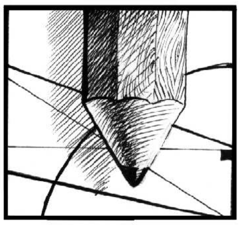
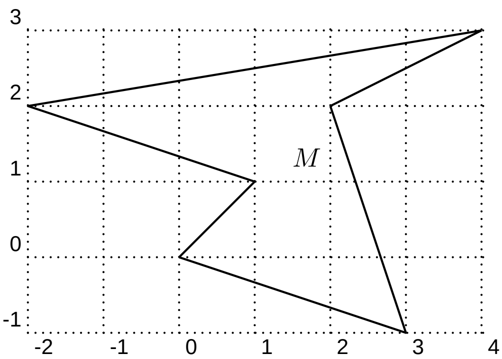


Monikulmion pinta-ala ylioppilaille

Mika Koskenoja
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

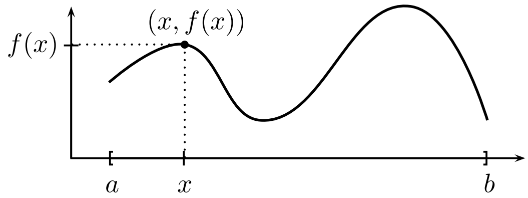
Tehtävä. Kuusikulmion M kärjet ovat tason pisteissä $(0,0)$, $(3,-1)$, $(2,2)$, $(4,3)$, $(-2,2)$ ja $(1,1)$. Laske M:n pinta-ala.



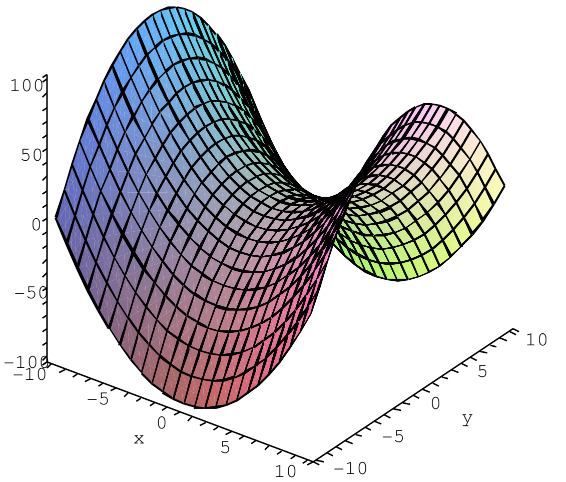
Esitin Solmun numerossa 1/2009 kirjoituksessa "Monikulmion pinta-ala koululaisille" tehtävälle kaksi keskenään samantapaista ratkaisua, jotka vaativat ainoastaan jo peruskoulun yläluokkien oppilaiden hallitsemia alkeisgeometrian tietoja. Jatkan nyt samasta aiheesta esittäen tehtävälle tyystin erilaisen ratkaisun, joka perustuu vasta yliopistomatematiikan alussa opittaviin vektorianalyysin perusteisiin. Pyrin kuitenkin siihen, että tämänkertaisenkin ratkaisun seuraamiseen riittää lukion pitkän matematiikan derivointi- ja integrointitaitojen hyvä hallinta.

Vektorianalyysin alkeita

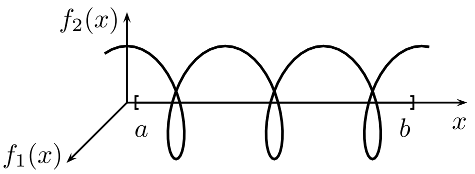
Koulumatematiikan funktio-opissa käsitellään lähinnä reaaliarvoisia funktioita, jotka on määritelty reaaliakselin osajoukossa. Kun $\Delta \subset \mathbf{R}$, niin funktio $f\colon \Delta \to \mathbf{R}$ kuvaa määrittelyjoukon Δ jokaisen luvun x joksikin reaaliluvuksi $f(x)$. Tällaisen funktion kuvaaja on tapana esittää tason pisteinä $(x, f(x))$. Alla olevassa kuvassa on esitetty erään välillä $[a,b]$ määritellyn jatkuvan funktion kuvaaja, joka on tasokäyrä.



