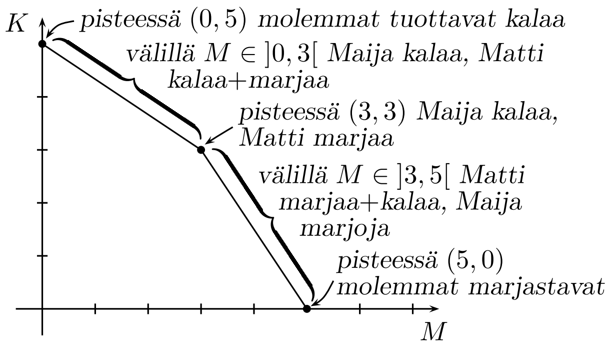
Pisteessä $(3, 3)$ Matti käyttää koko kapasiteettinsa marjastamiseen, koska oletimme hänen marjastusmaksimikseen 3 litraa (taulukko II). Niinpä Maija pyydystää kaikki kalat. Piste $(3, 3)$ on täydellisen erikoistumisen piste: jos taloudessa elävät henkilöt haluaisivat jostakin syystä käytettäväkseen tarkalleen kolme litraa marjoja ja kolme kiloa kalaa, kannattaisi Maijan erikoistua pelkkään kalastukseen ja Matin pelkkiin marjoihin.

Analyysin voi tehdä toisin päin aloittaen pisteestä $(M, K) = (5, 0)$. Siinä yhteistaloudella on käytettävissään 5 marjalitraa, mutta ei yhtään kalaa. Jos talouden toimijat, Maija ja Matti, nyt haluaisivat mahdollisimman paljon marjoja, mutta ainakin yhden kalakilon niiden lisäksi, (alla kuva 3, piste A), kannattaisi tuotanto järjestää siten, että kalastamaan ryhtyy se, joka ”maksaa” kalasta marjalitroina mitattuna vähiten. Siis Maija ryhtyköön kalastamaan, koska hänellä on kalan tuottamisessa suhteellinen etu. Kun $M \in]3, 5[$, määräytyy yhteistalouden tuotantomahdollisuuksien kuvaajan kulmakerroin Maijan vaihtoehtoiskustannusten perusteella.



Kuva 3.

Tehkäämme vielä yhteenveto tähänastisesta.



Kuva 4.

Näyttäisi siltä, että jos Maija ja Matti yhdistävät voimansa suhteellisen edun periaatteen mukaan, saa kumpikin käyttöönsä enemmän kalaa tai marjoja kuin yksinään saisi, vaikka yhden henkilön työponnistusta ei omavaraistalouteen verrattuna lainkaan lisätä.

Kun talous perustuu suhteellisen edun mukaiseen yhteistuotantoon ja vaihdantaan, saavat osapuolet enemmän hyödykkeitä samalla työmäärällä kuin yksinäistaloudessa.

Kahden hyödykkeen ja kahden henkilön maailmassa yllä oleva sääntö on vääjäämätön.

Vai onko? Sitä tutkimme tarkastelemalla lähemmin joitakin yksittäisiä koordinaatistojemme pisteitä ja tekemällä muutaman laskutoimituksen. Numeeriset kokeilut eivät sinänsä matematiikassa kelpaa minkään asian todistamiseen, mutta ne auttavat mallin toiminnan ja tulosten ymmärtämisessä[2].

1. asteen yhtälö tehokäytössä

Valitkaamme yhteistaloutta kuvaavalta tuotantomahdollisuuksien käyrältä (kuva 4) jokin piste, kun $M \in]0,5[$.

Selvitetään, paljonko kyseisessä pisteessä on saatavissa kalaa ja marjoja. Lasketaan, paljonko kalaa ja marjoja taloudenpitäjämme saisivat, jos hyödykepotti jaettaisiin kahdelle. Kysymme siis, saavatko Maija ja Matti jompaa kumpaa tai molempia hyödykkeitä enemmän kuin yksinäistaloudessaan.

Valitaan helppouden vuoksi kuvan 4 piste $(M,K) = (3,3)$. Siis kolme marjalitraa ja kolme kiloa kalaa. Mutta muistetaanpa, että syöjiäkin on nyt kaksi.

Yksinkertaisinta lienee olettaa tasajako. Siis henkeä kohden $\frac{3}{2}$ litraa marjoja ja $\frac{3}{2}$ kiloa kalaa.

Entä miten asiat olisivat Maijan yksinäistaloudessa? Jos hän sielläkin haluaisi tuon yhteistalouden tarjoaman puolitoista litraa marjoja, saisi hän yksin puurtaen yhtälön (1) perusteella

$$-\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{4}$$

kiloa kalaa. Tämän voit päätellä paitsi laskemalla, myös visuaalisesti katsomalla Maijan yksinäistalouden kuvaajaa (kuva 1).

Annettuna puolentoista litran marjamäärä on yhteistuotannon tarjoama ”voitto” Maijan kohdalta kalakiloissa laskettuna

$$\frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Ja jos Mattikin haluaisi $\frac{3}{2}$ litraa marjoja yksin tuottaen, saisi hän yhtälön (2) mukaan kalaa yhden kilon. Yhteistaloudessa Matti sai puolentoista marjalitran lisäksi kalaa enemmän kuin kilon!

Kumpikin osapuoli näytti voittavan yhteistuotantotaloudessa. Mutta nyt pitäisi mieleesi nousta epäily: jospa vain valitsimme esimerkin lukuarvot tai tarkasteltavan pisteen niin ovelasti, että saimme sen tuloksen, jota halusimme?

Kokeillaan toistakin pistettä – vaikka kuvan 4 piste $(1, \frac{13}{3})$. Tämä tarkoittaa, että henkeä kohden pisteessä on tasajako-oletuksella $\frac{1}{2}$ litraa marjoja ja $\frac{13}{6}$ kiloa kalaa.

Aiemman esimerkkimme logiikalla Maija saisi yksinään puolen marjalitran lisäksi

$$-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{9}{4}$$

kalakiloa. Ja yhdessä... mutta hetkinen, seis! Maija näyttäisi siis häviävän tässä savotassa – hänhän saisi $\frac{1}{12}$ kalakiloa vähemmän kuin yhteistaloudessa!

Nyt näyttää huonolta. Näinkö helposti teoriamme romahti?

Maltetaanpa vielä hetki, ja tutkitaan Matin tilanne. Yksinään hän saisi puolen marjalitran lisäksi yhtälön (2) mukaan

$$-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{3}$$

kiloa kalaa, joten Matin hyöty yhteistaloudesta on

$$\frac{13}{6} - \frac{5}{3} = \frac{1}{2}$$

kalakiloa.

