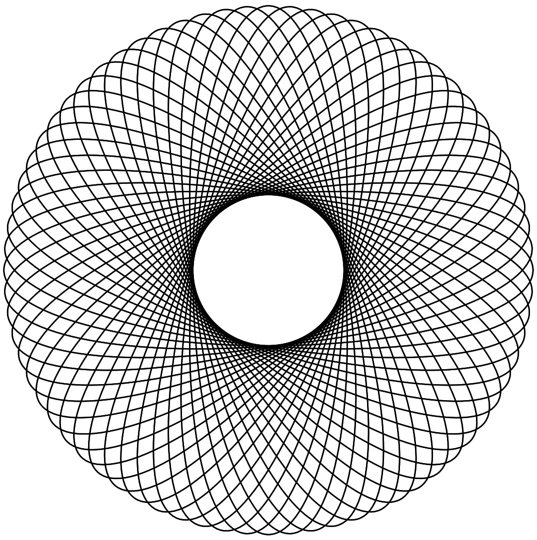
Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle



Markku Halmetoja Jorma Merikoski

Sisältö

Esipuhe

Lukion pitkään matematiikkaan kuuluvat vektoriopin ja analyysin alkeet, mutta sitä, mihin niitä tarvitaan, ei juurikaan käsitellä. Opiskelijan on vain luotettava siihen, että niiden hyödyllisyys selviää jatko-opinnoissa.

Fysiikka ja tähtitiede ovat historiallisesti olleet matematiikan tärkeimmät sovellusalat. Ne ovat edelleen tärkeitä, vaikka matematiikkaa nykyisin sovelletaan muuallekin aiempaa paljon laajemmin ja monipuolisemmin. Erityisesti vektorioppi ja analyysi ovat syntyneet enimmäkseen juuri fysiikan ja tähtitieteen tarpeista, joten niiden motivaatiota valaisee hyvin, kun tutkitaan niiden käyttöä fysiikassa. Tällöin jo lukiossa voidaan perehtyä matematiikan *todelliseen soveltamiseen*.

Tämä kirja perustuu matematiikan koulukohtaisen syventävän kurssin materiaaliin, jota on parikymmentä vuotta käytetty Mäntän lukiossa. Sitä voitaneen käyttää syventävänä materiaalina myös fysiikan opetuksessa. Koska kirjan laajuus vastaa vain yhtä syventävää kurssia, käsittelemme ainoastaan muutamia valittuja kohtia matemaattisesta fysiikasta ja sen tarvitsemasta matematiikasta.

Ensimmäisessä luvussa pyrimme mahdollisimman suppeaan asiasisältöön eli rajoitumme siihen oppiainekseen, joita tarvitsemme jatkossa.

Tämän luvun alkuosassa käsittelemme differentiaaliyhtälöitä. Ratkaisemme ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä muuttujat erottamalla ja integroivalla tekijällä. Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöistä meille riittää tarkastella niitä, jotka voidaan palauttaa näin ratkeaviin ensimmäisen kertaluvun yhtälöihin.

Loppuosassa laajennamme differentiaalilaskentaa reaalimuuttujan vektoriarvoisille funktioille ja (kaksikomponenttisen) vektorimuuttujan reaaliarvoisille funktioille. Oikeastaan meidän pitäisi laajentaa myös integraalilaskentaa, sillä tarkastellessamme työtä (osaluku 2.3) tarvitsemme periaatteessa käyräintegraalia. Tyydymme kuitenkin kevyeen ja havainnolliseen esitykseen, jossa ”integroidaan pitkin janaa”.

Toisessa luvussa tutkimme sovelluksia mekaniikkaan. Muotoilemme mekaniikan peruslait ja -periaatteet siten, että voimme tarkastella käyräviivaisiakin liikkeitä. Käsittelemme niitä melko perusteellisesti (osaluvut 2.2–3) samoin kuin Keplerin lakeja ja Newtonin gravitaatiolakia (osaluku 2.6).

Kolmannessa luvussa tutustumme hieman aaltoliikeoppiin ja termodynamiikkaan. Johdamme aaltoyhtälön (osaluku 3.1) mallintamalla värähtelevää kieltä. Edelleen johdamme kaasulain (osaluku 3.2) ja adiabaattisen prosessin kaasuyhtälön (osaluku 3.3). Jälkimmäisessä johdossa tarvitsemamme käyräintegraalin määritelmän ja ominaisuudet esitämme harjoitustehtävissä. Lopuksi laskemme sovelluksena äänen nopeuden (osaluku 3.4). Osaluvut 3.3

ja 3.4 eivät kuulu varsinaiseen kurssiin, ja siksi ne on merkitty tähdellä.

Numeroltaan alleviivatut tehtävät liittyvät kurssin teoriaan. Ne olemme tarkoittaneet käsiteltäviksi oppitunneilla. Tähdellä merkityt tehtävät ja asiat voidaan jättää sellaisten opiskelijoiden oman harrastuksen varaan, jotka etsivät haasteita. Ilman lisämerkintää olevat tehtävät sopivat kotitehtäviksikin. (Tähdellä merkittyjen osalukujen 3.3 ja 3.4 tehtävissä emme käytä näitä merkintöjä.) Kaikkien tehtävien täydelliset ratkaisut ovat meiltä saatavissa. Niiden pyytäjän täytyy kuitenkin vakuuttaa, ettei hän ole opiskelijana kurssilla, jossa käytetään tätä kirjaa.

Kirjallisuusluettelossa saattaa ihmetyttää se, että useimmat kirjat ovat kymmeniä vuosia vanhoja. Luettelon ensisijainen tarkoitus on noudattaa hyvää tieteellistä tapaa, jonka mukaan kirjoittajan on mainittava käyttämänsä lähteet. Emme siis ole yrittäneet tehdä kattavaa luetteloa nykyisin suositeltavasta kirjallisuudesta, mutta mainitsemamme kirjat ovat edelleenkin suositeltavia.

Olemme käyttäneet LaTeX-nimistä matemaattista tekstinkäsittelyjärjestelmää, joka on vapaasti saatavissa netistä. Kuviot on piirtänyt Markku Halmetoja LaTeX:in MetaPost-ohjelmalla. Poikkeuksena on sivun 2 kuvio, jonka on piirtänyt Jarmo Niemelä, mistä kiitämme häntä.

Otamme mielellämme vastaan virheiden korjauksia ja muita kommentteja sekä kehitysehdotuksia. Jos tämä kirja osoittautuu käyttökelpoiseksi, niin julkaisemme myöhemmin siitä parannetun ja ehkä laajennetunkin version. Sähköpostiosoitteemme ovat `etunimi.sukunimi@uta.fi`.

Toivomme, että sovellusnäkökulman ymmärtäminen jo lukiossa lisää matemaattisesti lahjakkaan oppilaan kiinnostusta matematiikkaan ja motivoi häntä opiskelemaan ja kertaamaan muitakin matematiikan lukiokursseja niin, että hän saavuttaa *todellisen korkeakoulukelpoisuuden.*

Tampereella kesäkuussa 2009

Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski

Kiitän Suomen tietokirjailijat ry:tä saamastani apurahasta.

Jorma Merikoski

Korjattu ja päivitetty huhtikuussa 2011.

1 Differentiaalilaskentaa

Tarkastelemme aluksi *differentiaaliyhtälöitä*, joiden avulla voidaan mallintaa liikettä ja muita muutoksia. Jotta voisimme yleistää suoraviivaisen liikkeen mekaniikan koskemaan muitakin liikkeitä, käsittelemme sen jälkeen vektoriarvoisia funktioita ja tarkastelemme käyriä napakoordinaatistossa.

1.1 Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

Ensimmäisen kertaluvun (tavallinen) differentiaaliyhtälö muodostuu (reaali)muuttujasta x, tämän tuntemattomasta (reaali)funktiosta y ja tämän funktion derivaatasta y'. ("Tavallinen" tarkoittaa, että muuttujia on vain yksi. "Ensimmäisen kertaluvun" tarkoittaa, ettei ensimmäistä kertalukua korkeampia derivaattoja esiinny.) Tällaisen differentiaaliyhtälön yleinen muoto on

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

missä f on tunnettu kahden muuttujan funktio. Funktio $y = \phi(x)$ on differentiaaliyhtälön (1) *ratkaisu*, jos se on eräällä välillä I derivoituva ja jos $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$ kaikilla $x \in I$. Muuttuja x tai funktio y voivat puuttua, jolloin kyseessä on yksinkertaisempi differentiaaliyhtälö $y' = f(x)$ tai $y' = f(y)$. Näistä edellisen ratkaiseminen on tuttu integroimistehtävä.

Differentiaaliyhtälön (1) *yleinen ratkaisu* sisältää mielivaltaisen vakion c. Antamalla c:lle eri arvoja saadaan tämän yhtälön *yksityisratkaisuja.* Yleinen ratkaisu on usein myös *täydellinen ratkaisu*, mikä tarkoittaa, että yhtälön (1) kaikki ratkaisut sisältyvät yleiseen ratkaisuun. Yhtälöllä saattaa kuitenkin olla *erikoisratkaisuja*, joita ei saada yleisestä ratkaisusta millään c:n arvolla.

Esim. 1 Differentiaaliyhtälön $y' = 2x - 1$ yleinen (ja myös täydellinen) ratkaisu on

$$y = \int (2x - 1)\mathrm{d}x = x^2 - x + c,$$

missä c on mielivaltainen vakio. Se saadaan yksikäsitteiseksi asettamalla muotoa $y(a) = b$ oleva *alkuehto*. Esimerkiksi alkuehdon $y(2) = 1$ toteuttava yksityisratkaisu on $y = x^2 - x - 1$.

Esim. 2 a) Osoita, että differentiaaliyhtälön $y' = -xy$ yleinen ratkaisu on $y = c\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$. **b)** Määritä alkuehdon $y(0) = 2$ toteuttava yksityisratkaisu.

a) Funktiolle $\phi(x) = c\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ on

$$\phi'(x) = c\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}(-\tfrac{1}{2} \cdot 2x) = -xc\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} = -x\phi(x),$$

mistä väitös seuraa.

b) Koska $\phi(0) = c$, yhtälöstä $\phi(0) = 2$ saadaan $c = 2$. Kysytty yksityisratkaisu on siis $y = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Esim. 3 Minkä differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on $y = cx^2$?

Jos $y = cx^2$, niin $y' = 2cx$. Eliminoimalla c:n (jolloin täytyy olettaa, että $c \neq 0$) saamme differentiaaliyhtälön

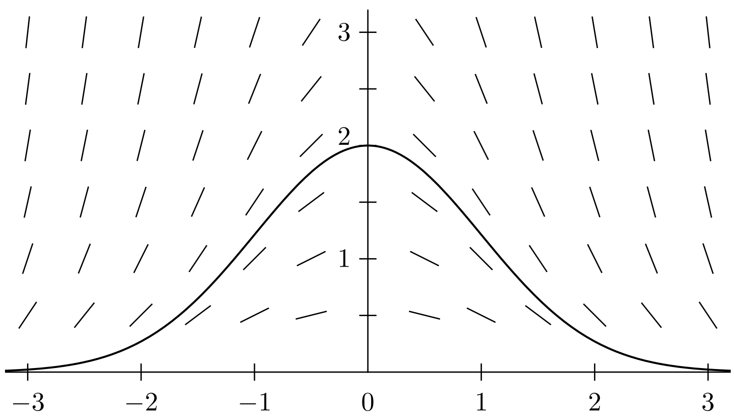
$$y' = \frac{2y}{x}.$$

Koska oikea puoli ei ole määritelty, kun $x = 0$, tämä yhtälö on parempi kirjoittaa muotoon $xy' = 2y$.

Derivaatan geometrinen merkitys on tangentin kulmakerroin. Tarkastelemme nyt differentiaaliyhtälön geometrista merkitystä. Sitä varten määrittelemme *viiva-alkion* liittämällä toisiinsa pisteen ja suunnan. Jos pisteeseen (x, y) liitetään suunta s, niin saadaan viiva-alkio (x, y, s). Differentiaaliyhtälön $y' = f(x, y)$ *suuntakenttä* koostuu kaikista niistä viiva-alkioista (x, y, s), joilla piste (x, y) kuuluu funktion f määrittelyjoukkoon ja $s = f(x, y)$ eli viiva-alkion suunta on pisteen (x, y) kautta kulkevan yksityisratkaisun kuvaajan eli *integraalikäyrän* tangentin suunta.

Differentiaaliyhtälön geometrinen merkitys on siis suuntakenttä. Integraalikäyriä voidaan hahmottaa suuntakentän avulla ratkaisematta differentiaaliyhtälöä.

Esim. 2, jatkoa Kuviossa on differentiaaliyhtälön $y' = -xy$ suuntakentän ylempään puolitasoon kuuluva osa. Esimerkiksi pisteeseen $(1, 1)$ liittyy suunta $-45°$, koska $f(1, 1) = -1 \cdot 1 = -1 = \tan(-45°)$. Lisäksi kuviossa on alkuehdon $y(0) = 2$ toteuttavan yksityisratkaisun kuvaaja eli pisteen $(0, 2)$ kautta kulkeva integraalikäyrä. Se on hahmotettu käyttämättä hyväksi tämän funktion lauseketta $y = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$.



1.2 Eksponentiaalinen muutos

Radioaktiivinen isotooppi hajoaa siten, että pienellä aikavälillä $[t, t + \Delta\, t]$ hajoava määrä on likimain verrannollinen aikavälin pituuteen ja aikavälin alussa olleeseen aineen määrään. Jos siis $m(t)$ on määrä hetkellä t ja $m(0) = m_0$, niin

$$m(t) - m(t + \Delta t) \approx \lambda m(t)\Delta t$$

sitä tarkemmin mitä pienempi Δt on. Vakio $\lambda > 0$ on verrannollisuuskerroin. Kirjoittamalla yhtälön muotoon

$$\frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} \approx -\lambda m(t)$$

ja antamalla $\Delta t \to 0$ saamme differentiaaliyhtälön

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\lambda m$$

eli

$$m'(t) = -\lambda m(t) \tag{1}$$

alkuehdolla $m(0) = m_0$. Ratkaisemme sen kolmella tavalla.

Tapa 1. Palautamme tehtävän integroimiseksi. Koska $m(t) > 0$, sillä voidaan jakaa, joten

$$\frac{m'(t)}{m(t)} = -\lambda$$

eli

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln m(t) = -\lambda.$$

Tästä saamme integroimalla

$$\ln m(t) = -\lambda t + k.$$

Syy, miksi merkitsemme integroimisvakiota c:n sijasta k:lla, selviää pian. Logaritmin määritelmän mukaan on nyt

$$m(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t + k} = \mathrm{e}^{k}\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Merkitsemällä $c = \mathrm{e}^k$ saamme lopulta

$$m(t) = c\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Tässä c on eksponenttifunktion arvona positiivinen.

Jos unohdamme tehtävän fysikaalisen taustan ja tarkastelemme pelkkää differentiaaliyhtälöä (1), niin sen yleinen ratkaisu on $m(t) = c\mathrm{e}^{-\lambda t}$, missä c on mielivaltainen vakio. Negatiiviset c:n arvot tulevat mukaan, koska integroinnin tulos on nyt $\ln|m(t)| = -\lambda t + k$. (Miten jatketaan?) Yksityisratkaisu $m(t) = 0$ on huomattava erikseen, ja sitä vastaa vakio $c = 0$.

Tapa 2. Muodostamme sellaisen yhtäpitävän differentiaaliyhtälön, jossa vaaditaan, että erään funktion derivaatta on nolla. Kirjoitamme differentiaaliyhtälön (1) aluksi muotoon

$$m'(t) + \lambda m(t) = 0. \tag{2}$$

Kertomalla sen *integroivalla tekijällä* $\mathrm{e}^{\lambda t}$ saamme (koska kertoja on nollasta eroava) yhtäpitävän differentiaaliyhtälön

$$\mathrm{e}^{\lambda t} m'(t) + \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} m(t) = 0.$$

Koska

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{\lambda t} m(t)) = \mathrm{e}^{\lambda t} m'(t) + \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} m(t),$$

saamme (2):n kanssa yhtäpitävästi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{\lambda t} m(t)) = 0,$$

josta integroimalla

$$\mathrm{e}^{\lambda t} m(t) = c$$

ja edelleen

$$m(t) = c\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Lineaarinen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö on muotoa

$$y' + p(x)y = f(x),$$

missä p ja f ovat tunnettuja funktioita. Se voidaan aina ratkaista integroivalla tekijällä. (Tapaus, jossa $p(x)$ on vakio, ks. teht. 2.)

Tapa 3. Erotamme muuttujat. Kirjoitamme differentiaaliyhtälön (1) sitä edeltäneeseen muotoon

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\lambda m.$$

Integroitaessa sijoituksella olemme käsitelleet ”differentiaaleja” ikäänkuin ne olisivat lukuja. Tätä kyseenalaiselta tuntuvaa temppua voidaan puolustaa sanomalla, että tulos on aina tarkistettavissa, minkä jälkeen on melko yhdentekevää, miten se on saatu. Sama pätee nytkin, joten operoimme "differentiaaleilla" $\mathrm{d}m$ ja $\mathrm{d}t$. Kertomalla $\mathrm{d}t$:llä ja jakamalla m:llä saamme

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = -\lambda \mathrm{d}t,$$

josta integroimalla

$$\int \frac{\mathrm{d}m}{m} = -\lambda \int \mathrm{d}t$$

eli

$$\ln m = -\lambda t + k.$$

Jatkamme kuten tavassa 1.

Jokainen muotoa $g(y)y'(x) = f(x)$ oleva differentiaaliyhtälö voidaan ratkaista muuttujat erottamalla.