Ensimmäinen askel varsinaisen vektorianalyysin puolelle tehdään tutkimalla reaaliarvoisia funktioita, jotka on määritelty tason osajoukossa. Reaalitaso $\mathbf{R}^2$ koostuu järjestetyistä reaalilukupareista (x,y), joita kutsutaan tason *pisteiksi.* Nyt funktio $f\colon D \to \mathbf{R}$, missä $D \subset \mathbf{R}^2$, kuvaa pisteen $(x,y) \in D$ reaaliluvuksi $f(x,y)$. Tällaisen funktion kuvaaja voidaan esittää kolmiulotteisen avaruuden pisteinä $(x,y,f(x,y))$. Seuraavassa kuvassa on neliössä $N = [-10,10] \times [-10,10]$ määritellyn jatkuvan funktion $f\colon N \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$, kuvaaja, joka on pinta avaruudessa $\mathbf{R}^3$.



Reaaliakselin osajoukon tilalle funktion määrittelyjoukoksi asetettiin edellä tason osajoukko. Toisaalta funktioiden käsittelyä voidaan yleistää niin, että arvojoukoksi asetetaan taso $\mathbf{R}^2$ reaalilukujoukon $\mathbf{R}$ sijasta. Kun $\Delta \subset \mathbf{R}$, niin funktio $f = (f_1, f_2)\colon \Delta \to \mathbf{R}^2$ kuvaa määrittelyjoukon Δ jokaisen luvun x joksikin reaalilukupariksi $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \in \mathbf{R}^2$. Funktioita $f_1, f_2\colon \Delta \to \mathbf{R}$ kutsutaan funktion f *koordinaattifunktioiksi.* Myös nyt funktion $f = (f_1, f_2)$ kuvaaja voidaan esittää kolmiulotteisen avaruuden pisteinä $(x, f_1(x), f_2(x))$. Alla olevassa kuvassa on esitetty erään välillä $[a, b]$ määritellyn jatkuvan funktion (eli *polun*) kuvaaja, joka on käyrä $\mathbf{R}^3$:ssa.



Funktion määrittely- ja arvojoukkojen laajennukset tasoon voidaan yhdistää tutkimalla funktioita $f = (f_1, f_2)\colon D \to \mathbf{R}^2$, missä $D \subset \mathbf{R}^2$. Tällöin f kuvaa jokaisen reaalilukuparin $(x, y) \in D$ reaalilukupariksi $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) \in \mathbf{R}^2$. Nyt pisteistä $(x, y, f(x, y)) = (x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) \in \mathbf{R}^4$ koostuvan funktion kuvaajan havainnollistaminen ei ole mahdollista yhtä helposti kuin edellä. Sen sijaan koordinaattifunktioiden f_1 ja f_2 kuvaajat voidaan esittää avaruuden $\mathbf{R}^3$ pistejoukkoina $(x, y, f_1(x, y))$ ja $(x, y, f_2(x, y))$, jatkuvassa tapauksessa erityisesti pintoina. Funktiota $f = (f_1, f_2)\colon D \to \mathbf{R}^2$ kutsutaan *vektorikentäksi.*

Koulumatematiikasta tuttujen funktioiden $f\colon \Delta \to \mathbf{R}$, $\Delta \subset \mathbf{R}$, analyysissä derivointi ja integrointi ovat keskeisiä työkaluja. Näin on myös vektorianalyysissä, joten käsittelemme seuraavaksi vektorifunktioiden derivointia ja integrointia. Tarkastelemme tason avoimissa tai suljetuissa joukoissa määriteltyjä funktioita, joiden arvot ovat tilanteesta riippuen joko reaalilukuja tai reaalilukupareja.

Osittaisderivaatat

Aloitetaan derivaatan käsittely tutkimalla funktioita $f\colon D \to \mathbf{R}$, missä $D \subset \mathbf{R}^2$ on avoin. Olkoon $(x_0, y_0) \in D$. Jos raja-arvo

$$\partial_x f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

on olemassa, niin se on funktion f *osittaisderivaatta* muuttujan x suhteen pisteessä (x_0, y_0). Vastaavasti, jos

$$\partial_y f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

on olemassa, niin se on funktion f *osittaisderivaatta* muuttujan y suhteen pisteessä (x_0, y_0). Melko helposti havaitaan, että osittaisderivaattojen laskeminen palautuu tuttuun yksiulotteiseen derivointiin. Kun nimittäin tarkastellaan avoimella välillä $]x_0 - r, x_0 + r[$ määriteltyä funktiota

$$g(x) = f(x, y_0),$$

niin

$$\partial_x f(x_0, y_0) = g'(x_0),$$

kunhan derivaatta on olemassa. Vastaavasti, kun tarkastellaan avoimella välillä $]y_0 - r, y_0 + r[$ määriteltyä funktiota

$$h(y) = f(x_0, y),$$

niin ollessaan olemassa

$$\partial_y f(x_0, y_0) = h'(y_0).$$

Esimerkki 1. Olkoon $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$, jonka kuvaaja neliössä $N = [-10, 10] \times [-10, 10]$ on esitetty tämän sivun ensimmäisessä kuvassa. Nyt $\partial_x f(x, y) = 2x$ ja $\partial_y f(x, y) = -2y$. Näin ollen esimerkiksi $\partial_x f(1, 3) = 2 \cdot 1 = 2$ ja $\partial_y f(1, 3) = -2 \cdot 3 = -6$.