Nyt tehtävämme juoni alkaa ehkä paljastua lukijalle. Vaikka yksi osapuoli näyttäisi ensin häviävän, käy kuitenkin ilmi, että onnekkaamman ”voitto” on aina suurempi kuin häviäjän tappio. Esimerkissämme:

$$\frac{1}{2} > \left| -\frac{1}{12} \right|.$$

Jatketaan nyt laskemista niin, että siirretään Matin ”voitosta” Maijalle viimeksimainitun menettämä $\frac{1}{12}$ kiloa. Nyt Maija ei ole yhteistaloudessa ainakaan hävinnyt, ja Matti on edelleen voitolla. Ja jos Matin ”voitto”

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

jaettaisiin vielä kahtia, olisi kumpikin saanut käyttöönsä enemmän kuin yksinään voisi edes haaveilla. Näin:

	käytettävissä on	
	M	K
Maija yksin	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$
Matti yksin	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$
Maija yhteistalous	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{6}$
Matti yhteistalous	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{6}$
Maija yhteistaloudessa kompensaation jälkeen	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{6} + \frac{1}{12} + \frac{5}{24} = \frac{59}{24}$
Matti yhteistaloudessa kompensaation jälkeen	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{6} - \frac{1}{12} + \frac{5}{24} = \frac{55}{24}$

Taulukko III.

[2] Mallin tulosten yleisestä todistamisesta kiinnostuneet voivat ottaa halutessaan yhteyttä.

Saman numeerisen kokeilun voi tehdä mille tahansa pisteelle $M \in]0,5[$ yhteistalouden käyrällä, lopputulos on aina sama. Kun talouden toimijat järjestävät tuotannon suhteellisen edun periaatteen mukaan, saadaan hyödykkeitä enemmän kuin osapuolten tuottaessa yksin. Tärkeä tulos on myös se, että hyödykkeitä pystyttiin tuottamaan niin paljon enemmän, että kummallekin osapuolelle riittäisi lisähyötyä tai ylimäärää, vaikka se jaettaisiin.

Mallistamme ei kuitenkaan voinut johtaa mitään kvantitatiivista informaatiota siitä, miten lisähyöty pitäisi jakaa. Me teimme esimerkissämme tasajaon – mutta mallimme puitteissa olisi voinut käydä niinkin, että Matti ottaa kaiken, eikä Maijalle jää mitään. Tai päinvastoin. Tai Maija ottaisi suurimman osan ja Matti loput. Tai...

Jos sinä luokkatovereinesi olisit onnistunut leipomaan mahdollisimman suuren kakun, miten ja millä perusteella jakaisitte sen?

Kaukoidästä kaikki halvemmalla?

Taas lukija alkaa epäillä – niin kuin pitääkin. Meidän tulee kysyä, kannattaako suhteellisen edun mukainen yhteistyö silloinkin, jos toinen osapuoli on kyvykkäämpi eli absoluuttisesti parempi kummankin hyödykkeen tuottamisessa.

Ryhtykäämme nyt yhdessä muuttamaan mallille antamiamme lukuarvoja ja kokeilemaan, mitä sitten tapahtuu.

Osan välivaiheista ja kuvista olen seuraavassa jättänyt pois, mutta jos harjoitus tuottaa ongelmia, voit ottaa allekirjoittaneeseen yhteyttä vaikka sähköpostitse. Autan mielelläni.

Oletetaan nyt Maijan tuotantomaksimin ääripäiksi kolme (3) kiloa kalaa ja viisi (5) litraa marjoja. Mattiressukalle vastaavat luvut olkoot vain kaksi (2) kalakiloa ja kaksi (2) marjalitraa.

Tee ensin Maijalle ja Matille yksinäisen taloudenpitäjän koordinaatistot ja tuotantomahdollisuuksien käyrät. Jos laskit ja piirsit ne oikein, näet, että Maijalle pätee

$$K = -\frac{3}{5}M + 3.$$

Matille puolestaan pätee

$$K = -\frac{2}{2}M + 2 = -M + 2.$$

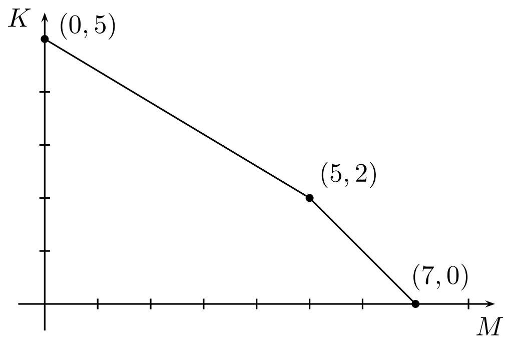
Suhteellinen etu marjojen tuottamisessa on Maijalla, koska

$$\left|-\frac{3}{5}\right| < |-1|$$

eli hän luopuu yhden marjalitran tähden pienemmästä määrästä kalaa kuin Matti. Matille siis jää suhteellinen etu kalastuksessa, vaikka juuri määrittelimme hänet molemmissa töissä Maijaa heikommaksi!

Piirrämme nyt yhteistalouden käyrän aloittamalla koordinaattiakseleille sijoittuvista tuotantomaksimeista.

Huomaamme, että suorat, joiden kulmakertoimet ovat $-\frac{3}{5}$ ja $-\frac{2}{2} = -1$, saadaan yhdistettyä vain yhdellä tavalla niin, että koordinaattiakselien tuotantomaksimipisteiden, origon ja kyseisten suorien väliin jäävä tila on mahdollisimman suuri. Se käy näin:



Sanoilla tulkittuna: pisteessä $(0,5)$ kumpikin tuottaa vain kalaa, pisteiden $(0,5)$ ja $(5,2)$ välillä Matti vain kalastaa, mutta Maija sekä kalastaa että marjastaa, ja pisteiden $(5,2)$ ja $(7,0)$ välillä Matti sekä kalastaa että marjastaa, mutta Maija vain marjastaa – kunnes pisteessä $(7,0)$ kumpikin vain marjastaa.

Nyt meidän täytyisi vielä näyttää, että vaikka Maija sekä kalastaa että marjastaa Mattia paremmin, pysyy yhteistyö silti kannattavana.

Otettakoon nyt yhteistalouden käyrältä piste $(M,K) = (5,2)$ (voit valita myös minkä tahansa muun pisteen väliltä $M \in]0,7[$). Jos tuo marja- ja kalasaalis jaettaisiin tasan, kumpikin saisi $\frac{5}{2}$ litraa marjoja ja kilon kalaa.

Verrataanpa nyt yksinäistalouksiin. Maija – jos haluaisi kaksi ja puoli litraa marjoja – saisi yksinään

$$-\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{2} + 3 = \frac{3}{2}$$

kiloa kalaa, joten Maijan kannalta yhdessä tuottaminen näyttäisi taas tappiolliselta. Mutta koska Matti ei yksinään saisi kahta ja puolta marjalitraa mitenkään – saati kalaa sen lisäksi – on Matin ”voitto” yhteistaloudessa kokonainen kilo kalaa. Matin voitto = 1 kilo > Maijan häviö = $\frac{1}{2}$ kiloa.

Johtopäätös pysyy samana kuin kahden ensimmäisenkin esimerkkimme kohdalla. Kokeile itse: kompensoi Maijalle tämän häviämä puoli kiloa kalaa, ja katso, paljonko Matille jää. Jaa vielä kahdelle tuo hyvityksen jälkeinen ”ylijäämä” – etkö päädykin siihen, että kumpikin saisi enemmän kuin yksinään?