Olemme nyt löytäneet kolmella tavalla differentiaaliyhtälön $m'(t) = -\lambda m(t)$ yleisen (ja myös täydellisen) ratkaisun $m(t) = c\mathrm{e}^{-\lambda t}$. Meidän on vielä määritettävä alkuehdon $m(0) = m_0$ toteuttava yksityisratkaisu. Sijoittamalla yleiseen ratkaisuun $t = 0$ saamme $m(0) = c$, joten kysytty yksityisratkaisu on $m(t) = m_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Olkoon T isotoopin puoliintumisaika. Voimme esittää kertoimen λ sen avulla. Nimittäin

$$m(T) = m_0\mathrm{e}^{-\lambda T} = \tfrac{1}{2}m_0,$$

josta

$$-\lambda T = \ln \tfrac{1}{2} = -\ln 2,$$

ja siis

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}.$$

Näin ollen

$$m(t) = m_0\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T}t} = m_0(\mathrm{e}^{\ln 2})^{-\frac{t}{T}} = m_0 2^{-\frac{t}{T}}.$$

Radioaktiivinen hajoaminen on *eksponentiaalista vähenemistä*. Vastaavasti *eksponentiaalisessa kasvussa* suureen *lisäys* pienellä aikavälillä on likimain verrannollinen suureen kokoon aikavälin alussa ja aikavälin pituuteen. Tällöin saamme differentiaaliyhtälön $m'(t) = \lambda m(t)$, missä $\lambda > 0$, alkuehdolla $m(0) = m_0$. (Anna esimerkki eksponentiaalisesta kasvusta.)

Harjoitustehtäviä

1. Todista: **a)** Differentiaaliyhtälön

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2xy$$

yleinen ratkaisu on $y = c\mathrm{e}^{-x^2}$. **b)** Tason jokaisen pisteen kautta kulkee täsmälleen yksi tämän differentiaaliyhtälön integraalikäyrä.

2̲. Lineaarinen *vakiokertoiminen* ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö on muotoa

$$y' + ay = f(x),$$

missä a on vakio ja f tunnettu funktio. Johda sen ratkaisukaava.

3. Ratkaise differentiaaliyhtälö **a)** $y' + y = \mathrm{e}^x$, **b)** $y' + 2xy = \mathrm{e}^{-x^2}$.

4. Olkoon f derivoituva funktio, $f(0) = 1$ ja $f'(x) \leq f(x)$ kaikilla $x \geq 0$. Osoita, että $f(x) \leq \mathrm{e}^x$ kaikilla $x \geq 0$.

5. Miten yhdistetyn funktion derivoimissääntö liittyy differentiaaliyhtälön ratkaisemiseen muuttujat erottamalla?

6. Määritä differentiaaliyhtälön $3y^2y' = 1$ se ratkaisu, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(1, 2)$ kautta.

7. Pääoma k_0 sijoitetaan niin, että p % vuotuinen korko lisätään siihen jatkuvasti. Laske pääoma t vuoden kuluttua **a)** ajattelemalla ensiksi, että korko lisätään pääomaan n kertaa vuodessa, ja antamalla sitten $n \to \infty$, **b)** johtamalla aluksi pääoman kasvua kuvaava differentiaaliyhtälö.

8. Minkä käyrän mielivaltaisen pisteen (x, y) kautta kulkeva tangentti on kohtisuorassa pisteen (y, x) paikkavektoria vastaan?

9. **a)** Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = \sqrt{|y|}$. **b)** Osoita, että sillä on erikoisratkaisu, jota ei saada yleisestä ratkaisusta millään c:n arvolla.

10. Yhdisteestä A muodostuu suurempia molekyylejä reaktioyhtälön

$$A + A \to A_2$$

osoittamalla tavalla. Tällöin A:n konsentraation c väheneminen ajan t mukana noudattaa differentiaaliyhtälöä

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = -kc^2,$$

missä $k(> 0)$ on vakio. Ratkaise tämä differentiaaliyhtälö alkuehdolla $c(0) = c_0$.

11. Jääkuution sulamisnopeus on tietyssä ulkoilman lämpötilassa verrannollinen kuution pinta-alaan. Kuinka kauan sulaminen kestää, kun ensimmäisen tunnin aikana kuutiosta sulaa neljännes? Oletetaan, että kuutio säilyttää muotonsa sulaessaan.

12. *Newtonin*[1] *jäähtymislain* mukaan kappale jäähtyy nopeudella, joka on pienellä aikavälillä likimain verrannollinen kappaleen ja ilman lämpötilaeroon sekä aikavälin pituuteen. Olkoon T_1 kappaleen alkulämpötila ja T_0 ilman lämpötila. **a)** Olkoon $T(t)$ kappaleen lämpötila ajanhetkellä t. Mitä differentiaaliyhtälöä se noudattaa? **b)** Ratkaise tämä differentiaaliyhtälö. **c)** Mitä on lisäksi tiedettävä, jotta ratkaisua voitaisiin käyttää sellaisen kuolleena löydetyn henkilön kuolinhetken määrittämiseen, jonka ruumis on vielä ulkoilmaa lämpimämpi?

13. Astiassa on määrä a (litraa) liuosta, jossa on m_0 (kg) suolaa ja loput vettä. Hetkellä $t = 0$ sinne aletaan lisätä vettä nopeudella l (litraa minuutissa) ja samalla aletaan poistaa liuosta samalla nopeudella. Oletetaan, että liuos pysyy koko ajan homogeenisena. Laske astiassa olevan suolan määrä ajan t (minuuttia) kuluttua.

$\star$**14.** Saippuapallo upotetaan vesiastiaan, jossa se liuetessaan säilyttää muotonsa. Pallon tilavuus upotushetkellä on V_0. Pienellä aikavälillä liukeneva saippuamäärä on verrannollinen pallon senhetkiseen pinta-alaan ja kääntäen verrannollinen liuenneen saippuan määrään. **a)** Olkoon $V(t)$ pallon tilavuus ajan t kuluttua. Mitä differentiaaliyhtälöä se noudattaa? **b)** Ratkaise tämä differentiaaliyhtälö. **c)** Missä ajassa täsmälleen puolet saippuasta on liuennut, kun viidesosa siitä on liuennut tunnissa?

[1] Isaac Newton (1643–1727), englantilainen fyysikko ja matemaatikko.

⋆15 (*Poissonin*[1] *prosessi*). Tarkastellaan eräästä isotoopista säteilyilmaisimeen tulevien hiukkasten lukumäärää aikavälillä, joka on erittäin paljon lyhempi kuin puoliintumisaika. Olkoon $P_n(t)$ todennäköisyys sille, että aikavälillä $[0, t]$ mittariin tulee n osumaa. Oletetaan, että tämä todennäköisyys on sama muillekin t:n pituisille aikaväleille ja että seuraavat ehdot ovat voimassa.

(1) Erillisillä aikaväleillä tulevien osumien lukumäärät ovat toisistaan riippumattomia satunnaismuuttujia.

(2) Todennäköisyys sille, että pienellä aikavälillä tulee täsmälleen yksi osuma, on likimäärin verrannollinen aikavälin pituuteen.

(3) Todennäköisyys sille, että pienellä aikavälillä tulee enemmän kuin yksi osuma, on ”häviävän pieni”, joten se voidaan olettaa nollaksi.

Määritä $P_n(t)$. Ohje: Käsittele aluksi tapaukset $n = 0$, $n = 1$ ja $n = 2$.

⋆16. Tarkastellaan sellaista tietyn suoran suhteen symmetristä kaarevaa peilipintaa, joka heijastaa symmetria-akselin suuntaiset säteet kulkemaan akselilla olevan kiinteän (poltto)pisteen kautta. Osoita, että kyseinen pinta on pyörähdysparaboloidi (joka syntyy paraabelin pyörähtäessä akselinsa ympäri). Ohjeita: Valitse symmetria-akseliksi y-akseli ja polttopisteeksi origo. Tuleva ja heijastuva säde muodostavat yhtäsuuret kulmat heijastuspisteeseen asetetun pinnan normaalin kanssa. Johda differentiaaliyhtälö sille funktiolle, jonka kuvaaja on kyseisen pinnan ja xy-tason leikkauskäyrä.

1.3 Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

Toisen kertaluvun (tavallinen) differentiaaliyhtälö on muotoa

$$y'' = f(x, y, y'),$$

missä f on tunnettu kolmen muuttujan funktio. Sen yleinen ratkaisu sisältää kaksi integroimisvakiota, joita merkitsemme kirjaimilla c ja d. Meille riittävät seuraavissa esimerkeissä mainitut differentiaaliyhtälöt.

Esim. 1 Differentiaaliyhtälön $y'' = 0$ yleinen (ja myös täydellinen) ratkaisu on $y = cx + d$.

Esim. 2 Tarkastelemme differentiaaliyhtälöä $y'' + ay' = 0$, missä vakio $a \neq 0$. Sijoittamalla $z = y'$ saamme z:lle ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälön $z' + az = 0$, jonka voimme ratkaista kuten luvussa 1.2. Sen jälkeen ratkaisemme differentiaaliyhtälön $y' = z$ suoraan integroimalla.

[1] Siméon Denis Poisson (1781–1840), ranskalainen matemaatikko.

Esim. 3 Differentiaaliyhtälön $y'' + \omega^2 y = 0$, missä vakio $\omega \neq 0$, yleinen (ja myös täydellinen) ratkaisu on

$$y = c\cos\omega x + d\sin\omega x \quad \text{(teht. 18)}.$$

Esim. 4 Differentiaaliyhtälön $y'' - \omega^2 y = 0$, missä vakio $\omega \neq 0$, yleinen (ja myös täydellinen) ratkaisu on

$$y = c\mathrm{e}^{\omega x} + d\mathrm{e}^{-\omega x} \quad \text{(teht. 19)}.$$

Esim. 5 Tarkastelemme lopuksi differentiaaliyhtälöä $y'' + ay = b$, missä $a (\neq 0)$ ja b ovat vakioita. Sijoitamme

$$z = y - \tfrac{b}{a}.$$

Koska

$$z'' + az = y'' + a\big(y - \tfrac{b}{a}\big) = y'' + ay - b = b - b = 0,$$

saamme z:lle differentiaaliyhtälön $z'' + az = 0$. Jos $a > 0$, niin jatkamme kuten esimerkissä 3. Jos taas $a < 0$, niin jatkamme kuten esimerkissä 4.

Harjoitustehtäviä

17. *Toisen kertaluvun lineaarinen homogeeninen differentiaaliyhtälö* on muotoa

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0,$$

missä p ja q ovat tunnettuja funktioita. Todista: Jos ϕ_1 ja ϕ_2 ovat ovat tämän differentiaaliyhtälön ratkaisuja, niin myös niiden jokainen lineaarikombinaatio

$$y = c\phi_1(x) + d\phi_2(x),$$

missä c ja d ovat mielivaltaisia vakioita, on sen ratkaisu.

18. **a)** Kertaa tai opiskele uutena asiana (ks. esim. [5], s. 161) arkussinin määritelmä. **b)** Johda arkussinin derivoimissääntö ja siitä saatava integroimissääntö. **c)** Osoita, että differentiaaliyhtälö $y'' + \omega^2 y = 0$, missä vakio $\omega \neq 0$, saadaan integroivalla tekijällä $2y'$ muotoon $(y')^2 = k^2 - \omega^2 y^2$, missä $k \geq 0$ on mielivaltainen vakio. **d)** Ratkaise c-kohdassa saatu differentiaaliyhtälö. **e)** Päättele tästä esimerkin 3 tulos.

19. **a)** Kertaa tai opiskele uutena asiana (ks. esim. [5], teht. 88) hyperbelisinin sinh ja ja hyperbelikosinin cosh määritelmät. **b)** Johda näiden funktioiden derivoimissäännöt. **c)** Kertaa tai opiskele uutena asiana (ks. esim. [5], teht. 318) areahyperbelisinin arsinh ja -kosinin arcosh määritelmät ja johda näiden funktioiden lausekkeet. **d)** Johda c-kohdassa mainittujen funktioiden derivoimissäännöt ja niistä saatavat integroimissäännöt. **e)** Osoita, että differentiaaliyhtälö $y'' - \omega^2 y = 0$ saadaan integroivalla tekijällä $2y'$ muotoon $(y')^2 = \pm k^2 + \omega^2 y^2$, missä $k \geq 0$ on mielivaltainen vakio. **f)** Ratkaise e-kohdassa saatu differentiaaliyhtälö. **g)** Päättele tästä esimerkin 4 tulos.

20. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'' + ay' = a$, missä a on vakio.

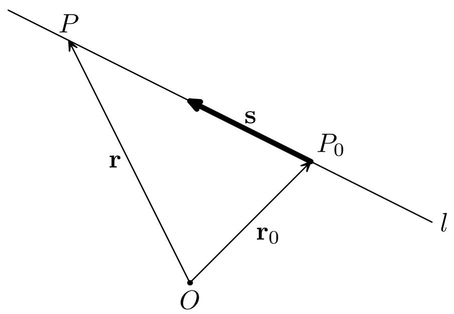
1.4 Vektorifunktioista

Kertaamme aluksi avaruuden suoran (ja jättämällä z-koordinaatin pois tason suoran) yhtälön esittämisen vektori- ja parametrimuodossa.

Tarkastelemme suoraa l, joka kulkee pisteen P_0 kautta ja jonka suuntavektori on $\mathbf{s}$. (Kirjoitettaessa koneella on parasta merkitä vektoreita lihavoinnilla, kun taas kirjoitettaessa käsin voidaan käyttää tuttua yläviivaa tai oikeastaan mieluummin alaviivaa.) Olkoon P suoran l mielivaltainen piste, ja olkoot paikkavektorit $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ ja $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$. Tällöin suoran l vektorimuotoinen yhtälö on

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{s},$$

missä parametri t saa kaikki reaaliarvot.



Merkitsemme vektoria $\mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ kirjoittamalla lyhyesti $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Vastaavasti merkitsemme $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ja $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$. Tällöin suoran vektorimuotoinen yhtälö on

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(s_x, s_y, s_z),$$

josta vertaamalla koordinaatteja saamme suoran l parametrimuotoisen yhtälön (tai oikeastaan "parametrimuotoisen yhtälöryhmän") eli *parametriesityksen*

$$x = x_0 + ts_x, \quad y = y_0 + ts_y, \quad z = z_0 + ts_z.$$

Avaruuden yleisen käyrän γ (ja jättämällä z-koordinaatin pois tason yleisen käyrän) parametriesitys on muotoa

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t),$$

missä f, g ja h ovat tietyllä välillä määriteltyjä funktioita. Tällöin käyrän γ vektorimuotoinen yhtälö on $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$. Kuitenkin on yleensä mukavampi käyttää parametriesitystä

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

ja vektorimuotoista yhtälöä $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Tällöin menetellään hieman epäkorrektisti, koska esimerkiksi yhtälössä $x = x(t)$ kirjaimella x on kaksi merkitystä: oikealla puolella se tarkoittaa funktiota ja vasemmalla tämän funktion arvoa.

Jokaisella tasokäyrällä $y = f(x)$ on parametriesitys

$$x = t, \quad y = f(t).$$

Esim. 1 Paraabelilla $y = x^2$ on parametriesitys

$$x = t, \quad y = t^2$$

ja siis vektorimuotoinen yhtälö

$$\mathbf{r}(t) = \left(t, t^2\right),$$

missä t saa kaikki reaaliarvot. Tällä paraabelilla on muitakin (mutta edelliseen verrattuna hyödyttömiä) parametriesityksiä, kuten esimerkiksi $x = t^3$, $y = t^6$. (Miksi $x = t^2$, $y = t^4$ ei kelpaa?)

Parametriesityksestä saadaan käyrälle muotoa $F(x, y) = 0$ oleva yhtälö eliminoimalla parametri, mikäli se onnistuu.

Esim. 2 Tarkastelemme käyrää γ, jonka parametriesitys on

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t.$$

Tässä vakio $r > 0$, ja parametri t käy läpi välin $[0, 2\pi[$. Neliöimällä nämä yhtälöt ja laskemalla tulokset yhteen saamme $x^2 + y^2 = r^2$. Siis käyrän γ jokainen piste on ympyrällä $x^2+y^2 = r^2$. Käänteisesti tämän ympyrän jokainen piste on käyrällä γ (miksi?). Siis γ on tämä ympyrä.

Reaalimuuttujan vektoriarvoisen funktion eli lyhemmin *vektorifunktion* määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$ tai jokin sen (epätyhjä) osajoukko ja maalijoukko on $\mathbb{R}^3$ tai $\mathbb{R}^2$. Tarkastelemme vektorifunktiota

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad \text{tai} \quad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)).$$

Määrittelemme sen *raja-arvon* ja *jatkuvuuden* komponenttifunktioiden vastaavien käsitteiden avulla. Siis

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \big(\lim_{t\to t_0} x(t), \lim_{t\to t_0} y(t), \lim_{t\to t_0} z(t)\big),$$

mikäli komponenttifunktioiden raja-arvot ovat olemassa. Jos komponenttifunktiot ovat derivoituvia, niin määrittelemme vektorifunktion *derivaatan*

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \Big(\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}, \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}\Big) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Vektorifunktion derivaatta on siis vektori.

Voidaan todistaa, että $\mathbf{r}'(t_0)$ on käyrän $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ pisteen $x = x(t_0), y = y(t_0), z = z(t_0)$ kautta kulkevan tangentin suuntainen. (Miten avaruuskäyrän tangentti määritellään?) Rajoitumme kuitenkin seuraavissa esimerkeissä tarkastelemaan tilannetta tasossa.

Esim. 1, jatkoa Huomasimme edellä, että paraabelin $y = x^2$ vektorimuotoinen yhtälö on $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$. Siis derivaattavektori $\mathbf{r}'(t) = (1, 2t)$. Toisaalta paraabelin $y = x^2$ pisteen (t, t^2) kautta kulkevan tangentin kulmakerroin on $2t$, joten $\mathbf{r}'(t)$ on todellakin tämän tangentin suuntainen.