Tarkastelimme edellä *ensimmäisen kertaluvun* osittaisderivaattoja. Voimme jatkaa *toisen kertaluvun* osittaisderivaattoihin. Jos ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat olemassa jokaisessa D:n pisteessä, niin ne määräävät kaksi uutta funktiota $\partial_x f\colon D \to \mathbf{R}$ ja $\partial_y f\colon D \to \mathbf{R}$, joita voimme yrittää osittaisderivoida. Jos kyseiset toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat olemassa jokaisessa D:n pisteessä, niin merkitsemme niiden määräämiä funktioita $\partial_{xx} f$, $\partial_{yy} f$, $\partial_{xy} f$ ja $\partial_{yx} f$. Voimme jatkaa edelleen *korkeamman kertaluvun* osittaisderivaattoihin pitäen mielessä, että ne eivät välttämättä ole olemassa, vaikka alemman kertaluvun osittaisderivaatat olisivatkin.

Kun siirrymme vektorikenttään $f = (f_1, f_2)\colon D \to \mathbf{R}^2$, niin voimme tarkastella koordinaattifunktioiden $f_1\colon D \to \mathbf{R}$ ja $f_2\colon D \to \mathbf{R}$ osittaisderivaattoja $\partial_x f_i(x, y)$ ja $\partial_y f_i(x, y)$, $i = 1, 2$. Edellä esitetyllä menettelyllä voimme laskea näillekin korkeamman kertaluvun osittaisderivaattoja, mikäli ne ovat olemassa.

Esimerkki 2. Tarkastellaan vektorikenttää $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = (y\sin x, x\cos y)$. Nyt $f_1(x,y) = y\sin x$, joten $\partial_x f_1(x,y) = y\cos x$ ja $\partial_y f_1(x,y) = \sin x$. Vastaavasti $f_2(x,y) = x\cos y$, joten $\partial_x f_2(x,y) = \cos y$ ja $\partial_y f_2(x,y) = -x\sin y$. Koordinaattifunktion f_1 toisen kertaluvun osittaisderivaatoiksi saadaan $\partial_{xx} f_1(x,y) = -y\sin x$, $\partial_{xy} f_1(x,y) = \cos x$, $\partial_{yy} f_1(x,y) = 0$ ja $\partial_{yx} f_1(x,y) = \cos x$. Vastaavasti f_2:n toisen kertaluvun osittaisderivaatoiksi saadaan $\partial_{xx} f_2(x,y) = 0$, $\partial_{xy} f_2(x,y) = -\sin y$, $\partial_{yy} f_2(x,y) = -x\cos y$ ja $\partial_{yx} f_2(x,y) = -\sin y$.

Sanomme, että funktio $f\colon D \to \mathbf{R}$ on *n kertaa jatkuvasti derivoituva* D:ssä, jos sillä on olemassa n. kertaluvun osittaisderivaatat jokaisessa pisteessä $(x,y) \in D$ ja osittaisderivaattojen määräämät funktiot ovat jatkuvia. Erityisesti f on kerran (kaksi kertaa) jatkuvasti derivoituva D:ssä, jos sillä on olemassa ensimmäisen (ensimmäisen ja toisen) kertaluvun osittaisderivaatat jokaisessa pisteessä $(x,y) \in D$ ja osittaisderivaattojen määräämät funktiot ovat jatkuvia. Vektorikenttä $f = (f_1, f_2)\colon D \to \mathbf{R}^2$ on *n kertaa jatkuvasti derivoituva* D:ssä, jos f_1 ja f_2 ovat n kertaa jatkuvasti derivoituva D:ssä. Jatkuvan derivoituvuuden määritelmät tehdään vastaavasti myös funktioille $f\colon \Delta \to \mathbf{R}$, missä $\Delta \subset \mathbf{R}$ on avoin.