Vaikka toinen osapuoli olisi kaikessa absoluuttisesti parempi, ei siitä seuraa, että absoluuttisesti paremman kannattaisi tehdä kaikki yksin.

Suhteellisen edun teorian mukaan kaikkea ei voida eikä pidä tuottaa Kaukoidässä, vaikka siellä osattaisiin tehdä joka ikinen asia halvemmalla, tehokkaammin tai paremmin kuin meillä.

Näin siksi, että absoluuttinen etu ja suhteellinen etu ovat eri asioita. Suhteellinen etu perustuu vaihtoehtoiskustannusten eroavuuteen, joten osapuolella, jolla ei ole absoluuttista etua missään, voi silti olla suhteellinen etu jossakin.

Kokeilepa, onko johtopäätöksesi sama, jos aivan mielivaltaisesti vaihtelet Matin ja Maijan tuotantolukuja. Tai käytät esimerkin tuotantolukuja, mutta valitset yksinäis- ja yhteistuotannon vertailemiseksi jotkin muut pisteet kuin yllä käytetyt. – Luultavasti päädyt samaan lopputulokseen. Ja jos niin ei käy, otathan yhteyttä. Ihmetellään sitä sitten yhdessä.

Vielä mallista – ja tosielämästäkin

Käyttämämme kaksiulotteinen malli on kovin pelkistetty, onhan oikeassa maailmassa kuusi miljardia ihmistä lukemattomine hyödykkeineen – ja haitakkeineen. Mallia voi laajentaa moniulotteiseksi, mutta analyysi on teknisesti hankalampaa, eikä perustulos muutu. Ja mehän nimenomaan pyrimme – kuten aina mallitettaessa – mahdollisimman yleispätevään tulokseen niin yksinkertaisin välinein kuin mahdollista.

Olemme näyttäneet, että suhteellisen edun periaattein toimien kaikilla olisi ainakin periaatteessa mahdollisuus ”voittaa”. Mutta mitä tuo voitto on – kysyt ehkä, voidaanko tätä teoriaa soveltaa maailmassa, jossa tuottaminen ja kuljettaminen aiheuttaa mittavia ympäristötuhoja?

Vastaus on, että suhteellinen etu ilmenee ja sitä voidaan käyttää silloinkin, kun todellisuuden ikäviä puolia – kuten saastumisen aiheuttamia vahinkoja ja kustannuksia – otetaan huomioon. Esimerkiksi ympäristöverot eivät sinänsä estä suhteellisen edun esiintymisen mahdollisuutta. Mutta se, millä maalla on suhteellinen etu jonkin tavaran tai palvelun tekemisessä, voisi kyllä muuttua.

Suhteellinen etu voi muuttua myös siksi, että jossakin maassa vaikkapa koulutuksen ansiosta opitaan ajan myötä tekemään jotain tuotetta suhteellisesti tehokkaammin kuin muualla. Suhteellinen etu ei reaalimaailmassa ole staattinen, vaan dynaaminen (ajassa muuttuva) käsite.

Kaikki kauppa maailmassa ei tapahdu suhteellisen edun mukaisesti. Syynä saattaa olla tullikäytäntöjen erot maitten välillä tai muu sellainen seikka. Siksi kansainvälistä kauppaa selitettäessä ja ennakoitaessa tarvitaan muitakin teorioita kuin yllä esittämämme.

Ehkä joku lukijoistamme joskus tulee yliopiston kansantaloustieteen laitokselle kuulemaan ja kysymään lisää?

Harjoitustehtävä

Oletetaan, että Maija ja Matti pystyvät maksimissaan tuottamaan oheisen taulukon mukaisesti marjoja tai kalaa, tai jotakin niiden yhdistelmää samoin periaattein kuin esimerkeissämme.

	max M	max K
Maija yksin	10	5
Matti yksin	8	4
Yhdessä (yhteistalous)	18	9

Tutki Maijan ja Matin yksinäis- ja yhteistalouksien kuvaajia joko graafisesti tai laskemalla. Hyötyisivätkö Maija ja Matti suhteellisen edun periaatteen mukaisesta yhteistuotannosta/taloudesta?

Oikea vastaus: Eivät hyötyisi. Suhteellisen edun periaatteen mukaisen työnjaon hyöty perustuu vaihtoehtoiskustannusten eroavuuteen.

Tässä
$$\left|\frac{K}{M}\right| = \left|\frac{5}{10}\right| = \left|\frac{4}{8}\right| = \left|\frac{1}{2}\right|.$$
Siis sekä Matti että Maija joutuvat luopumaan puolesta kalakilosta yhden lisämarjalitran saamiseksi. Yhtä hyvin voit laskea:
$$\left|\frac{M}{K}\right| = \left|\frac{10}{5}\right| = \left|\frac{8}{4}\right| = \left|\frac{2}{1}\right|.$$
Sekä Maija että Matti joutuvat luopumaan kahdesta marjalitrasta yhden kalakilon saamiseksi. Vaihtoehtoiskustannus on sama Matilla ja Maijalla. Tarjolla ei ole suhteellisen edun tuomaa hyötyä tässä tapauksessa.

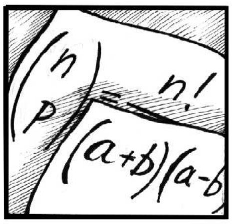
Lähteet

D. Begg – S. Fischer – R. Dornbusch: Economics, 2005

P. Sorensen – H.J. Whitta-Jacobsen: Introducing Advanced Macroeconomics, 2005

A.C. Chiang: Fundamental Methods of Mathematical Economics, 1984

Mai Allon omat luennot Helsingin yliopistossa ja avoimessa yliopistossa



Sturmin lause

Antti Rasila
Matematiikan laitos, Teknillinen korkeakoulu

Sturmin ongelma

Aina joskus matematiikassa törmää ongelmaan, joka näyttää vaikealta, mutta kuitenkin ratkeaa suhteellisen yksinkertaisella päättelyllä. Tässä esitettävä Sturmin lause on tällainen tulos. Se liittyy läheisesti Algebran peruslauseeseen ja Descartesin merkinvaihtosääntöön.

Tulos kuuluu ranskalaiselle matemaatikolle Jacques Sturmille (1803-1855), joskin Joseph Fourier oli tiettävästi ratkaissut ongelman jo aiemmin. Fourierin paperi kuitenkin ilmeisesti katosi ja unohdettiin Ranskan vallankumouksen melskeissä. Tuloksen mielenkiintoisuudesta huolimatta se ei ole käsitykseni mukaan kovin laajasti tunnettu edes matemaatikkojen keskuudessa. Syynä tähän lienee se, että ratkaisun löytymisen jälkeen matemaatikot menettivät kiinnostuksensa ongelmaan, eikä ratkaisulla pitkään aikaan ollut erityistä teoreettista tai käytännöllistä merkitystä. Tietokoneiden myötä tilanne on muuttunut, itse törmäsin tulokseen ensimmäisen kerran symbolisen laskennan kurssilla.