Esim. 2, jatkoa Huomasimme edellä myös, että ympyrän $x^2 + y^2 = r^2$ parametrimuotoinen yhtälö on $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, joten tämän ympyrän vektorimuotoinen yhtälö on $\mathbf{r}(t) = (r\cos t, r\sin t)$. Derivaattavektori $\mathbf{r}'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$ on kohtisuorassa vektoria $\mathbf{r}(t)$ vastaan, sillä skalaaritulo $\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}(t) = r^2(-\sin t)\cos t + r^2\cos t\sin t = 0$. Toisaalta ympyrän tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteen kautta kulkevaa sädettä vastaan, joten derivaattavektori ja tangentti ovat yhdensuuntaisia.

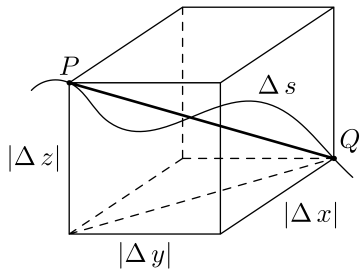
Olemme integraalilaskennassa huomanneet, että on havainnollista (mutta epätäsmällistä) tulkita pinta-ala A "äärettömän monen äärettömän pienen pinta-alkion" $\mathrm{d}A$ summaksi. Tulkitsemme nyt vastaavasti, että käyränkaaren pituus s on "äärettömän monen äärettömän pienen kaarialkion" $\mathrm{d}s$ summa.

Tarkastelemme käyrän

$$x = x(t),\; y = y(t),\; z = z(t)$$

pisteiden $P = (x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t))$ ja $Q = (x(t), y(t), z(t))$ välisen kaaren pituutta Δs. Kun $|\Delta x|$ on pieni, on

$$\Delta s \approx |QP| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta\, y)^2 + (\Delta z)^2}.$$



Täten

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}.$$

Antamalla $\Delta t \to 0$ saamme

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2},$$

joten kaarialkio

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,\mathrm{d}t = |\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Pisteiden $(x(t_1), y(t_1), z(t_1))$ ja $(x(t_2), y(t_2), z(t_2))$ välisen käyränkaaren pituus on siis

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Olkoon f välillä $[a, b]$ derivoituva funktio. Koska tasokäyrällä $y = f(x)$ on parametriesitys $x = t$, $y = f(t)$, käyränkaaren pituus tällä välillä on

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Esim. 3 Johdamme r-säteisen ympyrän (kehän) pituuden kaavan. Ympyrän $x^2 + y^2 = r^2$ ylemmän puoliympyrän yhtälö on $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, ja funktiolle $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ on

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Siis kysytty pituus

$$s = 4\int_0^r \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = 4r\int_0^r \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Sijoittamalla $x = r\sin t\,(0 \le t \le \frac{\pi}{2})$, jolloin $\sqrt{r^2 - x^2} = r\cos t$ ja $\mathrm{d}x = r\cos t\,\mathrm{d}t$, saamme

$$\int_0^r \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\cos t\,\mathrm{d}t}{r\cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2},$$

joten

$$s = 4r \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi r.$$

Harjoitustehtäviä

21. Laske ellipsin

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

rajoittaman alueen pinta-ala. Ohje: Käytä ellipsin parametriesitystä $x = a\cos t$, $y = b\sin t\,(0 \le t < 2\pi)$.

22. Olkoot $\mathbf{u} = \mathbf{f}(t)$ ja $\mathbf{v} = \mathbf{g}(t)$ skalaarimuuttujan t vektorifunktioita, ja olkoon $y = h(t)$ sen skalaarifunktio. Osoita, että funktio **a)** $h\mathbf{f}$, **b)** $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$, **c)** $\mathbf{f} \times \mathbf{g}$ voidaan derivoida tavallisen tulon derivoimissäännön kaltaisella säännöllä.

23. Ympyrä $x^2 + (y - r)^2 = r^2$ lähtee vierimään pitkin x-akselia. **a)** Johda sen *sykloidin* yhtälö, jonka ympyrän alunperin origossa ollut piste P piirtää. Ohje: Valitse parametriksi ympyrän alimman pisteen ja P:n välistä kaarta vastaava keskuskulma. **b)** Kuinka pitkän kaaren P on muodostanut sen palatessa (ensimmäisen kerran) x-akselille? **c)** Laske tämän kaaren ja x-akselin rajoittaman alueen pinta-ala.

24. Laske käyrän **a)** $y = \cosh x$, **b)** $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ kaaren pituus välillä $[0, t]$.

1.5 Kahden muuttujan funktioista

Olkoon M joukon $\mathbb{R}^2$ (epätyhjä) osajoukko. Jos jokaista lukuparia $(x, y) \in M$ vastaa yksikäsitteinen reaaliluku $z = f(x, y)$, niin f on muuttujien x ja y funktio. Tällä funktiolla on siis kaksi muuttujaa. Funktion f määrittelyjoukko on M ja arvojoukko koostuu luvuista $z = f(x, y)$.

Funktion f *kuvaaja* koostuu avaruuden $\mathbb{R}^3$ niistä pisteistä (x, y, z), joille $z = f(x, y)$. Jos f on tarpeeksi ”säännöllinen”, niin sen kuvaaja on ”pinta”. Määrittelyjoukko M on tämän pinnan projektio xy-tasolla. Pintaa voidaan hahmottaa funktion *sama-arvokäyrillä* eli niillä xy-tason käyrillä, joilla f saa saman vakioarvon. Sama-arvokäyrän yleinen yhtälö on siis $f(x, y) = c$. Kartan korkeuskäyrät ovat funktion $f(x, y) =$ ”sen paikan korkeus, jonka koordinaatit ovat x ja y” sama-arvokäyriä.

Esim. 1 Funktion $f(x, y) = ax + by + c$ kuvaaja on taso. Sama-arvokäyrät ovat (miksi?) suoran $ax + by = 0$ suuntaisia xy-tason suoria, jos luvuista a ja b ainakin toinen eroaa nollasta. (Mitä voidaan sanoa tapauksesta $a = b = 0$?)

Esim. 2 Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3$ kuvaaja on pyörähdysparaboloidi, jonka huippu on $(0, 0, 3)$. Sama-arvokäyrät ovat origokeskisiä ympyröitä (miksi?).

Määrittelemme funktion $z = f(x, y)$ *osittaisderivaatan* f_x pitämällä y:tä vakiona ja derivoimalla x:n suhteen. Vastaavasti määrittelemme osittaisderivaatan f_y. (Usein käytetään merkintöjä f'_x ja f'_y, mutta pilkut ovat tässä turhaa painolastia.) Siis

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}, \quad f_y(x, y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}.$$

Osittaisderivaatta $f_x(x, y)$ ilmoittaa f:n kasvunopeuden x-akselin suunnassa, kun y on kiinnitetty. Vastaavasti $f_y(x, y)$ ilmoittaa f:n kasvunopeuden y-akselin suunnissa, kun x on kiinnitetty. Merkintä f_x luetaan: ”f:n derivaatta x:n suhteen” ja f_y vastaavasti. Vaihtoehtoiset merkinnät ovat

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial y},$$

ja jos $z = f(x, y)$, niin myös

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Merkintä $\frac{\partial f}{\partial x}$ luetaan: ”d f d x” ja muut vastaavasti.

Osittaisderivaattoja lasketaan tavallisilla derivoimiskaavoilla, jolloin sitä muuttujaa, jonka suhteen ei derivoida, pidetään vakiona.

Funktion $z = f(x, y)$ *toisen kertaluvun osittaisderivaatat* ovat

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} && : \text{derivoidaan } f_x \ x\text{:n suhteen,} \\
f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} && : \text{derivoidaan } f_y \ y\text{:n suhteen,} \\
f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} && : \text{derivoidaan } f_x \ y\text{:n suhteen,} \\
f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} && : \text{derivoidaan } f_y \ x\text{:n suhteen.}
\end{aligned}$$

Korkeamman kertaluvun osittaisderivaatat määritellään vastaavasti.

Esim. 3 Jos $f(x, y) = x \sin xy$, niin

$$\begin{aligned}
f_x(x, y) &= \sin xy + xy \cos xy, \\
f_y(x, y) &= x^2 \cos xy, \\
f_{xx}(x, y) &= 2y \cos xy - xy^2 \sin xy, \\
f_{yy}(x, y) &= -x^3 \sin xy, \\
f_{xy}(x, y) &= 2x \cos xy - x^2 y \sin xy, \\
f_{yx}(x, y) &= 2x \cos xy - x^2 y \sin xy.
\end{aligned}$$

Koska tässä esimerkissä on $f_{xy} = f_{yx}$, herää kysymys, onko tämä tulos yleisestikin voimassa eli onko "sekaderivaatta" riippumaton derivoimisjärjestyksestä. Voidaan todistaa, että vastaus on myönteinen, jos kaikki toisen kertaluvun osittaisderivaatat f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} ja f_{yx} ovat jatkuvia. Mutta miten määritellään kahden muuttujan funktion jatkuvuus? Tyydymme havainnolliseen mutta epätäsmälliseen määritelmään.

Funktio $z = f(x, y)$ on *jatkuva* pisteessä (x_0, y_0), jos $f(x, y) \to f(x_0, y_0)$, kun $(x, y) \to (x_0, y_0)$ pitkin mitä tahansa käyrää.

Toisin kuin yhden muuttujan funktion tapauksessa, kahden muuttujan funktion f derivoituvuudesta (mikä tarkoittaa osittaisderivaattojen f_x ja f_y olemassaoloa) ei seuraa jatkuvuus (teht. 27). Nimittäin pelkkä f_x:n ja f_y:n olemassaolo on heikko ominaisuus, koska sillä hallitaan f:n käyttäytyminen vain x- ja y-akselien suunnissa.

Kaikki edellä sanottu voidaan yleistää koskemaan sellaisiakin funktioita, joissa muuttujia on kolme tai enemmän.

Osittaisdifferentiaaliyhtälö sisältää osittaisderivaattoja.

Esim. 4 Osittaisdifferentiaalihtälön

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

yleinen ratkaisu on $z = ay + b$ tai $z = cx + d$, missä a, b, c ja d ovat mielivaltaisia vakioita.

Esim. 5 *Laplacen*[1] *osittaisdifferentiaaliyhtälön*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

ratkaisut ovat *harmonisia funktioita.* Esimerkiksi funktio $z = x^2 - y^2$ on harmoninen (miksi?).

Harjoitustehtäviä

25. **a)** Muodosta yhtälön $z^2 = x^2 + y^2$ määrittelemien funktioiden $z = f(x, y)$ ja $z = g(x, y)$ lausekkeet. **b)** Piirrä näiden funktioiden kuvaajat. Ohje b-kohtaan: Määritä sama-arvokäyrät sekä kuvaajien ja koordinaattitasojen leikkauskäyrät.

26. Muodosta funktion $f(x, y) = \mathrm{e}^{xy} - xy^2$ ensimmäisen ja toisen kertaluvun osittaisderivaatat.

27. Anna esimerkki kahden muuttujan funktiosta, joka on origossa derivoituva mutta epäjatkuva.

28. Osoita, että funktiolla

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

ei ole raja-arvoa origossa. Toisin sanoen muodosta kaksi sellaista käyrää, joita pitkin origoa lähestyttäessä saadaan eri raja-arvot.

29. Osoita, että funktio **a)** $z = \sinh y \sin x$, **b)** $z = \ln(x^2 + y^2)$ toteuttaa Laplacen osittaisdifferentiaaliyhtälön.

[1]Pierre-Simon Laplace (1749–1827), ranskalainen matemaatikko.

1.6 Napakoordinaatisto

Napakoordinaatiston muodostavat *origo* O ja O:sta alkava puolisuora l, joka on napakoordinaatiston *akseli*. Pisteen P esitys *napakoordinaateissa* on $[r, \theta]$, missä $r = OP$ eli P:n etäisyys origosta ja *vaihekulma* θ on se suunnattu kulma, jonka alkukylki on l ja loppukylki on puolisuora OP. Tavallisesti sovimme, että $0 \leq \theta < 2\pi$. Origolle on $r = 0$ ja θ määrittelemätön.

Sijoitamme napakoordinaatiston *suorakulmaiseen koordinaatistoon* siten, että origot yhtyvät ja akseli yhtyy positiiviseen x-akseliin. Tällöin pisteen P suorakulmaisten koordinaattien (x, y) ja napakoordinaattien $[r, \theta]$ välillä vallitsevat muunnoskaavat (perustele)

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

ja toisin päin

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Viimeinen kaava ei määrää vaihekulmaa yksikäsitteisesti (miksei?), joten θ on valittava oikeasta neljänneksestä. Lisäksi on huomattava, että tapaus $x = 0$ täytyy käsitellä erikseen (miksi ja miten?).

Suorakulmaisessa koordinaatistossa yhtälön $y = y_0$ (vakio) kuvaaja on x-akselin suuntainen suora, ja yhtälön $x = x_0$ kuvaaja on y-akselin suuntainen suora. Napakoordinaatistossa yhtälön $r = r_0$ kuvaaja on ympyrä $x^2 + y^2 = r_0^2$, jos $r_0 > 0$, ja origo, jos $r_0 = 0$. Yhtälön $\theta = \theta_0$ kuvaaja on ylempään puolitasoon kuuluva suoran $y = x\tan\theta_0$ osa, jos $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ tai $\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi$, ja alempaan puolitasoon kuuluva osa, jos $\pi < \theta_0 < 3\frac{\pi}{2}$ tai $3\frac{\pi}{2} < \theta_0 < 2\pi$. (Mitä voidaan sanoa tapauksista $\theta_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}$?)

Napakoordinaatiston käyrän yhtälö esitetään tavallisesti muodossa $r = f(\theta)$, missä f on jatkuva funktio. Mukavampi mutta hieman epäkorrekti merkintä on $r = r(\theta)$. Siitä saadaan käyrälle parametriesitys

$$x = r(\theta)\cos\theta, \quad y = r(\theta)\sin\theta,$$

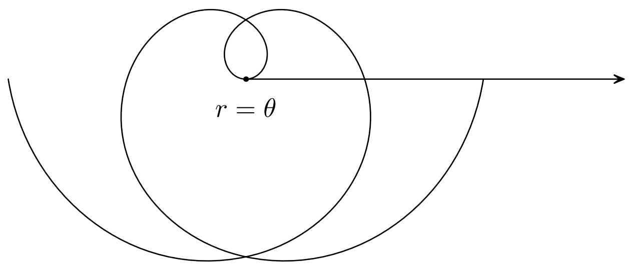
missä siis parametrina on vaihekulma θ.

Esim. 1 Tarkastelemme suoraa $ax + by = c$ napakoordinaatistossa. Oletamme, että $a, b, c \neq 0$. Sijoittamalla $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ suoran yhtälöön ja ratkaisemalla sen r:n suhteen saamme varsin mutkikkaan yhtälön

$$r = \frac{c}{a\cos\theta + b\sin\theta}.$$

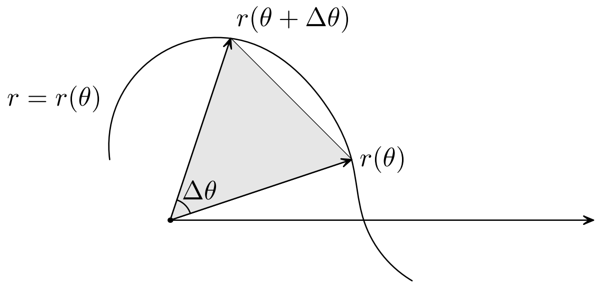
(Totea piirtämällä kuvio, että θ ei käy läpi koko väliä $[0, 2\pi[$ vaan vain sen erään osavälin.) Jos suoraa on välttämättä tarkasteltava napakoordinaatistossa, niin on parempi esittää sen yhtälö muodossa $r\cos(\theta - \omega) = p$, mikä sekin on mutkikkaampi kuin yhtälö suorakulmaisessa koordinaatistossa. Tässä $(\cos\omega, \sin\omega)$ on suoran normaalivektori ja p on origon etäisyys suorasta. (Totea tämä piirtämällä kuvio ja tutki, minkä välin arvot θ saa.)

Esim. 2 *Arkhimedeen*[1] *spiraalin* yhtälö on $r = \pm\theta$, missä θ saa kaikki reaaliarvot ja etumerkki valitaan niin, että $r \geq 0$. Kuviossa on $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$.



Millainen kuvio saadaan arvoilla $-4\pi \leq \theta \leq 4\pi$?

Laskemme nyt sen alueen pinta-alan A, jota rajoittavat käyrä $r = r(\theta)$, missä $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, ja ne origosta alkavat puolisuorat, jotka vastaavat vaihekulmia θ_1 ja θ_2.



Tarkastelemme aluksi sen kolmioon pinta-alaa ΔA, jonka sivuina ovat pisteitä $[r(\theta), \theta]$ ja $[r(\theta + \Delta\theta), \theta + \Delta\theta]$ vastaavat paikkavektorit sekä näiden pisteiden välinen käyränkaari. Jos $|\Delta\theta|$ on pieni, niin käyränkaari voidaan likimain korvata näiden pisteiden yhdysjanalla, joten kolmion alan sinikaavan mukaan

$$\Delta A \approx \tfrac{1}{2} r(\theta) r(\theta + \Delta\theta) \sin\Delta\theta$$

ja edelleen

$$\frac{\Delta A}{\Delta\theta} \approx \tfrac{1}{2} r(\theta) r(\theta + \Delta\theta) \frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}.$$

Annamme $\Delta\theta \to 0$, jolloin $r(\theta + \Delta\theta) \to r(\theta)$ (miksi?) ja $\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta} \to 1$ (miksi?). Näin saamme

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta} = \tfrac{1}{2} r(\theta) r(\theta) \cdot 1 = \tfrac{1}{2} r(\theta)^2,$$

[1] Arkhimedes (287 eKr.–212 eKr.), kreikkalainen matemaatikko.

joten pinta-alkio

$$\mathrm{d}A = \tfrac{1}{2} r(\theta)^2 \mathrm{d}\theta,$$

ja kysytty pinta-ala

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{d}A = \tfrac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r(\theta)^2 \mathrm{d}\theta.$$

Esim. 3 Laskemme *Cartesiuksen*[1] *lehden* $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ rajoittaman alueen pinta-alan. Tässä vakio $a > 0$.