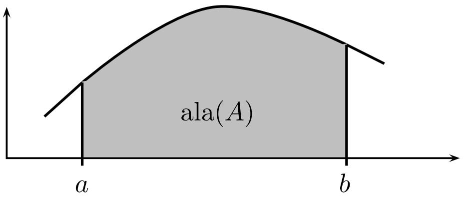
Havaitsemme esimerkistä 2, että $\partial_{xy} f_1 = \cos x = \partial_{yx} f_1$ ja $\partial_{xy} f_2 = -\sin y = \partial_{yx} f_2$. Tämä ei ole vain sattumaa, sillä kyseiset yhtälöt toteutuvat aina kaksi kertaa jatkuvasti derivoituville funktioille, jollainen myös esimerkin vektorikenttä f on.

Pinta- ja käyräintegraalit

Lukion pitkässä matematiikassa tulee tutuksi määrätty integraali ja sille voimassa oleva *analyysin peruslause*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big/_{a}^{b} F(x) = F(b) - F(a),$$

missä F on välillä $[a,b]$, $a < b$, määritellyn rajoitetun funktion f integraalifunktio. Määrätyn integraalin geometrinen merkitys on x-akselin, suorien $x = a$ ja $x = b$ sekä jatkuvan ja positiivisen funktion f kuvaajan väliin jäävän alueen A pinta-ala, ks. seuraava kuva. Huomaa, että suljetulla välillä $[a,b]$ määritelty jatkuva funktio on aina rajoitettu tällä välillä.



Pintaintegraali. Joukon, jonka yli integroidaan, ei tarvitse välttämättä olla jana x-akselilla. Jos $E \subset \mathbf{R}^2$ on riittävän säännöllinen suljettu ja rajoitettu joukko, sekä $f\colon E \to \mathbf{R}$ on jatkuva ja positiivinen, niin *pintaintegraalin*

$$\iint_E f(x)\,dx$$

arvo on joukon E, sen reunan ∂E kautta kulkevan xy-tasoa vastaan kohtisuoran umpinaisen pinnan ja funktion f kuvaajan $z = f(x,y)$ rajaaman kappaleen tilavuus. Pintaintegraali määritellään vastaavasti kuin reaaliakselin määrätty integraali Riemannin summien avulla, ks. [Martio, luku 4]. *Riittävän säännöllinen* merkitsee tässä yhteydessä sitä, että joukon E reuna ei ole liian monimutkainen. Esimerkiksi monikulmiot ovat aina riittävän säännöllisiä. Itse asiassa on melko hankalaa konstruoida joukko, joka ei ole tarpeeksi säännöllinen pintaintegraalin laskemiseksi.

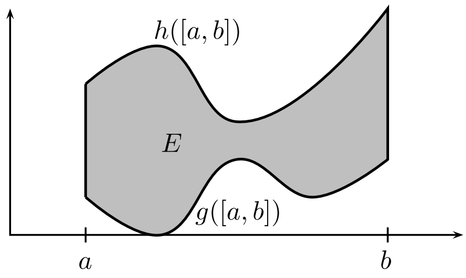
Käytännössä pintaintegraalin arvo voidaan usein laskea *iteroituna integraalina*. Jos suljettu ja rajoitettu joukko E voidaan lausua muodossa

$$E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : g(x) \leqslant y \leqslant h(x),\ x \in [a,b]\},$$

missä funktiot $g,h\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ ovat jatkuvia ja $g(x) \leqslant h(x)$ kaikilla $x \in [a,b]$, niin

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Bigg(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \Bigg) dx.$$

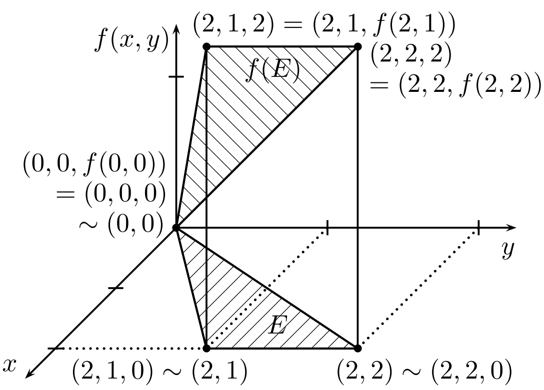
Ensin funktiota f integroidaan välillä $[g(x), h(x)]$ muuttujan y suhteen niin kuin x olisi vakio, jolloin integroitavaksi funktioksi saadaan vain x:stä riippuva funktio, jota sitten integroidaan x:n suhteen välillä $[a,b]$.