Ongelma: Etsittävä reaalikertoimisen polynomiyhtälön

$$P(x) = 0$$

reaalisten ratkaisujen lukumäärä välillä (α, β), missä $\alpha < \beta$.

Sturmin ongelman ratkaisu

Seuraavaksi paneudutaan Sturmin ongelmaan vuonna 1829 esittämään yksinkertaiseen ja eleganttiin ratkaisuun. Tarkastellaan kahta erillistä tapausta:

1. Kaikki annetun yhtälön reaaliset juuret ovat yksinkertaisia välillä (α, β).
2. Annetulla yhtälöllä on kyseisellä välillä myös moninkertaisia juuria.

Tarkastellaan aluksi tapauksista jälkimmäistä. Oletetaan siis, että yhtälöllä $P(x) = 0$ on erilliset juuret $r_1, r_2, r_3, \ldots$, ja merkitään juuren r_j kertalukua k_j, kun $j = 1, 2, \ldots$. Voidaan kirjoittaa

$$P(x) = a(x - r_1)^{k_1}(x - r_2)^{k_2}(x - r_3)^{k_3} \ldots$$

Polynomin $P(x)$ derivaatalle $P'(x)$ saadaan esitys

$$\begin{aligned}\frac{P'(x)}{P(x)} &= \frac{k_1}{x - r_1} + \frac{k_2}{x - r_2} + \frac{k_3}{x - r_3} + \ldots \\ &= \frac{k_1(x - r_2)(x - r_3) \ldots + k_2(x - r_1)(x - r_3) \ldots + \ldots}{(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \ldots} \\ &\equiv \frac{p(x)}{q(x)}.\end{aligned}$$

Merkitään lisäksi $G(x) \equiv P(x)/q(x)$. Saadaan yhtälöt $P(x) = G(x)q(x)$ ja $P'(x) = G(x)p(x)$.

Voidaan olettaa, että lausekkeilla $p(x)$ ja $q(x)$ ei ole yhteisiä tekijöitä, joten $G(x)$ on $P(x)$:än ja $P'(x)$:än suurin yhteinen tekijä. Siten yhtälö $P(x) = 0$ on hajotettu tapauksiin $q(x) = 0$ ja $G(x) = 0$. Näistä ensimmäisellä on vain yksinkertaisia juuria, ja jälkimmäiseen voidaan iteratiivisesti soveltaa samaa menettelyä.

Seuraus: Riittää ratkaista ongelma ensimmäisessä tapauksessa.

Tarkastellaan seuraavaksi tapauksista ensimmäistä. Oletetaan siis, että yhtälön $P(x) = 0$ kaikki juuret ovat yksinkertaisia. Tällöin derivaatta $P'(x)$ ei saa arvoa nolla yhdessäkään näistä juurista. Lisäksi $P(x)$:n ja $P'(x)$:än suurin yhteinen tekijä on nollasta poikkeava vakio C.

Merkitään $f_0(x) \equiv P(x)$, $f_1(x) \equiv P'(x)$. Määritellään rekursiivisesti $f_j(x)$ ja $q_j(x)$ seuraavan skeeman mukaisesti:

$$\begin{aligned}
&(0) \qquad f_0 = q_0 f_1 - f_2 \\
&(1) \qquad f_1 = q_1 f_2 - f_3 \\
&(2) \qquad f_2 = q_2 f_3 - f_4 \\
&\qquad\qquad \ldots
\end{aligned}$$

Toisin sanoen, kukin q_j on peräkkäisissä jakolaskuissa osamäärä ja $-f_{j+2}$ vastaavasti jakojäännös.

Lopulta skeemassa esiintyy nollasta poikkeava vakio C, jolla erityisesti on sama merkki koko välillä (α, β). Merkitään $f_s \equiv C$. Tällöin sanotaan, että konstruoidut *Sturmin funktiot*

$$\bar{f} = f_0, f_1, f_2, \ldots, f_s$$

muodostavat *Sturmin ketjun.*

Aputulos. Sturmin funktioilla on seuraavat ominaisuudet:

1. Kaksi peräkkäistä Sturmin funktiota eivät katoa samanaikaisesti yhdessäkään välin (α, β) pisteessä.

2. Kunkin Sturmin funktion f_j nollakohdassa viereiset funktiot f_{j-1}, f_{j+1} ovat erimerkkisiä.

3. Funktion f_0 nollakohdan riittävän pienen ympäristön sisällä funktio f_1 on joko aidosti positiivinen tai aidosti negatiivinen.

Todistus. (1) Jos esimerkiksi $f_2(\sigma) = 0$ ja $f_3(\sigma) = 0$ jossakin välin (α, β) pisteessä σ, niin tällöin

$$f_4(\sigma) = q_2(\sigma) f_3(\sigma) - f_2(\sigma) = 0,$$

eli σ on myös funktion f_4 nollakohta. Siten myös $f_5(\sigma) = 0$, jne. ja edelleen $f_s(\sigma) = 0$. Tämä on ristiriita, koska f_s on vakio $C \neq 0$.

(2) Jos funktiolla f_3 on nollakohta σ, niin määritelmän nojalla

$$f_2(\sigma) = -f_4(\sigma),$$

jne.

(3) Seuraa siitä, että f_1 on jatkuva funktio, eikä f_0:n nollakohta ole f_1:n nollakohta. □

Olkoon nyt $x \in (\alpha, \beta)$. Sturmin funktioiden f_j pisteessä x saavuttamien arvojen $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_s(x)$ etumerkit muodostavat *Sturmin merkkiketjun.*

Merkitään $\mathrm{Var}_{\bar{f}}(x)$ Sturmin ketjussa $\bar{f}$ tapahtuvien etumerkin vaihtojen ($+-$ tai $-+$) lukumäärä pisteessä x. Määritellään edelleen polynomijonon etumerkin vaihtojen erotus

$$\mathrm{Var}_{\bar{f}}[\alpha, \beta] \equiv \mathrm{Var}_{\bar{f}}(\alpha) - \mathrm{Var}_{\bar{f}}(\beta).$$

Tutkitaan funktion $\mathrm{Var}\bar{f}(x)$ arvon muuttumista, kun x on välillä (α, β). Havaitaan, että funktion arvo voi muuttua pisteessä x vain, jos yksi tai useampi Sturmin funktio vaihtaa etumerkkiään kyseisessä pisteessä.

Olkoon $\sigma \in (\alpha, \beta)$ Sturmin funktion f_v nollakohta. Valitaan $\delta > 0$ siten, että välillä $\Delta = (\sigma - \delta, \sigma + \delta)$ seuraavat ehdot ovat voimassa:

1. Funktio $f_v(x) \neq 0$, kun $x \in \Delta$ ja $x \neq \sigma$.

2. Funktion f_v:n viereiset funktiot (f_{v-1}, f_{v+1}) eivät vaihda merkkiään välillä Δ.

Tutkitaan erikseen tapauksia $v > 0$ ja $v = 0$. Ensimmäisessä tapauksessa tarkastellaan kolmikkoa f_{v-1}, f_v, f_{v+1}, toisessa paria f_0, f_1.