Sijoittamalla $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ saamme

$$r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta) - 3r^2 a\cos\theta\sin\theta = 0,$$

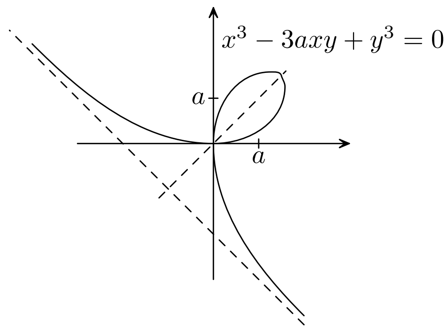
josta

$$r = \frac{3a\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}.$$

Siis pinta-alkio

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}\theta = \frac{9a^2}{2}\left(\frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}\right)^2 \mathrm{d}\theta = \frac{9a^2}{2}\left[\frac{\tan\theta\cos^2\theta}{(1+\tan^3\theta)\cos^3\theta}\right]^2 \mathrm{d}\theta =$$

$$\frac{9a^2}{2}\left[\frac{\tan\theta}{(1+\tan^3\theta)\cos\theta}\right]^2 \mathrm{d}\theta = \frac{9a^2}{2}\frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^3\theta)^2}\frac{1}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{9a^2}{2}\frac{\tan^2\theta\,(1+\tan^2\theta)}{(1+\tan^3\theta)^2}\mathrm{d}\theta.$$



Käyrä leikkaa itsensä origossa ja vain siinä (miksi?), mikä tapahtuu vaihekulmilla $\theta = 0$ ja $\theta = \frac{\pi}{2}$ (miksi?). Lisäksi käyrä on symmetrinen suoran $y = x$ suhteen (miksi?), joten saamme kysytyn pinta-alan A kertomalla kahdella sen alueen pinta-alan, jota rajoittavat suora $y = x$ ja tämä käyrä. Näin ollen

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}A = 9a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2\theta\,(1+\tan^2\theta)}{(1+\tan^3\theta)^2}\mathrm{d}\theta.$$

[1] René Descartes (1596–1650), ranskalainen filosofi ja matemaatikko.

Sijoittamalla $\tan\theta = t$, jolloin $(1+\tan^2\theta)\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}t$, saamme

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2\theta\,(1+\tan^2\theta)}{(1+\tan^3\theta)^2}\mathrm{d}\theta = \int_0^1 \frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^3)^2} = \tfrac{1}{3}\int_0^1 \frac{3t^2\mathrm{d}t}{(1+t^3)^2} = -\tfrac{1}{3}\Big/_0^1 \frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{6},$$

joten

$$A = 9a^2 \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{3}{2}a^2.$$

Harjoitustehtäviä

30. **a)** Kertaa ellipsin, hyperbelin ja paraabelin uraominaisuudet. **b)** Miksi näitä käyriä kutsutaan kartioleikkauksiksi? **c)** Myös ellipsillä ja hyperbelillä on polttopisteeseen ja johtosuoraan perustuva uraominaisuus (ks. esim. [7], s. 71, 78), jolloin kartioleikkauksille saadaan seuraava yhteinen uraominaisuus. Kartioleikkaus on niiden pisteiden ura, joiden *polttopisteestä* Q ja *johtosuorasta* l mitattujen etäisyyksien suhde on vakio. Tämä vakiosuhde on kartioleikkauksen *eksentrisyys* ε. Kyseessä on paraabeli, kun $\varepsilon = 1$, ellipsi, kun $\varepsilon < 1$, ja hyperbeli, kun $\varepsilon > 1$. Johda ellipsin yhtälö, kun $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $Q = (1, 0)$ ja l on suora $x = 4$. **d)** Johda paraabelin yhtälö, kun Q on origo ja l on suora $x = -1$. **e)** Johda hyperbelin yhtälö, kun $\varepsilon = 2$, $Q = (4, 0)$ ja l on suora $x = 1$.

31. Piirrä laskimella käyrä

$$\textbf{a)}\ r = \frac{1}{1+\cos\theta}, \quad \textbf{b)}\ r = \frac{2}{2+\cos\theta}, \quad \textbf{c)}\ r = \frac{2}{2+3\cos\theta}.$$

Miltä kartioleikkauksilta ne näyttävät?

32. Johda kartioleikkauksille yhteinen yhtälö napakoordinaatistossa. Ohjeita: Sijoita polttopiste origoon ja johtosuora kohtisuoraan napakoordinaatiston akselia vastaan. Merkitse johtosuoran etäisyyttä origosta s:llä ja kartioleikkauksen eksentrisyyttä ε:lla.

33. **a)** Osoita, että käyrän $r = r(\theta)$ "kaarialkio"

$$\mathrm{d}s = \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

b) Laske *Pascalin*[1] *simpukan* $r = 1 + \cos\theta$ muodostaman umpinaisen kaaren i) pituus, ii) rajoittaman alueen pinta-ala.

c) Laske i) sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat napakoordinaatiston akseli ja Arkhimedeen spiraalin (esim. 2) väliä $0 \le \theta \le 2\pi$ vastaava kaari, ii) tämän kaaren pituus.

[1] Blaise Pascal (1623–1662), ranskalainen matemaatikko ja filosofi.

1.7 Differentiaaliyhtälöryhmistä

Differentiaaliyhtälöryhmässä on yleensä yhtä monta yhtälöä ja tuntematonta funktiota. Tällaisia yhtälöryhmiä voidaan ratkaista tavanomaista eliminointia muistuttavalla menetelmällä.

Esim. 1 Valtiot X ja Y valmistautuvat sotaan toisiaan vastaan. Kummankin maan sotilasmenoja lisätään nopeudella, joka on verrannollinen vastapuolen sotilasmenoihin. Tutkimme, miten nämä menot kehittyvät ajan mukana.

Olkoot ajanhetkellä t X:n sotilasmenot $x(t)$ ja Y:n menot $y(t)$. Olkoon edelleen X:n menojen kasvun verrannollisuuskerroin $\alpha(>0)$ ja Y:n $\beta(>0)$. Tällöin on voimassa differentiaaliyhtälöpari

$$x' = \alpha y, \quad y' = \beta x.$$

Edellisestä yhtälöstä saamme $x'' = \alpha y'$, joten jälkimmäisen yhtälön perusteella $x'' = \alpha\beta x$. Tämän differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on (esim. 1.3.4)

$$x = c\mathrm{e}^{\sqrt{\alpha\beta}\,t} + d\mathrm{e}^{-\sqrt{\alpha\beta}\,t},$$

missä vakiot c ja d määräytyvät arvoille $x(0)$ ja $y(0)$ asetetuista alkuehdoista. Koska $x' = \alpha y$, on edelleen

$$y = \frac{x'}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\left(c\sqrt{\alpha\beta}\mathrm{e}^{\sqrt{\alpha\beta}\,t} - d\sqrt{\alpha\beta}\mathrm{e}^{-\sqrt{\alpha\beta}\,t}\right) = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\left(c\mathrm{e}^{\sqrt{\alpha\beta}\,t} - d\mathrm{e}^{-\sqrt{\alpha\beta}\,t}\right).$$

Suurilla t:n arvoilla on

$$x \approx c\mathrm{e}^{\sqrt{\alpha\beta}\,t}, \quad y \approx \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,c\mathrm{e}^{\sqrt{\alpha\beta}\,t}$$

(miksi?), joten kummankin valtion sotilasmenot kasvavat suunnilleen eksponentiaalisesti. Tämän mallin mukainen toiminta johtaa siis sellaiseen varustelukierteeseen, jota minkään maan talous ei ajan mittaan kestä.

Olkoon differentiaaliyhtälöparilla $x' = f(x, y, t)$, $y' = g(x, y, t)$ ratkaisu $x = x(t)$, $y = y(t)$. Se käyrä, jolla on tämä parametriesitys, on differentiaaliyhtälöparin *faasikäyrä*. Kolmen differentiaaliyhtälön ja kolmen tuntemattoman funktion ryhmän faasikäyrä määritellään vastaavasti avaruuden käyränä. Faasikäyrän tangenttivektorit ”nähdään” yhtälöryhmästä sitä ratkaisematta.

Esim. 2 Ratkaisemme differentiaaliyhtälöparin

$$x' + y = 0, \quad y' - x = 0$$

alkuehdoilla $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. Edellisestä yhtälöstä saamme $x'' + y' = 0$, joten jälkimmäisen yhtälön perusteella $x'' + x = 0$. Tämän differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on (esim. 1.3.3) $x = c\cos t + d\sin t$. Edelleen $y = -x' = c\sin t - d\cos t$. Koska $x(0) = c$ ja $y(0) = -d$, on alkuehtojen perusteella $c = 1$ ja $d = 0$. Siis kysytty ratkaisu on $x = \cos t$, $y = \sin t$, ja vastaava faasikäyrä on origokeskinen yksikköympyrä.

Harjoitustehtäviä

34. Saarella on petoja ja saaliseläimiä. Saaliit syövät vain ruohoa, jota saarella riittää. Pedot syövät vain saaliita. Pienellä aikavälillä petojen ja saaliiden lukumäärät muuttuvat likimain seuraavasti. Petoja syntyy määrä, joka on verrannollinen petojen ja saaliiden määriin aikavälin alussa sekä aikavälin pituuteen. Petoja kuolee määrä, joka on verrannollinen petojen määrään aikavälin alussa ja aikavälin pituuteen. Saaliita syntyy määrä, joka on verrannollinen saaliiden määrään aikavälin alussa ja aikavälin pituuteen. Saaliita kuolee määrä, joka on verrannollinen saaliiden ja petojen määriin aikavälin alussa sekä aikavälin pituuteen. Muodosta se differentiaaliyhtälöpari, jota petojen ja saaliiden lukumäärät ajan funktiona noudattavat.

35. Todista: **a)** Differentiaaliyhtälöryhmän

$$x' = y - z, \quad y' = z - x, \quad z' = x - y$$

faasikäyrät ovat yhdensuuntaisissa tasoissa. (Faasikäyriä on olemassa, sillä tämä ryhmä voidaan ratkaista. Ratkaisumenetelmistä ks. esim. [2], [18], [19].) **b)** Jokaisen faasikäyrän jokainen tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteen paikkavektoria vastaan.

2 Mekaniikkaa

Klassinen mekaniikka on oppi liikkeistä ja niiden syistä. Sen tärkeimmät osat ovat *statiikka*, *kinematiikka* ja *dynamiikka*. Statiikassa tutkitaan ”liikkumattomuutta” eli tasapainoa. Kinematiikassa tutkitaan ”liikkeitä sinänsä” kiinnittämättä huomiota niiden syihin. Dynamiikassa tutkitaan liikkeiden syitä. Koska nopeuden käsite on keskeinen kinematiikassa ja dynamiikassa, nämä mekaniikan alat ovat merkittäviä differentiaali- ja integraalilaskennan sovelluskohteita. Erityisesti differentiaaliyhtälöillä on tärkeä merkitys.

2.1 Nopeus ja kiihtyvyys

Tarkastelemme aluksi kappaletta, joka liikkuu pitkin x-akselia. Puhuessamme kappaleesta tms. tarkoitamme usein ”massapistettä”. Olkoon $x = x(t)$ sen paikka ajanhetkellä t. Kappaleen *keskinopeus aikavälillä* $[t, t + \Delta t]$ on erotusosamäärä

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Kappaleen *nopeus* $v = v(t)$ *ajanhetkellä* t on tämän erotusosamäärän raja-arvo, kun $\Delta t \to 0$. Siis

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t)$$

eli

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

Kappaleen *keskikiihtyvyys aikavälillä* $[t, t + \Delta t]$ on ”nopeuden muutoksen keskinopeus” eli erotusosamäärä

$$\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Kappaleen ”nopeuden muutosnopeus” eli *kiihtyvyys* $a = a(t)$ *ajanhetkellä* t on tämän erotusosamäärän raja-arvo, kun $\Delta t \to 0$. Siis

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = x''(t)$$

eli

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}.$$

Nopeutta ja kiihtyvyyttä voidaan pitää tässä paitsi skalaareina myös yksiulotteisina vektoreina. Niille ei kuitenkaan tarvitse silloin käyttää vektorimerkintää, koska mahdollisia suuntia on vain kaksi, ja vastakkainen suunta voidaan ilmoittaa miinusmerkillä.

Määritelläksemme tasossa tai avaruudessa tapahtuvan liikkeen nopeuden ja kiihtyvyyden meidän tarvitsee vain korvata paikkakoordinaatti (tai paikkavektori) $x(t)$ paikkavektorilla $\mathbf{r}(t)$. Olkoon siis $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ kappaleen paikkavektori ajanhetkellä t. Tällöin kappaleen keskinopeus aikavälillä $[t, t + \Delta t]$ on

$$\frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t},$$

ja nopeus ajanhetkellä t on

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \mathbf{r}'(t)$$

eli

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}.$$

Keskikiihtyvyys aikavälillä $[t, t + \Delta t]$ on

$$\frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t},$$

ja kiihtyvyys ajanhetkellä t on

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$$

eli

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}.$$

Yhtälöstä $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ näkyy, missä kappale on milläkin ajanhetkellä. Tämän yhtälön kuvaaja on kappaleen *rata*. Komponenttimuodosta

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

saamme radan parametriesityksen

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$$

Nopeusvektori

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

on aina radan tangentin suuntainen. Kiihtyvyysvektori

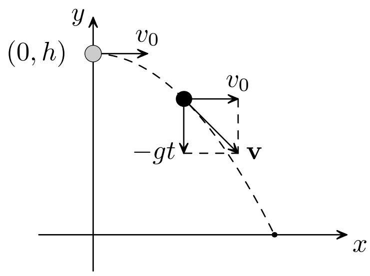
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)).$$

Nopeusvektorin pituus

$$|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

on kappaleen *ratanopeus* eli *vauhti*. Pidämme kuitenkin luvallisena puhua nopeudesta silloinkin, kun oikeastaan olisi puhuttava vauhdista.

Esim. 1 Kappale heitetään korkeudelta h vaakasuoraan nopeudella v_0 (> 0). Valitaan xy-koordinaatisto niin, että positiivinen y-akseli osoittaa ylöspäin ja heitto tapahtuu pisteestä $(0, h)$ positiivisen x-akselin suuntaan. **a)** Johda kappaleen radan yhtälö i) vektori- ja parametrimuodossa, ii) muodossa $y = f(x)$. **b)** Määritä kappaleen i) nopeus, ii) kiihtyvyys, iii) vauhti annetulla ajanhetkellä heiton aikana. Ilmanvastusta ei oteta huomioon.



a) i) Ajan $t\,(\geq 0)$ kuluttua heittohetkestä (mutta heiton aikana) kappale on alkunopeuden takia liikkunut x-akselin suunnassa matkan $v_0 t$ mutta samalla pudonnut matkan $\frac{1}{2}gt^2$, missä g on painovoiman kiihtyvyys. Kappale on tällöin pisteessä $\left(v_0 t, h - \frac{1}{2}gt^2\right)$. Täytyy olla $h - \frac{1}{2}gt^2 \geq 0$, joten

$$0 \leq t \leq \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Siis radan yhtälö on vektorimuodossa

$$\mathbf{r}(t) = \left(v_0 t,\ h - \tfrac{1}{2}gt^2\right)$$

ja parametrimuodossa

$$x(t) = v_0 t, \quad y(t) = h - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

missä t toteuttaa edellä mainitun epäyhtälön.

ii) Koska $x = v_0 t$, on $t = x/v_0$, jonka sijoittamalla yhtälöön $y = h - \frac{1}{2}gt^2$ saamme

$$y = h - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2} = h - \frac{g}{2v_0^2}x^2,$$

missä

$$0 \leq x \leq v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Rata on siis erään paraabelin kaari, ks. edellisen sivun kuvio.

b) i) Nopeus

$$\mathbf{r}'(t) = \left(\frac{\mathrm{d}(v_0 t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(h - \tfrac{1}{2}gt^2\big)\right) = (v_0, -gt)$$

eli

$$x'(t) = v_0, \quad y'(t) = -gt.$$

ii) Kiihtyvyys

$$\mathbf{r}''(t) = \left(\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}(-gt)}{\mathrm{d}t}\right) = (0, -g)$$

eli

$$x''(t) = 0, \quad y''(t) = -g.$$

iii) Vauhti

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}.$$

Se on suurimmillaan kun $t = \sqrt{2h/g}$, ja sen suurin arvo on

$$v_{\max} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Tällä vauhdilla kappale törmää maahan.

Harjoitustehtäviä

36. Henkilö lähtee kävelemään lyhtypylvään vierestä suoraan poispäin tasaisella nopeudella v. Millä nopeudella hänen varjonsa kasvaa, kun hänen pituutensa on a, lampun korkeus pylväässä on b ja $a < b$?

37. Kappale liikkuu pitkin positiivista x-akselia nopeudella, joka on kääntäen verrannollinen kappaleen etäisyyteen origosta. Ajanhetkellä $t = 0$ kappaleen paikka $x = 2$ ja nopeus $v = 1$. Määritä kappaleen paikka ajan funktiona.

38. Hoylen[1] tieteisromaanissa [6] Aurinkokuntaa lähestyy suuri kaasupilvi, joka uhkaa peittää Auringon ja siten tuhota elämän Maasta. Viimeisen kuukauden aikana pilven kulmaläpimitan (eli sen kulman, jossa pilvi näkyy) oli havaittu kasvaneen 5 %. Tällä perusteella tiedemies nimeltä Weichart esittää seuraavan laskelman.