Esimerkki 3. Olkoon $E \subset \mathbf{R}^2$ kolmio, jonka kärjet ovat pisteissä $(0,0)$, $(2,1)$ ja $(2,2)$. Lasketaan tasointegraali yli E:n funktiolle $f(x,y) = x$. Valitaan nyt funktioiksi $g,h\colon [0,2] \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}x$ ja $h(x) = x$, ks. seuraava kuva. Tällöin

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \Bigg(\int_{\frac{1}{2}x}^{x} x\,dy \Bigg) dx = \int_0^2 \Bigg(\Big/_{\frac{1}{2}x}^{x} xy \Bigg) dx$$

$$= \int_0^2 \left(x^2 - \tfrac{1}{2}x^2\right) dx = \int_0^2 \tfrac{1}{2}x^2\,dx = \Big/_{0}^{2} \tfrac{1}{6}x^3 = \tfrac{1}{6}\cdot 8 = \tfrac{4}{3}.$$



Havaitsemme kuvasta, että edellä laskemamme tasointegraalin arvo $\frac{4}{3}$ on sellaisen monitahokkaan tilavuus, jonka kärjet ovat pisteissä $(0,0,0)$, $(2,1,0)$, $(2,2,0)$, $(2,1,2)$ ja $(2,2,2)$. Tässä tason pisteet $(0,0)$, $(2,1)$ ja $(2,2)$ on samaistettu $\mathbf{R}^3$:n pisteiden $(0,0,0)$, $(2,1,0)$ ja $(2,2,0)$ kanssa.

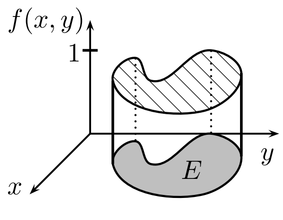
Havainto 1. Jos integroidaan vakiofunktiota $f \equiv 1$ yli riittävän säännöllisen joukon E, niin saadaan joukon E, sen reunan ∂E kautta kulkevan xy-tasoa vastaan kohtisuoran umpinaisen pinnan ja vakiofunktion 1 kuvaajan rajaaman kappaleen tilavuus. Havaitsemme, että saatu luku on itse asiassa samalla myös joukon E pinta-ala, eli

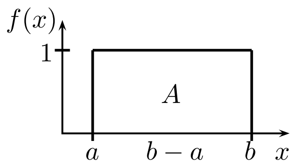
$$\mathrm{ala}(E) = \iint_E 1\,dx\,dy.$$

Vastaavasti yksiulotteisessa tapauksessa välin $[a,b]$ pituus saadaan integraalina

$$\int_a^b 1\,dx = \Big/_{a}^{b} x = b - a, \quad a < b,$$

joka on toisaalta x-akselin, suorien $x = a$ ja $x = b$ sekä vakiofunktion $f \equiv 1$ kuvaajan väliin jäävän alueen A pinta-ala. Havaitsemme lisäksi, että A on suorakaide, jonka kannan pituus on $b - a$ ja korkeus on 1.





Polku. Olkoon $D \subset \mathbf{R}^2$ avoin ja $a < b$. Jatkuvaa kuvausta $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)\colon [a,b] \to D$ sanotaan *poluksi* joukossa D. Kuvauksen γ jatkuvuus tarkoittaa, että molemmat koordinaattifunktiot $\gamma_i\colon [a,b] \to \mathbf{R}$, $i = 1,2$, ovat jatkuvia. Polun γ *derivaatta* $\gamma'(t)$ pisteessä $t \in [a,b]$ on vektori

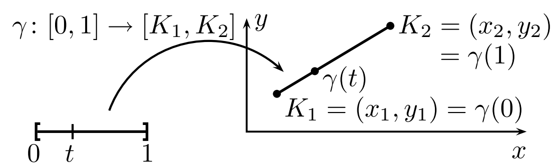
$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)) \in \mathbf{R}^2,$$

mikäli tavalliset derivaatat $\gamma_i'(t)$ pisteissä $t \in \,]a,b[$ ja toispuoleiset derivaatat pisteissä a ja b ovat olemassa. Jos derivaatta γ' on olemassa koko välillä $[a,b]$, niin sanomme, että γ on *derivoituva*. Jos γ on derivoituva lukuunottamatta äärellistä määrää pisteitä $t \in [a,b]$, niin sanomme, että γ on *paloittain derivoituva*. Edelleen, mikäli (paloittain) derivoituvan polun γ koordinaattifunktiot γ_1 ja γ_2 ovat jatkuvasti derivoituvia ja $\gamma'(t) \neq (0,0)$ (mahdollisesti lukuunottamatta äärellistä määrää pisteitä $t \in [a,b]$), niin sanomme, että polku γ on (paloittain) *säännöllinen*.