Kolmikon tapauksessa havaitaan, että f_{v-1},f_{v+1} ovat erimerkkiset (Aputulos/kohta 2.), joten riippumatta f_v:n etumerkistä välillä Δ on aina täsmälleen yksi merkinvaihto. Täten f_v:n nollakohdan ohittaminen ei muuta $\mathrm{Var}_{\bar{f}}(x)$:n arvoa.

Parin tapauksessa havaitaan, että f_1:llä on tarkasteluvälillä vakio etumerkki $+$ tai $-$. Ensimmäisessä tapauksessa f_0 on kasvava ja $f_0(\sigma - \delta) < 0$, $f_0(\sigma + \delta) > 0$. Toisessa tapauksessa f_0 vähenevä ja etumerkit muuttuvat päinvastaisesti. Molemmissa tapauksissa nollakohdan σ jälkeen funtioilla f_0, f_1 on sama etumerkki.

Havaitaan, että funktion $\mathrm{Var}_{\bar{f}}(x)$ arvossa tapahtuu muutos täsmälleen silloin, kun ohitetaan funktion f_0 nollakohta. Edelleen, funktion f_0 nollakohdassa $\mathrm{Var}_{\bar{f}}(x)$:n arvo vähenee yhdellä.

Olemme siis osoittaneet seuraavan tuloksen:

Lause. (Sturmin lause) Olkoot $P(x)$ reaalikertoiminen polynomi ja $\alpha < \beta$ pisteitä, jotka eivät ole $P(x)$:an nollakohtia. Tällöin funktio $\mathrm{Var}_{\bar{f}}[\alpha, \beta]$, missä $\bar{f}$ on $P(x)$:än Sturmin ketju, antaa $P(x)$:än nollakohtien määrän välillä (α, β).

Sovelluksia

Esimerkki 1. Määritä yhtälön $x^5 + 3x - 1 = 0$ ratkaisujen lukumäärä ja sijainti.

Ratkaisu. Sturmin ketjuksi saadaan

$$\begin{aligned} f_0 &= x^5 - 3x - 1, \\ f_1 &= 5x^4 - 3, \\ f_2 &= 12x + 5, \\ f_3 &= 1. \end{aligned}$$

Polynomin $\bar{f}$ etumerkit vastaten muuttujan x arvoja $x = -2, -1, 0, +1, +2$ ovat:

x	f_0	f_1	f_2	f_3
-2	$-$	$+$	$-$	$+$
-1	$+$	$+$	$-$	$+$
0	$-$	$-$	$+$	$+$
$+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$+2$	$+$	$+$	$+$	$+$

Täten yhtälöllä on kolme reaaliratkaisua, yksi välillä $(-2, -1)$, toinen välillä $(-1, 0)$ ja kolmas välillä $(+1, +2)$. Loput ratkaisut ovat kompleksisia. $\square$

Esimerkki 2. Määritä yhtälön $x^5 - ax - b = 0$ reaalisten juurten lukumäärä, kun a ja b ovat positiivisia ja $4^4a^5 > 5^5b^4$.

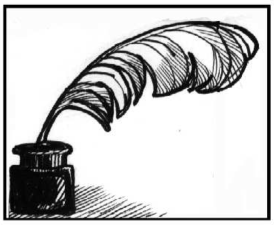
Ratkaisu. Sturmin ketjuksi saadaan

$$\begin{aligned} f_0 &= x^5 - ax - b, \\ f_1 &= 5x^4 - a, \\ f_2 &= 4ax + 5b, \\ f_3 &= 4^4a^5 - 5^5b^4. \end{aligned}$$

Kun $x \to -\infty$, saadaan raja-arvona ketjun etumerkeiksi $-+-+$. Vastaavasti, kun $x \to +\infty$, saadaan etumerkit $++++$. Siten yhtälöllä on kolme reaalista ja kaksi kompleksista ratkaisua. $\square$

Solmun keskustelupalsta

Solmun keskustelupalsta on osoitteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/cgi-bin/yabb2/YaBB.pl`



Emmy Noether mursi sukupuolirajan

Matti Lehtinen ja Vadim Kulikov
Helsingin yliopisto

Matematiikka leimautuu miespuoliseksi alaksi, halutaan tai ei. Suomessa on noin 70 virassa toimivaa matematiikan professoria, ja heidän sukupuolijakaumansa on aika epätasainen: naispuolisia on tulkintatavasta riippuen yksi tai kaksi. Kansainvälisten matematiikkaolympialaisten yli viidestäsadasta kilpailijasta on vuosittain säännönmukaisesti tyttöjä vain noin 40. Emme ota kantaa siihen, miksi näin on. Mutta sen, että yksi tekijä kaiken takana on historian painolasti, voi lukea myös monien mielestä kaikkien aikojen merkittävimmän naispuolisen matemaatikon, *Emmy Noetherin* elämäntarinasta.

Amalie Emmy Noether syntyi 23.3.1882 Erlangenissa, Nürnbergin lähellä olevassa baijerilaisessa yliopistokaupungissa. Emmyn lähtökohta matemaatikon uralle oli sinänsä paras mahdollinen. Hänen isänsä *Max Noether* (1844–1921) oli etevä ja kuuluisa matemaatikko, algebrallisen geometrian uranuurtajia ja matematiikan professori Erlangenin yliopistossa – yliopistossa, jonka matematiikka muistaa ennen muuta siellä jo ennen Emmy Noetherin syntymää jonkin aikaa vaikuttaneen matematiikan voimamiehen *Felix Kleinin* (1849–1925) *Erlangenin ohjelmasta*, virkaanastujaisesitelmässä osoitetusta geometrian ja tuolloin voimakkaasti kehittymässä olleen ryhmäteorian yhteydestä. Emmy oli Max Noetherin neljästä lapsesta vanhin. Hänen nuorempi veljensä *Fritz Noether* (1884–1941) oli myös matemaatikko, Fritzin poika *Gottfried Noether* (1915–1991) puolestaan merkittävä tilastotieteilijä. Sekä Emmyn että Fritzin elämään tuli aikanaan merkittävästi vaikuttamaan se, että Noetherin perhe oli juutalainen.

Emmy kävi koulunsa Erlangenin *Höhere Töchter Schule* ("Korkeampi tytärkoulu") -nimisessä tyttökoulussa. Koulun opetusohjelma painottui nykykieliin, ja laskentoakin toki oli mukana. Emmy otti myös pianotunteja, muttei juuri edistynyt. Myöskään kotitalous ei ollut hänen alaansa. Tanssi Emmyä viehätti – seuraelämään kuuluivat yliopiston professoreiden kodeissaan järjestämät tanssiaiset, ja niistä Emmy piti. Koulun päätyttyä, 18-vuotiaana, Emmy otti aika luonnollisen odotettavissa olevaan elämäntyöhön johtavan askeleen. Hän sai valtiollisessa tutkinnossa pätevyyden opettaa ranskaa ja englantia tyttöoppilaitoksissa. Tähän ei yliopisto-opintoja tarvittu. Emmy Noetherin arvosanat olivat parhaat mahdolliset, paitsi käytännön opetustaidossa.