Olkoon ajanhetkellä t pilven kulmaläpimitta $\alpha = \alpha(t)$ (radiaania) ja etäisyys meistä $e = e(t)$. Oletetaan, että pilven halkaisija d ja nopeus v ovat vakioita. Koska d on paljon pienempi kuin e, yhtälö

$$\alpha = \frac{d}{e}$$

on likimäärin voimassa. Derivoimalla saadaan

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{d}{e^2}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}.$$

Koska

$$v = -\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t},$$

on siis

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{d}{e^2}v.$$

Olkoon T se aika, jonka kuluttua pilvi saavuttaa Auringon. Tällöin

$$\frac{e}{v} = T.$$

Eliminoimalla v kahdesta edellisestä yhtälöstä saadaan

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{d}{eT},$$

joten

$$T = \frac{d}{e}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha} = \alpha\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha}.$$

Kun $\Delta t = 1$ (kuukautta), on $\Delta\alpha = 0,05\alpha$. Nyt

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha} \approx \frac{\Delta t}{\Delta\alpha} = \frac{1}{0,05\alpha} = \frac{20}{\alpha}$$

ja edelleen

$$T \approx \alpha \cdot \frac{20}{\alpha} = 20,$$

joten kysytty aika on noin 20 kuukautta.

Kirjassa Weichart (Hoyle) on tyytyväinen päättelyynsä, mutta T voidaan laskea paljon yksinkertaisemmin käyttämättä derivaattaa. Miten?

[1] Fred Hoyle (1915–2001), brittiläinen tähtitieteilijä.

39. **a)** Kertaa kulmanopeuden käsite. **b)** Origosta alkava puolisuora l, joka alunperin oli positiivinen x-akseli, kiertyy origon ympäri kulmanopeudella $\omega > 0$. Samalla kappale, joka alunperin oli origossa, liikkuu l:ää pitkin tasaisella nopeudella u (l:n suhteen). Laske tämän kappaleen i) nopeus, ii) kiihtyvyys, iii) vauhti ajan funktiona.

40. Kappaleen paikkavektori ajan t funktiona on

$$\mathbf{r}(t) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t, ut)\,,$$

missä $R\,(>0)$ $\omega\,(\neq 0)$ ja $u\,(\neq 0)$ ovat vakioita. **a)** Laske tämän kappaleen i) nopeus, ii) kiihtyvyys ajan funktiona, iii) radan projektiot koordinaattitasoissa. **b)** Miksi kappaleen rata on nimeltään *ruuviviiva*?

41. Retkikunta lähtee vuodenvaihteessa Etelänavalta ja suuntaa kulkunsa joka hetki kohti Aurinkoa tasaisella vauhdilla v. Missä se on vuorokauden kuluttua? Maan pallonmuotoisuutta ei oteta huomioon eli oletetaan, että Maa on ”pannukakku” (Miksi näin voidaan tehdä?)

⋆**42.** Polkupyörän renkaan kumiin tarttuu hiekanjyvä. Laske sen **a)** nopeus, **b)** kiihtyvyys ajan funktiona, kun pyöräilijä ajaa tasaisella nopeudella u ja renkaan säde on r.

⋆**43.** Muurahainen lähtee kävelemään pitkin yhden metrin pituista kuminauhaa sen toisesta päästä nopeudella 0,01 m/s (nauhan suhteen). Samalla nauhaa aletaan venyttää niin, että sen pituus kasvaa nopeudella 1 m/s. **a)** Minkä ajan kuluttua muurahainen pääsee perille **b)** Kuinka pitkä nauha on silloin? Vrt. [5], teht. 170.

⋆**44.** Petolintu lentää 50 m korkeudella ja havaitsee suoraan alapuolellaan saaliin. Se lähtee hyökkäämään tasaisella vauhdilla v kohti saalista, joka alkaa paeta nopeudella 10 m/s kohti 100 m päässä olevaa pesäänsä. Mikä on pienin v, jolla lintu tavoittaa saaliin? Ohje: Sijoita linnun lähtöpaikka origoon ja saalis juoksemaan pisteestä (50,0) alkaen kohti pisteessä (50,100) sijaitsevaa pesää.

2.2 Newtonin liikelait. Impulssiperiaate

Klassinen mekaniikka perustuu *Newtonin (liike)lakeihin*, jotka esitämme pian. Se ja *klassinen sähköoppi*, jota emme käsittele tässä kirjassa, selittävät hyvin kaikki ”tavanomaista suuruusluokkaa” olevat mekaniikan ja sähköopin ilmiöt. Kuitenkaan klassinen mekaniikka ja sähköoppi eivät selitä kunnolla ”erittäin pientä suuruusluokkaa” olevia atomi- ja hiukkastason ilmiöitä, vaan silloin tarvitaan *kvanttimekaniikkaa*. Ne eivät myöskään selitä kunnolla ”erittäin suurta suuruusluokkaa” olevia tähtitieteen mittakaavassa tapahtuvia ilmiöitä, vaan silloin tarvitaan *suhteellisuusteoriaa*.

Kappale on *vapaa*, jos se ei ole vuorovaikutuksessa muiden kappaleiden kanssa. Vapaa kappale jatkaa liikettään vakionopeudella (eli suoraviivaisesti ja vakiovauhdilla) tai pysyy liikkumatta. Tämä on *Newtonin ensimmäinen laki* eli *jatkavuuden laki*.

Kappaleen *liikemäärä* $\mathbf{p}$ on massan m ja nopeuden $\mathbf{v}$ tulo

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

Vapaan kappaleen liikemäärä on jatkavuuden lain perusteella vakio. Kappaleet muodostavat *eristetyn systeemin*, jos ne ovat vuorovaikutuksessa vain toistensa kanssa. Jatkavuuden lain yleistys on *liikemäärän säilymislaki*: Eristetyssä systeemissä kappaleiden liikemäärien summa on vakio.

Voima muuttaa liikemäärää. Kappaleeseen vaikuttava voima $\mathbf{F}$ on liikemäärän $\mathbf{p}$ muutosnopeus

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}.$$

Jos siis m on vakio, niin

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}(m\mathbf{v})}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = m\mathbf{a},$$

missä $\mathbf{a}$ on kiihtyvyys. Tämä on *Newtonin toinen laki* eli *dynamiikan peruslaki*. Voimme esittää sen myös muodossa

$$\mathbf{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2},$$

missä $\mathbf{r}$ on kappaleen paikkavektori.

Jos tiedetään, miten $\mathbf{F}$ riippuu ajasta, eli jos tunnetaan funktio $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$, niin dynamiikan peruslaista tulee kappaleen *liikeyhtälö*. Nimittäin tällöin sen tietyt alkuehdot toteuttavasta ratkaisusta $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ näkyy, missä kappale on milläkin ajanhetkellä.

Ensimmäinen laki seuraa toisesta. Jos nimittäin kappale on vapaa, niin $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, jolloin toisen lain mukaan $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, ja siis $\mathbf{v}$ on vakio. Ensimmäinen laki voitaisiin siis poistaa, mutta historiallisista syistä niin ei ole tapana tehdä.

Kahden kappaleen välinen vuorovaikutus aiheuttaa niihin (itseisarvoiltaan) yhtäsuuret ja vastakkaissuuntaiset voimat. Tämä on *Newtonin kolmas laki* eli *voiman ja vastavoiman laki.*

Tarkastelemme seuraavaksi kappaletta, johon vaikuttaa vakiovoima $\mathbf{F}$ aikavälillä $[t, t + \Delta t]$. Voiman $\mathbf{F}$ ”kokonaisvaikutus” kappaleeseen eli tämän voiman *impulssi* saadaan kertomalla voima aikavälin pituudella

$$\mathbf{I} = \mathbf{F}\Delta t.$$

Olkoon $\Delta\mathbf{p}$ liikemäärän muutos tällä aikavälillä. Koska $\mathbf{F}$ on vakio, $\mathbf{p}$ on enintään ensimmäisen asteen polynomi t:n suhteen (eli $\mathbf{p}$:n komponentit ovat tällaisia polynomeja). Siksi

$$\frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t} = \mathbf{F}$$

ja edelleen

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{F}\Delta t.$$

Merkitsemällä nämä $\mathbf{F}\Delta t$:n lausekkeet yhtäsuuriksi huomaamme, että on voimassa *impulssiperiaate*

$$\mathbf{I} = \Delta\mathbf{p}.$$

Siis impulssi on sama kuin liikemäärän muutos.

Merkitsemme vektorisuureiden $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{F}$ ja $\mathbf{I}$ itseisarvoja poistamalla lihavoinnit eli kirjoittamalla v, a, p, F ja I. Huomautimme jo (s. 26) siitä, että puhumme usein nopeudesta vaikka tarkoitamme vauhtia. Samoin puhumme usein kiihtyvyydestä, liikemäärästä, voimasta ja impulssista, vaikka tarkoitamme näiden vektorien itseisarvoja eli kiihtyvyyden ym. ”suuruuksia”.

Laajennamme vielä impulssin määritelmän tapaukseen, jossa $\mathbf{F}$ ei ole vakio (vaan riippuu t:stä). Olkoon tarkasteltava aikaväli $[t_1, t_2]$. Jos Δt on pieni, niin $\mathbf{F}$ on aikavälillä $[t, t + \Delta t]$ likimäärin vakio, jonka impulssi on $\mathbf{F}(t)\Delta t$. Siksi voimme ajatella, että $\mathbf{F}$:n impulssi aikavälillä $[t_1, t_2]$ on kaikkien ”impulssialkioiden”

$$\mathrm{d}\mathbf{I} = \mathbf{F}(t)\mathrm{d}t$$

”summa” yli välin $[t_1, t_2]$ eli integraali

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\mathrm{d}t.$$

(Määrittelemme vektorifunktion integraalifunktion ja määrätyn integraalin integroimalla komponenteittain, vrt. vektorifunktion derivaatan määritelmä s. 12. Koska käytämme derivaatalle enimmäkseeen Leibnizin[1] merkintää, jossa funktion muuttujaa ei kirjoiteta näkyviin, on johdonmukaista menetellä vastaavasti integraalin kohdalla eli jättää funktion $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ muuttuja kirjoittamatta.)

Jos $\mathbf{v}_1$ kappaleen nopeus ajanhetkellä t_1 ja $\mathbf{v}_2$ nopeus hetkellä t_2, niin voimme kirjoittaa impulssiperiaatteen muotoon

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \mathrm{d}t = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1.$$

Esim. 1 Galilei[2] osoitti kokeellisesti, että kaikki kappaleet putoavat kiihtyvyydellä $g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$, kun ilmanvastusta ei oteta huomioon. (Merkintä $g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$ tarkoittaa, että kyseessä on g:n kolminumeroinen likiarvo. Menettelemme vastaavasti muuallakin. Siis käytämme yhtäsuuruusmerkkiä tarkoittamaan, että tulos on oikein siinä olevalla tarkkuudella.) Siis Maa vaikuttaa kappaleeseen voimalla, jonka suuruus on $G = mg$, kun m on kappaleen massa. Vastaava vektoriyhtälö on $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$, missä kummankin vektorin suunta on pystysuoraan alaspäin. ”Yksiulotteisessa tapauksessa” emme yleensä lihavoi vektoreita, vaan kirjoitamme tämän vektoriyhtälön muodossa $G = mg$ tai $G = -mg$ sen mukaan, kumpi pystysuoran suoran suunta valitaan positiiviseksi.

Kokeellisesti on todettu, että kun putoavan kappaleen nopeus on melko pieni, ilmanvastus on likimäärin verrannollinen nopeuteen. Suuremmilla nopeuksilla se on likimäärin verrannollinen nopeuden korkeampaan potenssiin, sitä korkeampaan mitä suurempi nopeus on.

Esim. 2 Määritä putoavan kappaleen **a)** nopeus, **b)** kulkema matka annetulla hetkellä putoamisen aikana. Oletetaan, että ilmanvastus on verrannollinen nopeuteen.

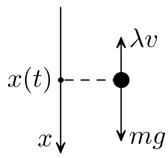
a) Olkoon kappaleen massa m ja verrannollisuuskerroin λ. Nopeus v ei voi kasvaa mielivaltaisen suureksi, koska tarpeeksi suurella v:n arvolla ilmanvastus kumoaa kappaleeseen vaikuttavan painovoiman. Siis on olemassa rajanopeus w, jota v ei ylitä, ja jolloin ilmanvastus on sama kuin kappaleeseen vaikuttava painovoima. Toisin sanoen $\lambda w = mg$, josta

$$\lambda = \frac{mg}{w}.$$

[1]Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), saksalainen matemaatikko ja filosofi.
[2]Galileo Galilei (1564–1642), italialainen fyysikko.

Rajanopeus w riippuu kappaleen muodosta. Esimerkiksi avautuneelle laskuvarjolle se on pienempi kuin pakatulle laskuvarjolle. Rajanopeus voidaan määrittää kokeellisesti tuulitunnelissa.

Suuntaamme x-akselin pystysuoraan alaspäin ja ajattelemme, että kappale putoaa sitä pitkin. Valitsemme origoksi sen pisteen, jossa kappale oli alunperin. Tällöin $x(0) = 0$ ja $v(0) = 0$.



Kappaleeseen vaikuttaa voima

$$F = mg - \lambda v = mg - \frac{mg}{w}v = mg\frac{w-v}{w},$$

mutta toisaalta dynamiikan peruslain mukaan

$$F = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Merkitsemällä nämä F:n lausekkeet yhtäsuuriksi ja jakamalla m:llä saamme differentiaaliyhtälön

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g\frac{w-v}{w},$$

josta erottamalla muuttujat

$$\frac{\mathrm{d}v}{w-v} = \frac{g}{w}\mathrm{d}t$$

ja edelleen integroimalla

$$-\ln(w-v) = \frac{gt}{w} + k,$$

missä k on integroimisvakio. Näin ollen

$$w - v = \mathrm{e}^{-\frac{gt}{w}-k} = \mathrm{e}^{-k}\mathrm{e}^{-\frac{gt}{w}} = c\mathrm{e}^{-\frac{gt}{w}},$$

missä $c = \mathrm{e}^{-k}$. Differentiaaliyhtälömme yleinen ratkaisu on siis

$$v = w - c\mathrm{e}^{-\frac{gt}{w}}.$$

Alkuehdon $v(0) = 0$ perusteella $c = w$, joten

$$v = w\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{gt}{w}}\right).$$

Todellakin w on rajanopeus, sillä $v \to w$, kun $t \to \infty$ (miksi?). Kuitenkaan t ei voi kasvaa rajattomasti, koska kappale putoaa aikanaan maahan.

b) Kysytty matka

$$x = \int w\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{gt}{w}}\right) \mathrm{d}t = wt + \frac{w^2}{g}\mathrm{e}^{-\frac{gt}{w}} + c,$$

missä integroimisvakio c määräytyy alkuehdosta $x(0) = 0$. Saamme $c = -w^2/g$, joten

$$x = wt - \frac{w^2}{g}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{gt}{w}}\right).$$

Esim. 3 Raketti, jonka massasta 80 % on polttoainetta, ammutaan suoraan ylöspäin. Polttoaine palaa ja virtaa kaasuna ulos raketista tämän suhteen nopeudella $u = 2500$ m/s. Polttoaine palaa loppuun ajassa $T = 60$ s. Laske raketin nopeus tämän ajan kuluttua. Ilmanvastusta ei oteta huomioon.

Valitsemme positiiviseksi suunnaksi raketin liikesuunnan. Laskemme aluksi raketin liikemäärän muutoksen aikavälillä $[t, t + \Delta\, t]$. Olkoot m ja w raketin massa ja nopeus hetkellä t, ja olkoot $m + \Delta m$ ja $w + \Delta w$ nämä suureet hetkellä $t + \Delta t$. Koska $\Delta m < 0$, raketista poistuu massa $-\Delta m$ nopeudella $w - u$ Maan suhteen. Raketin ja siitä poistuneen osan kokonaisliikemäärä hetkellä $t + \Delta t$ on

$$\begin{aligned}
&(m + \Delta m)(w + \Delta w) + (-\Delta m)(w - u) = \\
&mw + m\Delta w + w\Delta m + \Delta m\Delta w - w\Delta m + u\Delta m = \\
&mw + m\Delta w + \Delta m\Delta w + u\Delta m \approx mw + m\Delta w + u\Delta m.
\end{aligned}$$

(Miksi $\Delta m\Delta w$ voidaan poistaa?) Hetkellä t tämä liikemäärä on mw, joten liikemäärien erotus on $m\Delta w + u\Delta m$. Koska tällä aikavälillä rakettiin vaikuttaa voima $F \approx -mg$, impulssiperiaatteen mukaan

$$m\Delta w + u\Delta m \approx -mg\Delta t$$

sitä tarkemmin mitä pienempi Δt on. ”Differentiaaleille” on siis voimassa yhtälö

$$m\mathrm{d}w + u\mathrm{d}m = -mg\mathrm{d}t$$

eli

$$\mathrm{d}w = -u\frac{\mathrm{d}m}{m} - g\mathrm{d}t.$$

Olkoon raketin alkuperäinen massa polttoaineineen m_0 ja kysytty nopeus v. Aikavälillä $[0, T]$ massa vähenee m_0:sta $m_0/5$:een ja nopeus kasvaa 0:sta v:hen, joten

$$\int_0^v \mathrm{d}w = -u \int_{m_0}^{\frac{m_0}{5}} \frac{\mathrm{d}m}{m} - \int_0^T g\mathrm{d}t.$$

Integroimalla saamme

$$v = u \ln 5 - gT.$$

Kun vielä sijoitamme $u = 2500$ m/s ja $T = 60$ s, tulee vastaukseksi 3400 m/s.

Harjoitustehtäviä

45. Kappale heitetään maanpinnnan tasosta kulmassa α nopeudella v_0. Ilmanvastusta ei oteta huomioon. Johda tämän kappaleen radan yhtälö valitsemalla koordinaatisto sopivasti. Vrt. esim. 2.1.1.

46. Ohutta ketjua pidetään niin, että sen toinen pää on suorana pöydällä kohtisuorassa pöydän reunaa vastaan ja toinen riippuu pöydän ulkopuolella. Ketjun pituus on a ja riippuvan osan pituus b. Ketju päästetään liukumaan. Kitkaa ei oteta huomioon. Määritä tämän ketjun liukumisnopeus annetulla hetkellä liukumisen aikana.