Esimerkki 4. Merkitään tason pisteet $K_1 = (x_1, y_1)$ ja $K_2 = (x_2, y_2)$ yhdistävää janaa $[K_1, K_2]$, jolloin siis $[K_1, K_2] \subset \mathbf{R}^2$. Janaa $[K_1, K_2]$ esittävä polku $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)\colon [0,1] \to [K_1, K_2]$ on

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2)\\ &= ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2)\\ &= (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \quad t \in [0,1].\end{aligned}$$

Tällaista polkua on tapana kutsua *janapoluksi*.



Polku $\gamma\colon [a,b] \to D$ on *umpinainen*, jos $\gamma(a) = \gamma(b)$. Olkoon nyt $E \subset D$ sellainen suljettu ja rajoitettu joukko, että sen reuna ∂E voidaan esittää umpinaisella (paloittain) säännöllisellä polulla $\gamma\colon [a,b] \to \partial E$. Esimerkiksi kaikkien n-kulmioiden reuna voidaan esittää umpinaisella paloittain säännöllisellä polulla. Joukon E reunaa esittävän polun γ sanotaan olevan *positiivisesti suunnistettu*, jos γ kiertää joukon E ainoastaan kerran ja E on pisteen $\gamma(t)$ läheisyydessä vektorin $\gamma'(t)$ vasemmalla puolella kaikissa pisteissä $t \in [a,b]$, joissa $\gamma'(t)$ on olemassa.

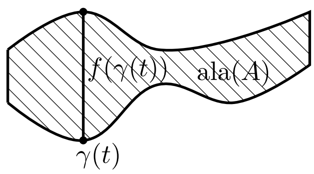
Käyräintegraali. Olkoon $\gamma\colon [a,b] \to \mathbf{R}^2$ (paloittain) derivoituva polku

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \quad t \in [a,b].$$

Jos $\gamma([a,b]) \subset D \subset \mathbf{R}^2$ ja $f\colon D \to \mathbf{R}$ on jatkuva, niin päädytään (*skalaarikentän*) *käyräintegraaliin*

$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(\gamma(t))\sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2}\,dt.$$

Tämä on tavallinen 1-ulotteinen määrätty integraali. Sen geometrinen tulkinta on polulle γ asetetun "aidan" A pinta-ala, kun aidan korkeus pisteessä $\gamma(t)$ on $f(\gamma(t))$, ks. seuraava kuva.



Jos käyräintegraalissa $f \equiv 1$, niin saadaan polun γ *pituus*

$$\ell(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2}\, dt.$$

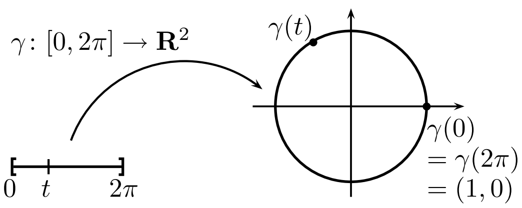
Esimerkki 5. Yksikköympyrän kehä $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ voidaan esittää polulla $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$,

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

joka on umpinainen, säännöllinen ja positiivisesti suunnistettu. Tällöin $\gamma_1'(t) = -\sin t$ ja $\gamma_2'(t) = \cos t$, joten

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = \Big/_0^{2\pi} t = 2\pi,$$

joka on tunnetusti yksikköympyrän kehän pituus, mutta se on siis myös yksikköympyrän kehää esittävän polun γ (joka on kuvaus) pituus.



Olkoon tilanne muuten kuten edellä skalaarikentän käyräintegraalia määriteltäessä, mutta oletetaan, että $f = (f_1, f_2)\colon D \to \mathbf{R}^2$ on jatkuva vektorikenttä. Tällöin määritellään (*vektorikentän*) *käyräintegraali*

$$\int_\gamma f \cdot d\bar{s} = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \big(f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + f_2(\gamma(t))\gamma_2'(t)\big)\, dt,$$

joka on edelleen tavallinen 1-ulotteinen määrätty integraali.