Emmy ei kuitenkaan hakeutunut kieliä opettamaan, vaan päätti jatkaa opintojaan Erlangenin yliopistossa. Päätös oli rohkea. Erlangenin yliopiston asiakirjoista käy ilmi, että talvilukukautena 1900–01 yliopistossa oli kirjoilla 984 miespuolista ja kaksi naispuolista opiskelijaa, toinen näistä Emmy Noether. Itse asiassa Noether ei voinut sukupuolensa vuoksi kirjoittautua varsinaiseksi opiskelijaksi, vaan vain ”kuuntelijaksi”. Emmy Noether opiskelikin samanaikaisesti *Reifeprüfungia* eli ylioppilastutkintoa varten, jonka suoritettuaan hän siirtyi maineikkaaseen Göttingenin yliopistoon, edelleen kuuntelijaksi. Göttingenissä Emmy seurasi mm. Felix Kleinin ja Kleiniakin kuuluisamman *David Hilbertin* (1862–1943) luentoja.

Ajat olivat muuttumassa. Vuonna 1904 Saksassa tuli voimaan uusi laki, jonka mukaan naisetkin saattoivat opiskella yliopistossa oikeina opiskelijoina. Emmy palasi kotikaupunkinsa Erlangenin yliopistoon ja ilmoitti oppiaineeksensa matematiikan. Erlangenin yliopiston matematiikan professorit olivat Emmyn isä Max ja *Paul Gordan* (1837–1912). Gordan oli merkittävä tutkija, johtohahmo 1800-luvun lopulla muodikkaalla invarianttiteorian alalla. Invariantit ovat esimerkiksi tietynlaisten polynomien kertoimien lausekkeita, jotka eivät muutu, kun polynomin muuttujille tehdään tiettyjä muunnoksia. Esimerkiksi toisen asteen polynomin $ax^2 + 2bxy + cy^2$ eräs invariantti tason kiertoa vastaavien muuttujanvaihtojen suhteen on diskriminantti $b^2 - ac$. Emmy Noetheristä tuli Paul Gordanin tohtorioppilas. Väitöskirja, joka käsitteli kolmen muuttujan neljännen asteen polynomin invariantteja, valmistui 1907. Gordanin ja siten hänen oppilaansakin lähestymistapa oli periaatteessa ankara muodollinen laskeminen. Noetherin väitöskirjan liitteenä on luettelo yli 300 löytyneestä invariantista.

Emmy Noether oli nyt matemaatikko. Hän saattoi liittyä matemaattisiin yhdistyksiin ja osallistua niiden kokouksiin. Noether liittyi ensimmäiseksi italialaiseen *Circolo matematico di Palermoon* ja vuonna 1909 Saksan matemaatikkoyhdistykseen *Deutsche Mathematiker-Vereinigungiin*. Jo vuonna 1909 Noether piti ensimmäisen esitelmänsä DMV:n kokouksessa. Myöhemmin, vuosina 1913–1929 näitä esitelmiä kertyi kahdeksan lisää.

Gordan eläköityi vuonna 1910. Häntä seurasi *Ernst Fischer* (1875–1954). Fischerin ja Noetherin matemaattinen ajatustenvaihto oli vilkasta ja jatkui senkin jälkeen, kun he suuntautuivat eri yliopistoihin. Fischer oli hänkin osallistunut invarianttiteorian tutkimukseen, mutta hän oli sisäistänyt Hilbertin siihen tuoman uuden, Gordanin suosimia muodollisia laskuja abstraktimman ajatusmaailman ja johdatti Noetherinkin tälle tielle. Mitään muodollista tehtävää tai virkaa Noetherillä ei ollut. Hän auttoi kuitenkin iäkästä ja sairasta isäänsä tämän virkatehtävien hoidossa.

Vuonna 1915 Einsteinin yleinen suhteellisuusteoria oli muotoutumassa. Hilbert ja Klein kävivät vilkasta kirjeenvaihtoa tuolloin Berliinissä vaikuttaneen Einsteinin kanssa suhteellisuusteorian matematiikasta, joka myös monella tapaa sivusi invarianttiteoriaa. Luultavasti tähän liittyen Hilbert ja Klein kutsuivat Emmy Noetherin Göttingeniin, tuon ajan merkittävimpään matemaattiseen keskukseen, pari sataa kilometriä Erlangenista pohjoiseen. Tarkoitus oli, että Noether suorittaisi *habilitaation*, joka oikeuttaisi hänet yliopiston dosentiksi. (Saksassa tohtori, joka pyrki yliopiston opettajaksi, joutui kirjoittamaan toisen väitöskirjan, *habilitaatiokirjoituksen*, ja puolustamaan sitä.) Noetherin sukupuoli nousi kuitenkin taas esteeksi. Habilitaation hyväksymisestä päätti koko filosofisen tiedekunnan professoreista koostuva neuvosto, ja siellä syntyi vastarintaa. ”Jos myönnämme naiselle dosentin arvon, hänestä voi tulla professorikin ja sitä myöten jopa yliopiston senaatin jäsen. Ei kai senaatissa voi naisia olla?” Hilbert kehotti professoreita muistamaan, että senaatti ei ole kylpylaitos, mutta tämä ei auttanut. Noether jäi ilman dosentuuria.

Neuvokas Hilbert ei kuitenkaan lannistunut. Emmy Noether sai pitää luentojaan, mutta niiden pitäjäksi ilmoitettiin virallisesti professori Hilbert, ”neiti tohtori Noetherin avustamana”. Ensimmäisen maailmansodan päätyttyä, 1919, Noetherille viimein sallittiin habilitaatio, ja hän saattoi ryhtyä luennoimaan omissa nimissään. Palkkaa hänelle ei maksettu: saksalaisessa yliopistojärjestelmässä *Privatdosentin* oikeus oli luennoida ja saada ottaa palkkionsa suoraan opiskelijoilta. Vuonna 1922 Noetherin akateeminen status kohosi jälleen. Hänestä tuli *nicht beamteter ausserordentlicher Professor*, palkaton ylimääräinen professori.

Noetherin elämässä ei pääosaa näytellyt raha vaan matematiikka. Hänen kehittymisensä suureksi matemaatikoksi ei ollut salamannopeaa. Vasta Göttingenissä 1920-luvun alussa hän alkoi olla omimmalla alallaan, puhtaassa abstraktissa algebrassa ja sen aksiomaattisissa rakenteissa. Erityisen merkittävä hänen panoksensa on ns. ideaalien teoriassa; ideaalit ovat tietyssä mielessä lukujen yleistyksiä. Ideaaliteorian alkuunpanijoita oli esittämästään reaalilukujen määritelmästä tunnetuin saksalainen matemaatikko *Richard Dedekind* (1831–1916), ja merkittävän Emmy Noetheria edeltäneen panoksen sille oli antanut saksalainen *Emanuel Lasker* (1868–1941), mies, joka parhaiten tunnetaan siitä, että hän piti hallussaan šakin maailmanmestaruutta

27 vuotta, 1894–1921.