$\star$**47.** Ohut ketju ripustetaan kiinnittämällä sen päät yhtä korkealle (niin, että kiinnityspisteiden välimatka on pienempi kuin ketjun pituus). Johda ketjun muodostaman käyränkaaren yhtälö valitsemalla koordinaatisto sopivasti. Ohje: Ketjun kuhunkin pisteeseen vaikuttaa jännitys, joka on tähän pisteeseen asetetun tangentin suuntainen.

48. Käsittele esimerkki 2 vaihtamalla x-akselin suunta.

$\star$**49.** Kappale heitetään maanpinnnan tasosta kulmassa α nopeudella v_0. Ilmanvastus oletetaan verrannolliseksi nopeuteen verrannollisuuskertoimella λ. Valitsemalla xy-koordinaatisto sopivasti johda kappaleen ratana olevan *ballistisen käyrän* yhtälö **a)** parametrimuodossa $x = x(t)$, $y = y(t)$, missä t on heittohetkestä kulunut aika, **b)** muodossa $y = f(x)$. Vrt. esim. 2.1.1 ja teht. 45.

50. Jatkoa esimerkkiin 3. Laske raketin keskikiihtyvyys laukaisua seuranneen ensimmäisen sekunnin aikana.

51. Jatkoa esimerkkiin 3. Kuinka suuren osan raketin alkuperäisestä massasta pitää olla polttoainetta, jotta raketti pääsisi pois Maan vetovoimakentästä? Lähtönopeuden täytyy silloin olla vähintään 11,2 km/s (teht. 62 a).

2.3 Työ. Energiaperiaate

Tarkastelemme aluksi kappaletta, joka on vaakasuoralla alustalla ja johon vaikuttaa alustan suuntainen vakiovoima, suuruudeltaan (eli itseisarvoltaan) F. Jos kappale liikkuu tämän voiman suuntaan matkan s, niin *voiman F tekemä työ* on

$$W = Fs.$$

Jos taas kappale liikkuu vastakkaiseen suuntaan matkan s, niin $W = Fs$ on *voimaa F vastaan tehty työ*. Tällöin sanomme, että voiman F tekemä työ on sen vastaluku

$$W = -Fs.$$

Esim. 1 Kappale nostetaan maan pinnalta korkeudelle h. Siihen vaikuttava painovoima $G = -mg$ (miinusmerkki tarvitaan, koska liikkeen suunta on ylöspäin) on tällöin kumottava voimalla $F = mg$. Voiman F tekemä eli voimaa G vastaan tehty työ $W = mgh$. Voimme ajatella että tämä työ on ”varastoitunut” kappaleeseen *potentaalienergiana* $U = mgh$ (maanpinnan suhteen). Tällöin kappaleella on *sijaintinsa perusteella* kyky tehdä työtä U:n verran.

(Oikeastaan kappale ei tee työtä vaan voima, mutta pidämme luvallisena käyttää myös tätä havainnollista puhetapaa. Aivan tarkkaan ottaen, koska voimat ovat vuorovaikutuksia, meidän pitäisi puhua vuorovaikutuksessa olevien kappaleiden yhteisesti muodostaman voimakentän työstä. Kuitenkin tässä esimerkissä, kuten muuallakin tässä kirjassa, kappaleen vaikutus Maahan on merkityksetön, joten voimme jättää sen huomiotta.)

Tarkastelemme nyt tapausta, jossa voima ja liike voivat olla erisuuntaisia. Kappale, johon vaikuttaa vakiovoima $\mathbf{F}$ ($\neq \mathbf{0}$), siirtyy vektorin $\mathbf{s}$ ($\neq \mathbf{0}$) verran. Olkoon $\mathbf{F}$:n ja $\mathbf{s}$:n välinen kulma α. Tällöin se voima $\mathbf{F_s}$, joka tekee työtä tai jota vastaan tehdään työtä, on $\mathbf{F}$:n (vektori)projektio $\mathbf{s}$:n määräämällä suoralla. Koska

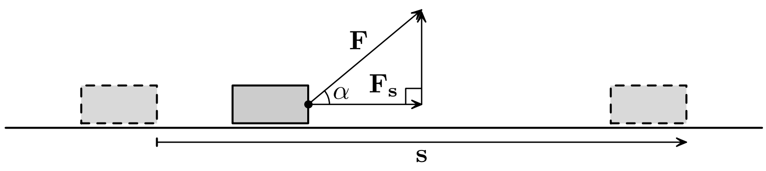
$$\mathbf{F_s} = |\mathbf{F}| \cos\alpha \, \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} = \frac{|\mathbf{F}||\mathbf{s}| \cos\alpha}{|\mathbf{s}|^2} \, \mathbf{s} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}}{|\mathbf{s}|^2} \, \mathbf{s},$$

on

$$|\mathbf{F_s}||\mathbf{s}| = \frac{|\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|^2} \, |\mathbf{s}|^2 = |\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}|.$$

Täten $|\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}|$ on $\mathbf{F_s}$:n tekemä työ, jos $\mathbf{F_s}$ ja $\mathbf{s}$ ovat samansuuntaiset, ja $\mathbf{F_s}$:ää vastaan tehty työ, jos nämä voimat ovat vastakkaissuuntaiset.

Edellinen vaihtoehto tapahtuu, kun $0 \leq \alpha < 90°$, jolloin kyseessä on $\mathbf{F_s}$:n tekemä työ. Tällöin $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s} > 0$, joten $|\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}| = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$. Jälkimmäinen vaihtoehto taas tapahtuu, kun $90° < \alpha \leq 180°$, jolloin kyseessä on $\mathbf{F_s}$:ää vastaan tehty työ. Tällöin $\mathbf{F}\cdot\mathbf{s} < 0$, joten $|\mathbf{F}\cdot\mathbf{s}| = -\mathbf{F}\cdot\mathbf{s}$. Sen vastaluku $\mathbf{F}\cdot\mathbf{s}$ on $\mathbf{F}$:n tekemä työ. Siis kummassakin tapauksessa $\mathbf{F}\cdot\mathbf{s}$ on $\mathbf{F}$:n tekemä työ. (Mitä voidaan sanoa tapauksesta $\alpha = 90°$?)



Määrittelemme siis, että jos kappale, johon vaikuttaa vakiovoima $\mathbf{F}$, siirtyy vektorin $\mathbf{s}$ verran, niin voiman $\mathbf{F}$ tekemä työ

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s}.$$

Tämä määritelmä kattaa myös tapaukset $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ja $\mathbf{s} = \mathbf{0}$, jolloin $W = 0$.

Laajennamme nyt työn määritelmän tapaukseen, jossa $\mathbf{F}$ ei ole vakio (vaan riippuu kappaleen paikasta, jota edustaa paikkavektori $\mathbf{r}$). Olkoon kappale alunperin paikassa $\mathbf{r}_1$ ja liikkeen jälkeen paikassa $\mathbf{r}_2$, jolloin $\mathbf{s} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Jos $|\Delta\mathbf{r}|$ on pieni, niin $\mathbf{F}$ on (suunta)janalla $[\mathbf{r}, \mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}]$ likimäärin vakio, jonka tekemä työ kappaleen liikkuessa tämän janan alkupisteestä loppupisteeseen on $\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\Delta\mathbf{r}$. Siksi voimme ajatella, että $\mathbf{F}$:n tekemä työ kappaleeen liikkuessa (suunta)janan $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$ alkupisteestä loppupisteeseen on kaikkien ”työalkioiden”

$$\mathrm{d}W = \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$$

”summa” yli janan $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$ eli integraali

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\mathrm{d}W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Katsomme, miten oikeanpuolinen integraali voidaan laskea. Janan $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$ parametriesitys on $\mathbf{r}(z) = \mathbf{r}_1 + z(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$, missä parametri z käy läpi välin $[0, 1]$. Tällöin

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^1\mathbf{F}(\mathbf{r}(z))\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}(z) =$$
$$\int_0^1\mathbf{F}(\mathbf{r}(z))\cdot\mathbf{r}'(z)\mathrm{d}z = \int_0^1\mathbf{F}(\mathbf{r}(z))\cdot(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\mathrm{d}z.$$

Viimeisen integraalin integroitava on kahden vektorin skalalaaritulona skalaari, joten kyseessä on tavallinen yhden reaalimuuttujan reaalifunktion integraali.

Palaamme vielä yksiulotteiseen tapaukseen. Oletamme, että kappaleeseen vaikuttaa x-akselin kanssa yhdensuuntainen voima $F = F(x)$. Kun kappale liikkuu origosta pisteeseen $s \neq 0$, huomaamme joko yllä olevan perusteella (miten?) tai erikseen päättelemällä (miten?), että tämän voiman tekemä työ

$$W = \int_0^s F \mathrm{d}x.$$

Esim. 2 Autoa, jonka massa on m, kiihdytetään suoralla tiellä **a)** tasaisella, **b)** mielivaltaisella kiihtyvyydellä levosta nopeuteen v. Kuinka suuren työn kiihdyttävä voima tekee?

a) Olkoon auton nopeus $u = u(t)$ ja kiihtyvyys a. Koska kiihdyttävä voima $F = ma$, "työalkio"

$$\mathrm{d}W = F\mathrm{d}x = ma\mathrm{d}x = m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x = m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}u = mu\mathrm{d}u,$$

joten kysytty työ

$$W = \int_0^v \mathrm{d}W = \int_0^v mu\mathrm{d}u = \Big/_0^v \tfrac{1}{2}mu^2 = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

b) Sillä, että a on vakio, ei ole a-kohdassa merkitystä. Nimittäin kaikki laskut ovat samat silloinkin, kun $a = a(t)$, joten nytkin $W = \frac{1}{2}mv^2$. Tämä työ ei siis riipu siitä, millä tavalla autoilija painaa kaasupoljinta.

Voimme ajatella että autoa kiihdyttävän voiman F tekemä työ on "varastoitunut" autoon *liike-energiaksi* $T = \frac{1}{2}mv^2$. Tällöin autolla on *liiketilansa perusteella* kyky tehdä työtä T:n verran.

Laajennamme nyt esimerkin 2 näkökulmaa. Tarkastelemme aluksi yksiulotteista tapausta. Olkoon kappale ajanhetkellä t_1 pisteessä x_1, jolloin sen nopeus on v_1. Oletamme, että tämä kappale siirtyy pisteeseen x_2, jossa se on ajanhetkellä t_2, ja sen nopeus on v_2. Olkoot $v = v(t)$ ja $a = a(t)$ kappaleen nopeus ja kiihtyvyys hetkellä t. Voiman $F = F(x)$ tekemä työ

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} ma\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x = \int_{v_1}^{v_2} m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}v =$$
$$\int_{v_1}^{v_2} mv\mathrm{d}v = \Big/_{v_1}^{v_2} \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 = T_2 - T_1,$$

missä T_1 on kappaleen liike-energia pisteessä x_1 ja T_2 pisteessä x_2. Merkitsemällä $\Delta T = T_2 - T_1$ huomaamme, että on voimassa *energiaperiaate*

$$W = \Delta T.$$

Siis liikuttavan voiman tekemä työ on sama kuin liike-energian muutos. Voimme kirjoittaa energiaperiaatteen myös muotoon

$$\int_{x_1}^{x_2} F \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$

ja kolmessa dimensiossa vastaavasti muotoon

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_2|^2 - \tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_1|^2.$$

Vertaa toisiinsa impulssi- ja energiaperiaatetta. Mitä yhtäläisyyksiä löydät?

Huomasimme esimerkissä 1, että jos massaltaan m oleva kappale nostetaan korkeudelle h, niin se saa (maan pinnan suhteen) potentiaalienergian $U(h) = mgh$. Tutkimme nyt, mitä tapahtuu, kun tämä kappale pudotetaan tuolta korkeudelta eikä ilmanvastusta oteta huomioon. Kun kappale on pudonnut korkeudelle x $(0 < x < h)$, sillä on jäljellä potentiaalienergiaa $U(x) = mgx$. Menetetty potentiaalienergia

$$U(h) - U(x) = mgh - mgx = \int_h^x (-mg)\mathrm{d}u$$

muuttuu liike-energiaksi, sillä energiaperiaatteen mukaan

$$\int_h^x (-mg)\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}mv^2 - 0 = \tfrac{1}{2}mv^2,$$

missä v on kappaleen nopeus korkeudella x. Näin ollen $mgh - mgx = \frac{1}{2}mv^2$ eli

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mgx = mgh,$$

mistä v voidaan ratkaista. (Mikä on tulos?) Potentiaali- ja liike-energian summa siis pysyy vakiona mgh.

Saamme v:n lasketuksi myös käyttämättä energiaperiaatetta (miten?). Tällöin voimme havainnollistaa energiaperiaatteen toimivuutta osoittamalla (miten?), että $T(x) + U(x)$ on vakio.

Tarkastelemme vielä potentiaalienergian yleistä määritelmää. Rajoitumme yksiulotteiseen tapaukseen, jossa kappaleeseen vaikuttaa x-akselin kanssa yhdensuuntainen voima $F = F(x)$. Kappaleen potentiaalienergia annetun pisteen x_0 suhteen on tällöin

$$U(x) = -\int_{x_0}^x F(u)\mathrm{d}u.$$

Jos tämä kappale liikkuu pisteestä x_1 pisteeseen x_2, niin

$$U(x_2) - U(x_1) = -\int_{x_0}^{x_2} F(u)\mathrm{d}u + \int_{x_0}^{x_1} F(u)\mathrm{d}u = \int_{x_2}^{x_1} F(u)\mathrm{d}u.$$

Toisaalta energiaperiaatteen mukaan

$$\int_{x_2}^{x_1} F(u)\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}mv_1^2 - \tfrac{1}{2}mv_2^2 = T(x_1) - T(x_2),$$

missä m on kappaleen massa, v_1 nopeus pisteessä x_1 ja v_2 nopeus pisteessä x_2. Näin ollen

$$U(x_2) - U(x_1) = T(x_1) - T(x_2)$$

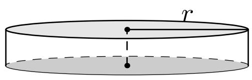
eli

$$T(x_1) + U(x_1) = T(x_2) + U(x_2).$$

Kappaleen *kokonaisenergia* on potentiaali- ja liike-energian summa. Olemme näin muotoilleet (yhden kappaleen) energiaperiaatteen (yhdessä dimensiossa) *(mekaanisen) energian säilymislakina*, jonka mukaan kappaleen kokonaisenergia on vakio.

Esim. 3 Suoran ympyrälieriön muotoinen säiliö, jonka korkeus on h, täytetään nesteellä, jonka massa on m. Kuinka suuri työ tehdään?

Olkoon lieriön pohjan säde r, tilavuus V ja nesteen tiheys ρ. Ajattelemme, että täydessä säiliössä neste koostuu lieriön muotoisista "massa-alkioista", joiden korkeus on $\mathrm{d}x$ ja tilavuus $\mathrm{d}V$.



Korkeudella x oleva "massa-alkio" on vaatinut "työalkion"

$$dW = gx\mathrm{d}m = gx\rho\mathrm{d}V = gx\rho\pi r^2\mathrm{d}x.$$

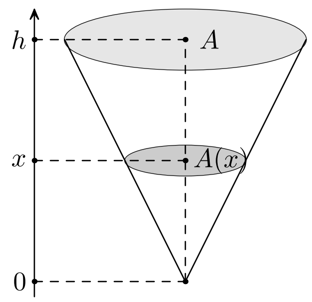
Kysytty työ on näiden "summa" eli integraali

$$W = \int_0^h \mathrm{d}W = \int_0^h gx\rho\pi r^2\mathrm{d}x = \rho\pi r^2 g\int_0^h x\mathrm{d}x =$$

$$\rho\pi r^2 g \Big/_0^h \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}\pi r^2 h^2\rho g = \tfrac{1}{2}\rho\pi r^2 hgh = \tfrac{1}{2}\rho Vgh = \tfrac{1}{2}mgh.$$

Sama työ vaaditaan, kun "massapiste", jolla on nesteen massa m, nostetaan lieriön painopisteeseen eli pohjaympyröiden keskipisteiden yhdysjanan keskipisteeseen.

Esim. 4 Kuten esimerkki 3, mutta säiliö on kärjellään seisova kartio (ei välttämättä ympyräpohjainen), jonka korkeusjana on kohtisuorassa maanpintaa vastaan ja pohjan pinta-ala on A.



Massa-alkio on muodoltaan lieriö, jonka pohjan ala on $A(x)$ ja korkeus dx. Lieriön tilavuus $\mathrm{d}V = A(x)\mathrm{d}x$, joten $\mathrm{d}m = \rho\mathrm{d}V = \rho A(x)\mathrm{d}x$, missä ρ on veden tiheys. Yhdenmuotoisista kartioista saamme

$$\frac{A(x)}{A} = \left(\frac{x}{h}\right)^2, \quad \text{ja edelleen} \quad A(x) = \frac{A}{h^2}x^2.$$

Siis työalkio

$$dW = gx\mathrm{d}m = gx\rho A(x)\mathrm{d}x = gx\rho\frac{A}{h^2}x^2\mathrm{d}x = g\rho\frac{A}{h^2}x^3\mathrm{d}x,$$

ja kysytty työ

$$W = \int_0^h \mathrm{d}W = g\rho\frac{A}{h^2}\int_0^h x^3\,\mathrm{d}x = g\rho\frac{A}{h^2}\,\tfrac{1}{4}h^4 =$$

$$\tfrac{1}{4}\,g\rho Ah^2 = \tfrac{3}{4}g\rho\left(\tfrac{1}{3}Ah\right)h = \tfrac{3}{4}g\rho Vh = \tfrac{3}{4}mgh.$$

Sama työ vaaditaan massaltaan m olevan ”massapisteen” nostamiseksi tehtävän asennossa olevan kartion painopisteeseen, joka siis on korkeudella $\frac{3}{4}h$. Jos kartio on korkeusjanansa suhteen symmetrinen, niin sen painopiste sijaitsee tällä janalla ja jakaa sen niin, että pohjan puoleisen osan ja huipun puoleisen osan pituuksien suhde on 1:4. Kuinka paljon energiaa vapautuu, kun kuvion esittämässä asennossa oleva täysi kartio kääntyy ylösalaisin korkeusjanan keskipisteen kautta asetetun vaakasuoran akselin ympäri?