Jos integroidaan yli umpinaisen polun, niin käyräintegraaleille on tapana käyttää merkintöjä

$$\oint_\gamma f\, ds \quad \text{ja} \quad \oint_\gamma f \cdot d\bar{s}.$$

Monet määrätyn integraalin perusominaisuudet ovat voimassa myös taso- ja käyräintegraaleille. Esimerkiksi lineaarisuus integroitavan funktion suhteen on tasointegraalille voimassa muodossa

$$\iint_E (c_1 f + c_2 g)\, dx\, dy = c_1 \iint_E f\, dx\, dy + c_2 \iint_E g\, dx\, dy,$$

kun $f, g\colon E \to \mathbf{R}$ ja $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Vektorikentän käyräintegraalille additiivisuus integroimisjoukon suhteen saa muodon

$$\int_\gamma f \cdot d\bar{s} = \int_{\gamma_1} f \cdot d\bar{s} + \int_{\gamma_2} f \cdot d\bar{s},$$

kun polku γ on suunnistuksen säilyttäen yhdiste kahdesta polusta γ_1 ja γ_2. Kun käännetään polun $\gamma\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ suunta määrittelemällä uusi polku $-\gamma(t) = \gamma(b - (t - a))$, $t \in [a, b]$, niin

$$\int_{-\gamma} f \cdot d\bar{s} = -\int_\gamma f \cdot d\bar{s}.$$

Mitä määrätyn integraalin tuttua kaavaa tämä vastaa?

Greenin lause ja monikulmion pinta-ala

Greenin lause on yksi analyysin peruslauseen yleistyksistä tasoon, joissa on oleellista, että pintaintegraali yli tason joukon voidaan lausua integraalina yli joukon reunan. Tämähän on myös analyysin peruslauseen keskeinen ominaisuus: integroimisjoukkona oleva reaaliakselin väli $[a, b]$ korvataan siinä välin päätepisteillä, kun määrätyn integraalin arvo saadaan integraalifunktion pisteissä b ja a saamien arvojen erotuksena. Seuraava Greenin lauseen muotoilu on tarpeisiimme sopiva ja riittävä, mutta tuloksella on useita erilaisia ja yleisempiäkin muotoiluja.

Greenin lause. Olkoon $D \subset \mathbf{R}^2$ avoin ja rajoitettu, ja olkoon $f = (f_1, f_2)\colon D \to \mathbf{R}^2$ kerran jatkuvasti derivoituva vektorikenttä. Jos $E \subset D$ on suljettu joukko, jonka reunaa ∂E esittää paloittain säännöllinen positiivisesti suunnistettu polku, niin

$$\oint_{\partial E} f \cdot d\bar{s} = \iint_E \big(\partial_x f_2(x, y) - \partial_y f_1(x, y)\big)\, dx\, dy.$$

Seuraus 1. Olkoon $E \subset \mathbf{R}^2$ suljettu ja rajoitettu joukko, jonka reunaa ∂E esittää paloittain säännöllinen positiivisesti suunnistettu polku. Tutkitaan vektorikenttää $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = (0, x)$. Tällöin funktion f koordinaattifunktiot ovat $f_1(x, y) = 0$ ja $f_2(x, y) = x$, joten $\partial_x f_2(x, y) = 1$ ja $\partial_y f_1(x, y) = 0$. Havainnon 1 ja Greenin lauseen mukaan

$$\text{ala}(E) = \iint_E 1\, dx\, dy = \iint_E (1 - 0)\, dx\, dy$$

$$= \iint_E \big(\partial_x f_2(x, y) - \partial_y f_1(x, y)\big)\, dx\, dy = \oint_{\partial E} f \cdot d\bar{s}.$$

Seuraus 2. (Monikulmion pinta-ala) Jos n-kulmion M kärjet ovat vastapäivään kiertäen pisteissä $K_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$, niin M:n pinta-ala on

$$\text{ala}(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_{i+1} + x_i)(y_{i+1} - y_i)}{2},$$

missä $x_{n+1} = x_1$ ja $y_{n+1} = y_1$.

Todistus. Esitetään n-kulmion M reuna ∂M siten, että γ_i on polku, joka esittää janaa kärjestä K_i kärkeen K_{i+1}, $\gamma_i\colon [0,1] \to [K_i, K_{i+1}]$, $\gamma_i(t) = (\gamma_{i,1}(t), \gamma_{i,2}(t))$, missä

$$\begin{aligned}\gamma_{i,1}(t) &= (1-t)x_i + tx_{i+1},\\ \gamma_{i,2}(t) &= (1-t)y_i + ty_{i+1},\end{aligned}$$

$i = 1, \ldots, n$ ja $t \in [0,1]$. Tällöin $\gamma'_{i,1}(t) = x_{i+1} - x_i$ ja $\gamma'_{i,2}(t) = y_{i+1} - y_i$. Nyt vektorikentän käyräintegraalin määritelmän perusteella