Noetherin metodit ja tulokset, joihin tässä emme voi käydä lähemmin, olivat ehdottoman abstrakteja, aivan erilaisia kuin hänen nuoruudentyönsä invarianttien parissa. Noetherin ympärille Göttingeniin syntyi elinvoimainen algebrallinen koulukunta, jonka yksi merkittävä edustaja, hollantilainen *Bertel van der Waerden* (1903–1996) kirjoitti vuonna 1930 abstraktin algebran kannalta keskeisen oppikirjan *Moderne Algebra*. Kirja ilmestyi lukuisina painoksina ja vuonna 1955 se oli muodostunut jo niin klassikoksi, että nimeksi jäi pelkkä *Algebra*. Van der Waerden tunnustaa jo kirjansa nimisivulla velkansa Emmy Noetherille: vielä seitsemännessäkin painoksessa (jonka toinen tämän kirjoittajista omistaa), tekijän nimen alla lukee *Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Noether* (E. Noetherin luentoja hyväksi käyttäen). Noetherin perintö ja henki elävät yhä niin algebrassa kuin muillakin abstraktin matematiikan alueilla.

Vuosi 1932 oli Emmy Noetherille hyvä. Hän täytti 50 vuotta ja sai ainoan taloudellistakin arvoa sisältäneen julkisen tunnustuksen työstään, *Albert Ackermannin muistopalkinnon matemaattisten tieteiden hyväksi tehdystä työstä*, palkinnon arvo oli nykyrahassa pari sataa euroa. Samana vuonna Noetherillä oli kunnia pitää yksi Kansainvälisen Matemaatikkokonferenssin pääesitelmistä Zürichissä. Mutta ajat olivat jälleen muuttumassa, eikä muutos nyt ollut Noetherille eduksi.

Saksan poliittisen historian tapahtumat mullistivat myös matematiikan aseman Saksassa. Kansallissosialistien valtaannousua seurasi nopeasti yliopistojen puhdistus juutalaistaustaisista opettajista. Ehkä tuhoisimmin tämän päätöksen seuraukset koki Göttingen. Emmy Noether sai 2. huhtikuuta 1933 kiellon opettaa yliopistossa. Sama kohtalo koski suurta osaa Göttingenin matemaatikoista. Noether yritti ensin jatkaa seminaarejaan asunnossaan, mutta hyväksyi pian tosiasiat, joiden valossa Saksasta poistuminen oli järkevintä.

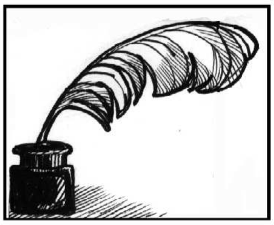
Saksasta ja Saksan vaikutuksen alle jäävistä maista joutui 1930-luvulla poistumaan suuri määrä rodullisista tai poliittisista syistä epäkelvoiksi tulleita ja hengenvaaraan joutuneita tiedemiehiä ja -naisia. Useimpien määränpääksi muodostui Yhdysvallat. Vaikka amerikkalaiset pyrkivät ottamaan tulijat vastaan, ei sopivia ja tulijoiden kykyjä vastaavia paikkoja tietenkään voinut olla tarpeeksi. Emmy Noetherille järjestyi opettajan paikka *Bryn Mawr Collegesta* Pennsylvaniasta, läheltä Philadelphiaa. Bryn Mawr College on naisopiskelijoille tarkoitettu tasokas oppilaitos, mutta ei tietenkään paikka, joka olisi voinut täysipainoisesti hyödyntää maailman johtavan algebran tutkijan panosta tai tarjota hänelle oikeantasoisia oppilaita. Bryn Mawr oli onneksi melko lähellä Princetonia, jonne oli muodostumassa merkittävä tieteellinen keskus, Princetonin yliopiston ja vuonna 1930 perustetun yksityisen *Institute for Advanced Study* -tutkimuslaitoksen ansiosta. Viime mainitun laitoksen henkilökuntaan kuuluivat mm. tieteen suurmiehet *Albert Einstein*, *John von Neumann* ja *Kurt Gödel*, monen muun ohella. Emmy Noether luennoi Bryn Mawrin ohella Princetonissa ja saattoi siellä tavata tasoisiaan matemaatikkoja.

Emmy Noetherin Amerikan-kausi jäi lyhyeksi. Huhtikuussa 1935 Noether hakeutui lääkärinhoitoon lantiokipujen vuoksi. Hänelle tehtiin leikkaus, joka näytti, että vaivat eivät johtuneet pahanlaatuisesta kasvaimesta. Leikkaus aiheutti kuitenkin komplikaation, joka johti nopeasti kuolemaan 15. huhtikuuta 1935.

Emmy Noetherin veli Fritz joutui tietysti myös erotetuksi professuuristaan. Hän löysi uuden työpaikan Neuvostoliitosta, Tomskista. Fritz Noetherin kohtaloksi koituivat Stalinin vainot; hänet ammuttiin epäiltynä vakoilusta Hitlerin Saksan hyväksi. Noetherit eivät olleet poliittisesti aktiivisia, mutta kuitenkin vasemmistosuuntautuneita. Emmy Noether oli jopa vieraillut lukuvuonna 1929–30 Moskovan yliopistossa.

Emmy Noether julkaisi 43 tieteellistä artikkelia ja ohjasi noin 15 tohtorinväitöskirjaa. Hän oli yksi arvostetun *Mathematische Annalen* -aikakauskirjan merkittävimpiä toimittajia. Opettajana häntä ei aina kiitetty. Hänen luentonsa saattoivat olla tilanteita, joissa uudet matemaattiset ideat pyrkivät esiin, eivätkä ne silloin olleet pedagogisesti kiillotetussa muodossa.

Kuuluisa matemaatikko *Hermann Weyl* (1885–1955), joka mm. oli Göttingenin matematiikan laitoksen johdossa myrskyisenä kesänä 1933, kuvaa kauniisti Emmy Noetherin ulkoista olemusta ("ei voida sanoa, että Sulottaret olisivat seisseet hänen kehtonsa äärellä") ja luonnetta ("avoin ja suorapuheinen, muttei milloinkaan hyökkäävä; elämässään vaatimaton ja äärimmäisen epäitsekäs... huumorintajuinen ja seurallinen... valtavat matemaattiset kyvyt aiheuttivat jonkinlaisen elämän epätasapainon..."). Göttingenissä Noetheriin joskus leikillisesti viitattiin sanoilla "Der Noether". Tämän maskuliinisen ilmauksen keksijän sanotaan olleen merkittävä venäläinen topologi *Pavel Alexandroff* (1896–1982), Noetherin hyvä ystävä, ja Weyl viittaa sillä Noetherin mahtaviin hengenvoimiin, joilla tämä mursi sukupuolesta johtuneet rajoitteet.