Harjoitustehtäviä

52. **a)** Kuinka suuri työ tehdään, kun puolipallon muotoinen säiliö täytetään nesteellä, jonka massa on m? **b)** Määritä a-kohdan perusteella r-säteisen puolipallon painopiste.

$\star$**53.** Määritä (matemaattisen) heilurin heilahdusaika (eli ääriasennosta toiseen ja takaisin kuluva aika) energiaperiaatteen avulla. Ohje: Tuloksessa olevaa integraalia ei voida laskea tarkasti. Laske tämä integraali likimäärin olettamalla heilahduskulma niin pieneksi, että se voidaan korvata integroitavassa nollalla.

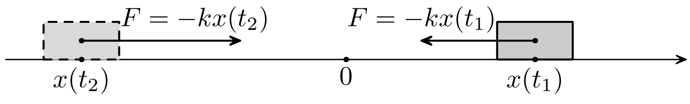
$\star$**54.** **a)** Sykloidin kaari

$$x = r(\theta - \sin\theta),\ y = r(1 - \cos\theta),\ 0 \le \theta \le \pi,$$

käännetään ylösalaisin. Johda syntyneen kaaren yhtälö. **b)** Kappale asetetaan tämän kaaren mielivaltaiseen (πr,0):sta eroavaan pisteeseen liukumaan pitkin kaarta. Painovoima vaikuttaa negatiivisen y-akselin suuntaan eikä kitkaa oteta huomioon. Osoita, että se aika, jonka kuluttua kappale on (πr,0):ssa, ei riipu siitä paikasta, josta liukuminen alkoi.

2.4 Harmoninen voima

Kappaleeseen vaikuttava voima F on *harmoninen*, jos sen suuruus on verrannollinen kappaleen etäisyyteen voiman *tasapainopisteestä* ja suunta on tasapainopistettä kohti. Tarkastelemme kappaletta, jonka massa on m ja joka liikkuu x-akselilla sellaisen harmonisen voiman vaikutuksesta, jonka tasapainopiste on origo. Jos $x = x(t)$ on kappaleen paikka ajanhetkellä t, niin tämä voima $F = -kx$, missä k (> 0) on verrannollisuuskerroin.



Dynamiikan peruslakia

$$F = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

soveltamalla saamme *harmonisen liikkeen* liikeyhtälön

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \quad \text{eli} \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Sen yleinen ratkaisu on (esim. 1.3.3)

$$x = c\cos\omega\, t + d\sin\omega\, t,$$

missä

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Olkoon kappaleen alkuperäinen paikka $A\,(>0)$, jolloin meidän on löydettävä alkuehdot $x(0) = A$ ja $x'(0) = 0$ toteuttava ratkaisu. Se saadaan valitsemalla $c = A$ ja $d = 0$ (perustele), joten tämä ratkaisu on

$$x = A\cos\omega\, t.$$

Kappale siis liikkuu jaksollisesti eli *värähtelee* välillä $[-A, A]$. Siksi tällainen kappale on nimeltään *harmoninen värähtelijä.* Luku A on värähtelyn *amplitudi.*

Valitsemme koordinaatiston niin, että t-akseli on vaakasuora ja x-akseli pystysuora. Tällöin funktion $x = x(t)$ kuvaaja on aaltoileva ”sinikäyrä”. (Miksi? Miten sen muoto riippuu ω:sta?)

Yhteen edestakaiseen värähdykseen kuluva *jaksonaika* T toteuttaa yhtälön

$$\omega\, T = 2\pi$$

(perustele), joten

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Jaksonajan käänteisluku on värähtelyn *taajuus*

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi},$$

jonka avulla esitettynä

$$x = A\cos\, 2\pi f t.$$

Palaamme vielä harmonisen liikeyhtälön yleiseen ratkaisuun

$$x = c\cos\omega\, t + d\sin\omega\, t = d\sin\omega\, t + c\cos\omega\, t.$$

Sijoittamalla

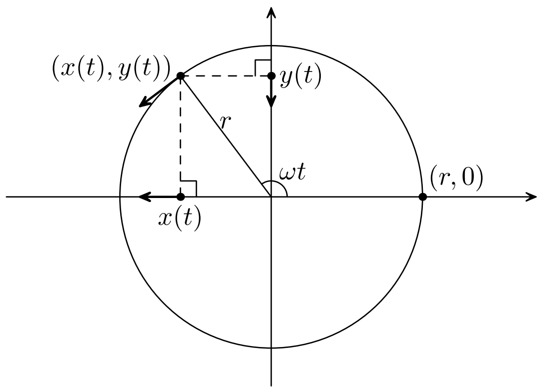
$$d = A\cos\omega\,\delta, \quad c = A\sin\omega\,\delta$$

saamme

$$x = A\sin\omega\, t\cos\omega\,\delta + A\cos\omega\, t\sin\omega\,\delta = A\sin\omega(t+\delta).$$

(Mikä merkitys on δ:lla?)

Esim. 1 Kappale lähtee ajanhetkellä $t = 0$ liikkumaan pisteestä $(r, 0)$ pitkin ympyrää $x^2 + y^2 = r^2$ tasaisella vauhdilla positiiviseen kiertosuuntaan niin, että se kiertää yhden kierroksen ajassa T. **a)** Missä kappale on ajanhetkellä t? **b)** Osoita, että sen x-akselilla oleva projektiopiste liikkuu harmonisesti. **c)** Mikä on projektiopisteen liikkeen i) amplitudi, ii) jaksonaika?



a) Kappaleen ratana olevan ympyrän $x^2 + y^2 = r^2$ yhtälö on parametrimuodossa $x = r\cos u$, $y = r\sin u$. Koska parametrin u ja ajan t välillä on yhtälö

$$u = \frac{2\pi}{T}t$$

(miksi?), kysytty piste $\mathbf{r} = (x, y)$ on

$$x = r\cos\frac{2\pi}{T}t, \quad y = r\sin\frac{2\pi}{T}t.$$

(Osoita, että $\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right|$ on vakio eli vauhti on todellakin tasaista.)

b) Yhtälö $x = r\cos\frac{2\pi}{T}t$ on muotoa $x = A\cos\omega t$, mistä väitös seuraa. (Myös kappaleen projektiopiste y-akselilla ja kaikilla muillakin origon kautta kulkevilla suorilla liikkuu harmonisesti. Miksi?)

c) i) r, ii) T.

Harjoitustehtäviä

<u>55</u>. Kappale, jonka massa on m, liikkuu x-akselilla. Siihen vaikuttaa harmoninen voima, jonka tasapainopiste on origo ja verrannollisuuskerroin on k. **a)** Laske ajanhetkellä t kappaleen i) potentiaalienergia (valitsemalla origo "nollatasoksi"), ii) liike-energia. **b)** Totea (laskemalla potentiaali- ja liike-energian summa), että energiaperiaate on voimassa.

56. Kappale, jonka massa on m, liikkuu x-akselilla. Siihen vaikuttaa harmoninen voima, jonka tasapainopiste on origo ja verrannollisuuskerroin on k. Lisäksi kappaleeseen vaikuttaa voima, jonka suunta on liikkeen suunnan vastainen ja suuruus on verrannollinen kappaleen nopeuteen verrannollisuuskertoimella λ. **a)** Johda näin syntyvän *vaimenevan värähdysliikkeen* liikeyhtälö. **b)** Totea, että kaikilla (positiivisilla) lukupareilla k, λ ei kuitenkaan synny värähdysliikettä (vaan millainen liike on vaihtoehtona?). Ohje b-kohtaan: Tarkoituksena ei ole ratkaista saatua differentiaaliyhtälöä (mitä ei voida tehdä tämän kirjan tiedoilla) vaan käyttää "fysikaalista ajattelua".

2.5 Keskeisvoima

Kappaleeseen vaikuttava *keskeisvoima* suuntautuu aina tiettyyn pisteeseen eli *voimakeskukseen* tai vastakkaiseen suuntaan. Esimerkiksi harmoninen voima on keskeisvoima, jolloin voimakeskuksena on sen tasapainopiste. Keskeisvoima aiheuttaa *keskeisliikkeen.*

Esim. 1 Kappale, jonka massa on m, kiertää tasaisella vauhdilla v pitkin r-säteistä ympyrää. **a)** Osoita, että tämän liikkeen aiheuttaa keskeisvoima, jonka voimakeskuksena on ympyrän keskipiste. **b)** Laske tämän voiman suuruus (ja totea, että se on vakio).

a) Valitsemme koordinaatiston niin, että ympyrän keskipiste on origona ja kappale on ajanhetkellä $t = 0$ pisteessä $(0, r)$. Koska v on vakio, myös kulmanopeus $\omega = v/r$ on vakio.

Olkoon kiertosuunta positiivinen. Ajanhetkellä t kappaleen paikka

$$\mathbf{r} = (r\cos\omega t,\, r\sin\omega t) = r(\cos\omega t,\, \sin\omega t),$$

joten kappaleen nopeus

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = (-\omega r\sin\omega t,\, \omega r\cos\omega t) = \omega r(-\sin\omega t,\, \cos\omega t)$$

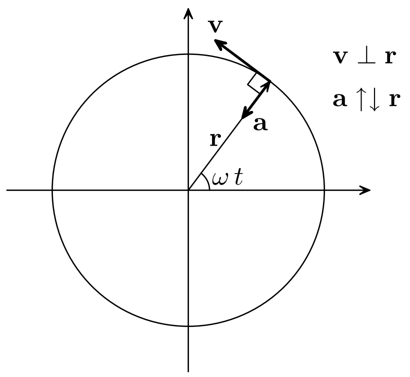
(vrt. esim. 1.4.2) ja kiihtyvyys

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = (-\omega^2 r\cos\omega t,\, -\omega^2 r\sin\omega t) = -\omega^2 r(\cos\omega t,\, \sin\omega t) = -\omega^2\mathbf{r}.$$

Vektorit $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{r}$ ovat siis vastakkaissuuntaisia. Koska $\mathbf{r}$ suuntautuu origosta poispäin, $\mathbf{a}$:n (ja siis koko liikkeen) aiheuttaa origoon suuntautuva keskeisvoima $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -m\omega^2\mathbf{r}$.

b)

$$F = |\mathbf{F}| = |-m\omega^2\mathbf{r}| = m\omega^2 r = m\frac{v^2}{r^2}r = \frac{mv^2}{r}.$$



Päättelemme tästä esimerkistä, että kappaleen rata on (origokeskinen) ympyrä, jos ja vain jos nopeusvektori $\mathbf{v}$ (ja siis myös liikemäärävektori $\mathbf{p}$) on aina kohtisuorassa paikkavektoria $\mathbf{r}$ vastaan. Tällöin kiihtyvyysvektori $\mathbf{a}$ (ja siis myös voimavektori $\mathbf{F}$) on paikkavektorin $\mathbf{r}$ kanssa vastakkaissuntainen. Alamme nyt tutkia yleistä tapausta, jolloin näiden vektorien keskinäisistä suunnista ei oleteta mitään.

Kappaleen paikkavektorin $\mathbf{r}$ ja liikemäärävektorin $\mathbf{p}$ vektoritulo $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ on kappaleen *liikemäärämomentti* origon suhteen. (”Kappaleen liikemäärämomentin” sijasta pitäisi oikeastaan puhua ”liikemäärän momentista”.) Kappaleen paikkavektorin $\mathbf{r}$ ja kappaleeseen vaikuttavan voimavektorin $\mathbf{F}$ vektoritulo $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ on voiman $\mathbf{F}$ *momentti* origon suhteen.

Liikemäärämomentin derivaatta on voiman momentti, sillä

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Nimittäin $\mathbf{v} \parallel \mathbf{p}$, joten $\mathbf{v} \times \mathbf{p} = \mathbf{0}$.

Jos $\mathbf{F}$ keskeisvoima, niin $\mathbf{r} \parallel \mathbf{F}$, jolloin myös $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ ja edelleen $\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0}$, Siis $\mathbf{L}$ on vakio. Olemme näin osoittaneet, että *keskeisvoiman* $\mathbf{F}$ *vaikutuksesta liikkuvan kappaleen liikemäärämomentti* $\mathbf{L}$ *voimakeskuksen suhteen on vakio.*

Jos $\mathbf{L} = \mathbf{0}$, niin $\mathbf{r} \parallel \mathbf{p}$ kaikilla t:n arvoilla, joten kappale liikkuu voimakeskuksen kautta kulkevalla suoralla tai pysyy paikallaan. Jos taas $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$, niin se on kaikilla t:n arvoilla vektorien $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ja $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ määräämän tason normaalivektori. Mutta silloin kaikki nämä tasot ovat samat, joten liike tapahtuu tässä tasossa. Olemme näin osoittaneet, että *keskeisvoiman* $\mathbf{F}$ *vaikutuksesta liikkuvan kappaleen rata on joko voimakeskuksen kautta kulkevalla suoralla tai tasossa, jonka normaalivektori on* $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. (Mitä voidaan sanoa tapauksesta, jossa keskeisvoima on harmoninen?)

Oletamme nyt, että kappaleeseen vaikuttaa keskeisvoima $\mathbf{F}$ ja että kappaleen paikkavektori $\mathbf{r}$ ja liikemäärävektori $\mathbf{p}$ ovat erisuuntaiset. Tällöin liike tapahtuu tasossa. Kiinnitämme siinä napakoordinaatiston, jonka origona on voimakeskus. Olkoot $r = r(t)$ ja $\theta = \theta(t)$ kappaleen napakoordinaatit ajanhetkellä t. Tällöin paikkavektori

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t)) = r(t)(\cos\theta(t), \sin\theta(t)) = r(t)\mathbf{e}(t),$$

missä $\mathbf{e} = \mathbf{e}(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$, on $\mathbf{r}$:n suuntainen yksikkövektori; siis $\mathbf{r} = r\mathbf{e}$.

Noudatamme nyt mekaniikassa yleistä tapaa merkitä derivaattaa ajan suhteen yläpisteellä ja toista derivaattaa kahdella yläpisteellä.

Derivaatta

$$\dot{\mathbf{e}} = (-\sin\theta(t), \cos\theta(t))\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(t)\mathbf{f}(t),$$

missä yksikkövektori $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t) = (-\sin\theta(t), \cos\theta(t))$. Sen derivaatta

$$\dot{\mathbf{f}} = (-\cos\theta(t), -\sin\theta(t))\dot{\theta}(t) = -\dot{\theta}(t)\mathbf{e}(t),$$

joten kappaleen nopeusvektori

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}(r\mathbf{e})}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\mathbf{e} + r\dot{\mathbf{e}} = \dot{r}\mathbf{e} + r\dot{\theta}\mathbf{f}.$$

Kiihtyvyysvektori

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \ddot{r}\mathbf{e} + \dot{r}\dot{\mathbf{e}} + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{f} + r\ddot{\theta}\mathbf{f} + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{f}} = \ddot{r}\mathbf{e} + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{f} + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{f} + r\ddot{\theta}\mathbf{f} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\mathbf{e} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{f}\end{aligned}$$

on $\mathbf{e}$:n suuntainen, joten

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0.$$

Näin ollen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}) = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = r(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0,$$

mistä seuraa, että $r^2\dot{\theta}$ on vakio; merkitsemme sitä $2c$:llä.

Tarkastelemamme kappale on ajanhetkellä t pistessä $\mathbf{r}$, jonka napakoordinaatit ovat $r = r(t)$ ja $\theta = \theta(t)$. Merkitsemme $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, $r(0) = r_0$ ja $\theta(0) = \theta_0$. Sen kuvion pinta-ala, jota rajoittavat paikkavektorit $\mathbf{r}$ ja $\mathbf{r}_0$ sekä kappaleen rata aikavälillä $[0, t]$, on (s. 19–20)

$$A(t) = \tfrac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} r(u)^2 \mathrm{d}u.$$

Derivaatta
$$\dot{A} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = \tfrac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \tfrac{1}{2}\cdot 2c = c$$
on siis vakio. Olemme näin osoittaneet, että *keskeisliikkeen pintanopeus $\dot{A}$ on vakio*. Toisin sanoen paikkavektori ”maalaa” yhtä pitkissä ajoissa yhtä suuret pinnat.

Saamme yhtälöstä
$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}$$
kiihtyvyyden $\mathbf{a}$, kun tunnemme kappaleen liikkeen eli tiedämme, miten r ja θ riippuvat t:stä. Tutkimme nyt, miten saamme kiihtyvyyden, kun tunnemme vain kappaleen radan (eli tiedämme, miten r riippuu θ:sta) mutta emme kappaleen liikettä (eli emme tiedä, miten r ja θ riippuvat t:stä). Yhtälöstä $r^2\dot{\theta} = 2c$ seuraa $\dot{\theta} = 2c/r^2$ joten
$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = \frac{2c}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{1}{r}.$$
Edelleen
$$\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-2c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{1}{r}\right) = -2c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{1}{r}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} =$$
$$-2c\Big[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{1}{r}\Big)\Big]\dot{\theta} = -2c\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\frac{1}{r} = -2c\frac{2c}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\frac{1}{r} = -\frac{4c^2}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\frac{1}{r}$$
ja
$$r\dot{\theta}^2 = r\frac{4c^2}{r^4} = \frac{4c^2}{r^3},$$
jotka sijoittamalla yhtälöön $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}$ saamme *Binet'n*[1] *yhtälön*
$$\mathbf{a} = -\frac{4c^2}{r^2}\Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\Big)\mathbf{e}.$$
(Se, että $\mathbf{e}$ riippuu t:stä, ei haittaa, koska tiedämme, että $\mathbf{e}$ on kappaleen paikkavektorin suuntainen yksikkövektori. Voitaisiin ajatella, että Binet'n yhtälöä pitäisi ”sieventää” sijoittamalla $2c = \omega r^2$, jolloin c:stä päästäisiin eroon ja sulkulausekkeen kertoimeksi saataisiin yksinkertaisesti $-\omega^2 r^2$. Miksi näin ei kuitenkaan kannata tehdä?)