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_i} f \cdot d\overline{s} &= \int_0^1 f(\gamma_i(t)) \cdot \gamma_i'(t)\, dt\\ &= \int_0^1 (0, (1-t)x_i + tx_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i)\, dt\\ &= (y_{i+1} - y_i) \int_0^1 ((1-t)x_i + tx_{i+1})\, dt\\ &= (y_{i+1} - y_i) \Big/_0^1 \left(x_i t + \frac{(x_{i+1} - x_i)t^2}{2} \right)\\ &= (y_{i+1} - y_i) \left(x_i + \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)\\ &= \frac{(x_{i+1} + x_i)(y_{i+1} - y_i)}{2}.\end{aligned}$$

Koska polkujen γ_i yhdiste reunan ∂E esityksenä on paloittain säännöllinen ja positiivisesti suunnistettu, niin seurauksen 1 ja vektorikentän käyräintegraalin additiivisuusominaisuuden perusteella saadaan

$$\begin{aligned}\text{ala}(M) &= \oint_{\partial M} f \cdot d\overline{s} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f \cdot d\overline{s}\\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_{i+1} + x_i)(y_{i+1} - y_i)}{2}. \qquad \square\end{aligned}$$

Seurauksen 2 perusteella saamme tehtävän ratkaisuksi

$$\begin{aligned}\text{ala}(M) &= \tfrac{1}{2}\big[(3+0)(-1-0) + (2+3)(2+1)\\ &\quad + (4+2)(3-2) + (-2+4)(2-3)\\ &\quad + (1-2)(1-2) + (0+1)(0-1)\big]\\ &= \tfrac{1}{2}\big[-3 + 15 + 6 - 2 + 1 - 1\big] = \tfrac{16}{2} = 8.\end{aligned}$$

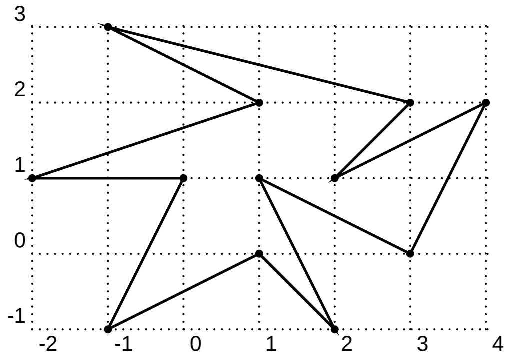
Tulos on tietysti sama kuin Solmun 1/2009 artikkelissa "Monikulmion pinta-ala koululaisille" kahdella eri tavalla laskettu M:n pinta-ala.

Monikulmion pinta-alan kaavasta seuraa eräs mielenkiintoinen havainto. Jos n-kulmion M (kuinka monimutkaisen tahansa) kärjet ovat kokonaislukupisteissä $(l, m) \in \mathbf{Z}^2$, niin $\text{ala}(M) = k \cdot \frac{1}{2}$, missä $k \in \mathbf{Z}_+$, sillä monikulmion pinta-alan summakaavassa osoittajassa oleva termi $(x_{i+1} + x_i)(y_{i+1} - y_i)$ on tällöin aina kokonaisluku.

Jatkan samasta aiheesta jossakin Solmun tulevassa numerossa vielä kolmannella kirjoituksella. Esitän tehtävälle kahdessa kirjoituksessani jo esitetyistä tavoista poikkeavan ratkaisun, joka perustuu Pickin lauseeseen.

Tehtäviä lukijalle

Tehtävä 1. Laske alle piirretyn 12-kulmion pinta-ala.



Tehtävä 2. Johda r-säteisen ympyrän pinta-ala πr^2 Greenin lauseen (seurauksen 1) avulla.

Tehtävä 3. Johda säännöllisen kuusikulmion, jonka sivun pituus on s, pinta-ala $\frac{3\sqrt{3}}{2}s^2$ Greenin lauseen (seurauksen 2) avulla. Johda sama tulos tasogeometrisesti käyttäen hyväksesi Pythagoraan lausetta.

Tehtävä 4. Kuusikulmion M kärjet ovat vastapäivään kiertäen pisteissä $(1,0)$, $(6,1)$, $(6,2)$, $K = (x,2)$, $(3,4)$ ja $(0,3)$. Määritä kärjen $K = (x,2)$ ensimmäinen koordinaatti x siten, että M:n pinta-ala on a) 12, b) 13, c) 15. Piirrä kuvat!

Tehtävä 5. Piirrä kuva itse keksimästäsi 10-kulmiosta ja laske sen pinta-ala.

Kirjallisuutta

Adams, Robert A., Calculus: a complete course, 6th edition, Addison Wesley, 2006.

Lehto, Olli, Differentiaali- ja integraalilaskenta II, Offset Oy, 1982.

Martio, Olli, Vektorianalyysi, Limes ry, 2004.