Yhtälö, jota ei voinut ratkaista

Ari Koistinen
Metropolia Ammattikorkeakoulu

Mario Livio: Yhtälö jota ei voinut ratkaista. Suomentanut Kimmo Pietiläinen. Terra Cognita 2008. 376 sivua. Ohjehinta 40 e.

Katsoessamme ympärillemme näemme monenlaisia symmetrioita. Ihmiset ja eläimet ovat edestäpäin katsottuna symmetrisia tai ainakin likimain symmetrisia keskilinjansa suhteen. Myös hyvin monet ihmisen valmistamat kohteet, kuten useimmat rakennukset, autot, astiat ja huonekalut, voitaisiin jakaa kahteen osaan, jotka ovat toistensa peilikuvia (tosin autot vain ulkopuolelta tarkasteltuina). Tällaista symmetriaa kutsutaan *heijastussymmetriaksi*.

Symmetrian lajeja on muitakin: symmetrisyys *kierron* suhteen tarkoittaa sitä, että kuvio näyttää samalta, jos sitä kierretään tietyn kulman verran. Esimerkiksi ympyrä on symmetrinen minkä hyvänsä suuruisen kierron suhteen mutta neliö vain sellaisen kierron suhteen, jonka suuruus on 90, 180 tai 270 astetta - tai mikä hyvänsä muu 90 asteen suuruisen kierron monikerta. *Siirtosymmetriasta* on kyse silloin, kun hahmo näyttää samalta tiettyyn suuntaan tehdyn tietyn mittaisen siirron jälkeen. Esimerkiksi toistuvat ornamenttikuviot ovat siirtosymmetrisia.

Symmetriat eivät rajoitu vain visuaalisesti havaittaviin muotoihin, vaan niitä voidaan löytää esimerkiksi musiikista, monilta matematiikan osa-alueilta, luonnonlaeista, kielitieteestä, evoluutiobiologiasta ja jopa antropologiasta. Kehitettäessä maailmankaikkeuden rakennetta kuvaavaa mahdollisimman yleispätevää teoriaa, ”kaiken teoriaa”, symmetriat ovat keskeisessä roolissa.

Mario Livion kirjoittama ja Kimmo Pietiläisen suomentama kirja *Yhtälö, jota ei voinut ratkaista* kuvaa erilaisissa yhteyksissä esiintyviä symmetrioita sekä symmetrioihin läheisesti liittyvää matematiikan osa-aluetta, ryhmäteoriaa. Kirjan nimen alaotsikko kuuluukin ”Miten matematiikka paljasti symmetrian kielen”. Kirjan varsinainen nimi taas viittaa viidennen asteen yhtälöön - yrityksiin löytää sille samantapainen ratkaisukaava kuin aiemmin oli löydetty toisen, kolmannen ja neljännen asteen yhtälöille, ja viimein norjalaisen Niels Henrik Abelin todistukseen tulokseen, jonka mukaan tällaista kaavaa ei ole olemassa (jos kaavaan sallitaan vain neljä peruslaskutoimitusta ja juuren otto, eikä myöhemmin kehiteltyjä ns. erikoisfunktioita).

Livio kertoo mielenkiintoisella tavalla Abelin sekä toisen samantyyppisiä asioita tutkineen ja Abelin tavoin nuorena kuolleen matemaatikon, ranskalaisen Evariste Galois'n elämästä ja työstä. Galois'n merkittävin saavutus oli kokonaan uuden matematiikan alan, ryhmäteorian, luominen. Hän tarvitsi uutta teoriaa algebrallisten yhtälöiden ratkeavuutta koskevien väittämien todistamiseen, mutta ryhmäteorialla on myöhemmin ollut valtavasti käyttöä muun muassa kemiassa ja teoreettisessa fysiikassa.

Kirja on hyvin monipuolinen. Se kertoo matematiikan historiasta, matemaatikkojen elämästä, symmetrioista erilaisissa yhteyksissä sekä ryhmäteoriasta ja sen sovelluksista, paikoin hyvin polveilevaan tyyliin ja päätyen usein erilaisille sivupoluille. Monipuolisuus on kirjan vahvuus mutta myös osittain sen heikkous. Kokonaisvaikutelma jää hieman jäsentymättömäksi eivätkä yhteydet viidennen asteen yhtälön ratkeavuuden, symmetrian ja ryhmäteorian välillä ehkä sittenkään tule esille niin selkeästi kuin ne voisivat tulla – eivätkä kuten kirjan nimi ja alaotsikko antaisivat odottaa. Matematiikkaa popularisoivassa kirjassa joudutaan tosin aina tekemään kompromissi yleistajuisuuden sekä yksityiskohtaisuuden ja matemaattisen tarkkuuden välillä.

Yhtälö jota ei voinut ratkaista todella on yleistajuinen teos mutta tarjonnee paljon uutta myös sellaisille lukijoille, jotka ovat perehtyneet ryhmäteoriaan ja muuhun kirjassa käsiteltävään matematiikkaan. Yleistajuisuus saa tosin joissakin kohdissa rasittavia piirteitä. Paikoin asioita selitetään ”kädestä pitäen” tavalla, joka antaa vaikutelman lukijan aliarvioimisesta. Koska useimmilla tämäntyyppisten kirjojen lukijoilla uskoakseni on kohtalainen matemaattis-luonnontieteellinen yleissivistys, ei välttämättä ole tarpeen selittää, mitä tarkoittaa kuutiojuuri (s.118) tai että maailmankaikkeuden syntymästä käytetään nimeä ”suuri pamaus”. Rasittavalta tuntuu myös todella usein toistuva maneerinomainen virkkeen aloitus ”muistanet, että...”, jota kirjoittaja käyttää viitatessaan johonkin aiemmin mainitsemaansa yksityiskohtaan.

Vaikka Livio nostaa symmetrian korkeaan arvoon ja tietyssä mielessä jopa koko maailmankaikkeuden perustaksi, hän ei ole kritiikitön symmetrian merkitystä kohtaan. Kirjan loppupuolella on kiintoisaa pohdintaa siitä, johtuuko luonnonlaeissa havaitsemamme symmetrisyys siitä, että symmetrisyys todella on niiden keskeinen ominaisuus, vai pikemminkin siitä, että evolutiivisen taustamme takia olemme harjaantuneet näkemään erityisen hyvin juuri symmetrioita - saalistavien petojen symmetristen piirteiden havainnoiminen on ollut tärkeää henkiinjäämisen kannalta ja niin ikään symmetristen ihmiskasvojen tunnistaminen mm. parinvalinnan ja yleensäkin sosiaalisessa yhteisössä toimimisen kannalta. Samaa kuin symmetriasta, voidaan kysyä myös matematiikasta, ja Livion filosofi Bertrand Russellilta lainaama ajatus kiteyttää asian loistavasti: ”Fysiikka ei ole matemaattista niinkään siitä syystä, että tiedämme niin paljon fysikaalista maailmasta, vaan koska tiedämme niin vähän; voimme keksiä vain sen matemaattiset ominaisuudet.” Itse olisin taipuvainen lisäämään lainauksen alkuun sanan ”ehkä”.