Harjoitustehtävä

57. Kappale liikkuu xy-tasossa niin, että ajanhetkellä $t\,(\geq 0)$ sen paikkavektori $\mathbf{r} = (a\cosh\omega t,\, b\sinh\omega t)$, missä a, b ja ω ovat vakioita. **a)** Laske kappaleen kiihtyvyysvektori. **b)** Onko kyseessä keskeisliike?

[1] Jacques Binet (1786–1856), ranskalainen matemaatikko.

2.6 Keplerin lait. Newtonin gravitaatiolaki

Huomasimme edellä, että keskeisliike, joka ei tapahdu suoralla, tapahtuu tasossa, ja sen pintanopeus voimakeskuksen suhteen on vakio. Käänteisesti voidaan osoittaa, että tasossa tapahtuva liike, jonka pintanopeus tietyn pisteen suhteen on vakio, on keskeisliike, jonka voimakeskuksena on tämä piste. Kepler[1] osoitti Brahen[2] havaintojen perusteella, että planeetta liikkuu Auringon kautta kulkevassa tasossa (*Keplerin nollas laki*) niin, että sen pintanopeus Auringon suhteen pysyy vakiona (*Keplerin toinen laki*). Siis planeettaa liikuttaa keskeisvoima, jonka voimakeskuksessa on Aurinko. Kepler osoitti myös, että planeetan rata on ellipsi, jonka toisessa polttopisteessä on Aurinko (*Keplerin ensimmäinen laki*). Hän osoitti vielä, että planeetan kiertoajan neliö on verrannollinen radan isoakselin puolikkaan kuutioon (*Keplerin kolmas laki*). Koska nollas laki seuraa ensimmäisestä, se jätetään usein pois.

Keplerin lait siis perustuvat kokeellisiin tuloksiin (eli Brahen havaintoihin), mutta kolmas laki voidaan todistaa matemaattisesti ensimmäisen ja toisen lain seurauksena (teht. 65b).

Mikä voima pitää planeetan ellipsiradalla? Tämän ongelman ratkaisi Newton. Mekin pystymme tekemään sen melko helposti Binet'in yhtälön avulla (jota ei tunnettu Newtonin aikana).

Tarkastelemme kappaleen K liikettä sellaisen keskeisvoiman alaisena, jonka voimakeskuksessa on "keskuskappale" C. Otamme voimakeskuksen origoksi. Oletamme, että K:n rata on ellipsi (tai ympyrä), ja esitämme sen yhtälön muodossa

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\theta}$$

(teht. 31–32), missä $0 \le \varepsilon < 1$. (Ympyrällä $\varepsilon = 0$, joten $r = p$.)

Kirjoitamme radan yhtälön muotoon

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos\theta.$$

Binet'n yhtälön mukaan K:n kiihtyvyys

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = -\frac{4c^2}{r^2}\Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\Big)\mathbf{e} &= -\frac{4c^2}{r^2}\Big(-\frac{\varepsilon}{p}\cos\theta + \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos\theta\Big)\mathbf{e}\\ &= -\frac{4c^2}{pr^2}\mathbf{e} = -\frac{h}{r^2}\mathbf{e},\end{aligned}$$

[1] Johannes Kepler (1571–1630), saksalainen tähtitieteilijä.

[2] Tyko Brahe (1546–1601), tanskalainen tähtitieteilijä.

missä

$$h = \frac{4c^2}{p}.$$

Siis K:n kiihtyvyyden suuruus (tietyllä radalla) on kääntäen verrannollinen K:n ja C:n väliseen etäisyyteen r verrannollisuuskertoimella h.

Osoitamme, että h ei riipu K:n radasta. Olkoon K:n kiertoaika T, ja olkoot radan puoliakselit a ja b. Pintanopeus $\dot{A} = c$, ja K:n paikkavektori "maalaa" ajassa T koko ellipsialueen, jonka pinta-ala on πab. Siksi $cT = \pi ab$, josta

$$c = \frac{\pi ab}{T}.$$

Koska lisäksi

$$p = \frac{b^2}{a}$$

(teht. 65a), on

$$h = \frac{4c^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2 a}{T^2 b^2} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}.$$

Keplerin kolmannen lain mukaan a^3/T^2 on vakio, joten myös h on vakio.

Edelleen

$$\mathbf{a} = -\frac{h}{r^2}\mathbf{e}.$$

Jos siis K:n massa on m, niin K:hon vaikuttaa voima

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -\frac{hm}{r^2}\mathbf{e}.$$

Merkitsemme $h = h_C$ (koska C on liikkeen aiheuttaja), jolloin tämän voiman suuruus

$$F = \frac{h_C m}{r^2}.$$

Ajattelemme nyt, että *jokainen* kappale vaikuttaa siitä etäisyydellä r olevaan m-massaiseen kappaleeseen suruudeltaan tämän kaavan mukaisella voimalla, kun h_C:n tilalla on kappaleelle ominainen vakio. Erityisesti K vaikuttaa C:hen voimalla, jonka suuruus

$$F' = \frac{h_K M}{r^2},$$

missä h_K on tietty vakio. Voiman ja vastavoiman lain mukaan $F = F'$, joten $h_C m = h_K M$ eli

$$\frac{h_K}{m} = \frac{h_C}{M}.$$

Kappaleelle ominaisen h:n suhde kappaleen massaan on siis vakio. Tämän *gravitaatiovakion* γ arvo on kolmen numeron tarkkuudella $6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$.

Näin olemme päätyneet *Newtonin gravitaatiolakiin*: Kappaleet, joiden massat ovat M ja m ja joiden välinen etäisyys on r, vaikuttavat toisiinsa *gravitaatiovoimalla* $\mathbf{F}$, jonka suuruus

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2}.$$

Edelleen

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\mathbf{e},$$

missä $\mathbf{e}$ on vaikuttavasta kappaleesta toiseen kappaleeseen suunnattu yksikkövektori.

Tarkastelemme vielä käänteistä ongelmaa: Jos kappale liikkuu gravitaatiovoiman vaikutuksesta, niin onko sen rata aina ellipsi? Vastaus on kielteinen (teht. 66a), sillä rata voi olla myös hyperbeli tai paraabeli. Lisäksi kappale voi ”pudota” suoraan keskuskappaleeseen.

Harjoitustehtäviä

58. Irtonaisesta sorasta koostuva pallonmuotoinen asteroidi, jonka tiheys $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, pyörii akselinsa ympäri suurimmalla mahdollisella kulmanopeudella. Laske yhteen pyörähdykseen kuluva aika.

59. *Kaksoistähden* muodostaa kaksi tähteä, jotka kiertävät niiden yhteisen massakeskipisteen ympäri. Paljain silmin näkyvä Sirius A ja heikkovaloinen Sirius B kiertävät siten, että niiden keskimääräinen etäisyys $d = 2{,}96 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m}$. Määritä kiertoaika. Sirius A:n massa on 2,14 kertaa ja Sirius B:n massa 0,98 kertaa Auringon massa $m = 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$. Ohje: Oleta (vastoin todellisuutta), että rata on ympyrä.

<u>60</u>. Miten maapallo voidaan ”punnita” eli miten sen massa voidaan määrittää? Ohje: Oletetaan tunnetuiksi g, γ ja maapallon säde.

61. Marsin toisen kuun, Deimoksen, kiertoaika $T = 1{,}26$ Maan vuorokautta ja rata on (riittävällä tarkkuudella) ympyrä, jonka säde $R = 23500\,\mathrm{km}$. Laske Marsin ja Maan massojen suhde. Maan säde $r = 6370\,\mathrm{km}$.

62. <u>a)</u> *Toinen kosminen pakonopeus* v_2 on se alkunopeus, joka on ylitettävä, jotta Maasta lähetetty satelliitti ei putoa takaisin Maahan eikä jää kiertämään sitä. Laske v_2. Ilmanvastusta ei oteta huomioon. Ohje: Laske aluksi se työ, joka täytyy tehdä Maan gravitaatiokenttää vastaan satelliitin kuljettamiseksi ”äärettömän kauas”.

b) *Ensimmäinen kosminen pakonopeus* v_1 on se alkunopeus, joka on ylitettävä, jotta Maasta lähetetty satelliitti ei putoa takaisin Maahan. i) Laske v_1. Ilmanvastusta ei oteta huomioon. Ohje: Ajattele, että satelliitti läheteään ”riittävän korkealta vaakasuoraan”. ii) Osoita, että $2v_1^2 = v_2^2$.

63. Toukokuussa 2009 lähetettiin Planck[1]- ja Herschel[2] -luotaimet kiertämään Aurinkoa niin, että ne pysyvät Auringon ja Maan kautta kulkevalla suoralla näiden suhteen keskimäärin paikallaan ja ovat eri puolella Maata kuin Aurinko. Tämä paikka on edullinen, koska siellä on aina ”auringonpimennys” ja koska radan kalibirointi on helppoa. Herschelin pääpeilin rakentaminen, mikä tapahtui Turussa, oli kaikkien aikojen vaativin avaruuspeilin rakennusprojekti. Kuinka kauas nämä luotaimet tulevat Maasta? Maan ja Kuun yhteenlaskettu massa $m = 6{,}05 \cdot 10^{24}$ kg ja Auringon massa $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg. Maan etäisyys Auringosta on $d = 1{,}49 \cdot 10^6$ km. (Todellisuudessa d hieman vaihtelee, koska Maan rata on ellipsi.)

64. Kuvitellaan, että Maa romahtaa mustaksi aukoksi eli puristuu yhdeksi pisteeksi, jonka massa on Maan massa $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg. Mikä on tätä pistettä ympäröivän sellaisen pallon säde, jonka pinnalla toinen kosminen pakonopeus on valon nopeus? Tulos on Maan *Schwarzschildin*[3] *säde* eli M-massaisen mustan aukon tapahtumahorisontin säde. Tämän pallon sisäpuolella valokaan ei pääse poistumaan Maan gravitaatiokentästä. (Onneksi ”pienen” massan omaavat taivaankappaleet, kuten esimerkiksi Maa ja Aurinko, eivät romahtele mustiksi aukoiksi.)

65. Todista: **a)** Ellipsin parametri $p = b^2/a$, kun a ja b ovat puoliakselit ($a \geq b$). **b)** Keplerin kolmas laki.

<u>66</u>. Kappale K liikkuu keskuskappaleen C aiheuttaman keskeisvoiman alaisena ”putoamatta” C:hen. **a)** Osoita, että K:n rata on kartioleikkaus. Ohjeita: Merkitse K:n massaa m:llä, C:n massaa M:llä, K:n radan pienintä etäisyyttä C:stä r_0:lla ja K:n vauhtia siinä pisteessä v_0:lla. Valitse napakoordinaatisto niin, että C on origossa ja K:n etäisyys siitä on pienimmillään vaihekulmalla $\theta = 0$. Sovella gravitaatiolakia ja Binet'n yhtälöä. **b)** Kun M ja r_0 on annettu, millä v_0:n arvoilla K:n rata on i) ellipsi, ii) paraabeli, iii) hyperbeli? **c)** Kuinka suuri v_0 on vähintään (kun M ja r_0 on annettu)?

[1] Max Planck (1858–1947), saksalainen fyysikko.
[2] William Herschel (1738–1822), saksalais-englantilainen tähtitieteilijä.
[3] Karl Schwarzschild (1873–1916), saksalainen fyysikko.

$\star$**67.** Kuvitellaan, että Kuu onnistutaan ”pysäyttämään”, jolloin se alkaa ”pudota” Maahan. Laske putoamiseen kuluva aika. Kuun etäisyys Maasta on $l = 3{,}84 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$. Auringon ja muiden planeettojen gravitaatiovoimia ei oteta huomioon eikä myöskään ilmanvastusta.

68. Pallopinta S, jonka säde on r, peitetään ”äärettömän ohuella” massakerroksella niin, että massaa on kaikkiaan M. Olkoon K kappale, jonka massa on m ja etäisyys S:n keskipisteestä a. **a)** Millä gravitaatiovoimalla S vaikuttaa K:hon, kun i) $a > r$, ii) $0 < a < r$? **b)** Päättele a-kohdan perusteella, että gravitaatiota koskevissa tarkasteluissa pallonmuotoisia homogeenisia kappaleita voidaan pitää ”massapisteinä”.

69. Kuvitellaan, että kaksi (toisistaan kaukana olevaa) paikkaa voidaan yhdistää Maan sisään kaivetulla suoralla putkella. Osoita, että sinne pudotettu pallo tulee sen toisesta päästä ulos ajassa, joka ei riipu putken pituudesta. Maa oletetaan homogeeniseksi palloksi, jonka säde $r = 6370\,\mathrm{km}$. Ilmanvastusta ei oteta huomioon.

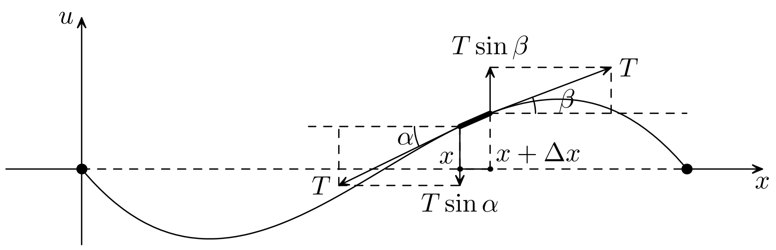
3 Aaltoliikeoppia ja termodynamiikkaa

Fysiikassa matematiikkaa voidaan soveltaa paitsi mekaniikkaan myös kaikkialle muuallekin. Käsittelemme nyt lyhyesti matematiikan soveltamista *aaltoliikeoppiin* ja *termodynamiikkaan*. Nimensä mukaisesti aaltoliikeopissa tutkitaan aaltoliikkeitä. Termodynamiikka on ”lämpöopin teoriaa”. Sitä voidaan luonnehtia oppina lämpöenergian ja muiden energialajien välisistä suhteista.

3.1 Aaltoyhtälö

Tarkastelemme ”äärettömän ohutta” soittimen kieltä, joka on tuettu kahteen pisteeseen. Kieli poikkeutetaan tasapainoasemastaan (joka on tukipisteiden yhdysjana), minkä jälkeen se päästetään värähtelemään. Oletamme poikkeaman (ja siis myös värähtelyn) niin pieneksi, että kielen jännitysvoima on kaikissa kielen pisteissä ja kaikkina ajanhetkinä sama vakio T. Lisäksi oletamme T:n niin suureksi, että kieleen vaikuttava painovoima voidaan jättää huomiotta. Olkoon ρ kielen tiheys (eli massa pituusyksikköä kohti). Sijoitamme kielen xu-koordinaatistoon niin, että toinen tukipiste on origo ja toinen on positiivisella x-akselilla. Langan tasapainoasema on tällöin tukipisteitä yhdistävä x-akselin jana.

Jos värähtely on ”pientä”, niin voimme ajatella kielen koostuvan pystysuoraan värähtelevistä ”massa-alkioista”. Värähtelyä kuvaa tällöin funktio $u = u(x, t)$, jonka arvo on kohtaa x vastaavan massa-alkion u-koordinaatti ajanhetkellä t. Kiinnitetyllä ajanhetkellä t kieli muodostaa tämän (vain x:stä riippuvan) funktion kuvaajan. Väliä $[x, x + \Delta x]$ vastaavan kielen osan



(kuviossa vahvennettu) kiihtyvyys on tämän osan painopisteen u-koordinaatin toinen derivaatta ajan suhteen,

$$a = u_{tt}(x + \tfrac{1}{2}\Delta x, t).$$

Jos Δx on (itseisarvoltaan) pieni, niin

$$a \approx u_{tt}(x, t),$$

ja siis kielen osaan vaikuttaa voima

$$F \approx \rho \Delta x \, u_{tt}(x,t).$$

Osan päihin vaikuttavat (kiinnitetyllä) ajanhetkellä t käyrän $u = u(x,t)$ kohtiin x ja $x + \Delta x$ asetettujen tangenttien suuntaiset T:n suuruiset jännitysvoimat.

Olkoon α edellisen ja β jälkimmäisen tangentin suuntakulma. Koska värähtely on ”pientä”, ovat α ja β (itseisarvoiltaan) ”hyvin pieniä”, joten $\sin\alpha \approx \tan\alpha$ ja $\sin\beta \approx \tan\beta$. Tarkastelemme funktiota $h(x) = u(x,t)$, missä t on kiinnitetty. Tällöin $h' = u_x$, ja siis

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha = h'(x) = u_x(x,t), \quad \sin\beta \approx \tan\beta = h'(x+\Delta x) = u_x(x+\Delta x,t).$$

Näin ollen

$$T\sin\alpha \approx T u_x(x,t), \qquad T\sin\beta \approx T u_x(x+\Delta x,t),$$

joten tarkastelemaamme kielen osaan vaikuttavan voiman u-akselin suuntainen komponentti

$$F \approx T\sin\beta - T\sin\alpha \approx T u_x(x+\Delta x,t) - T u_x(x,t).$$

Olemme nyt saaneet F:lle kaksi likimääräislauseketta. Merkitsemällä ne likimain yhtäsuuriksi saamme

$$T u_x(x+\Delta x,t) - T u_x(x,t) \approx \rho \Delta x \, u_{tt}(x,t)$$

eli

$$T \frac{u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x} \approx \rho u_{tt}(x,t)$$

sitä tarkemmin mitä pienempi Δx on (itseisarvoltaan). Kun $\Delta x \to 0$, likiarvoyhtälö muuttuu yhtälöksi

$$T u_{xx}(x,t) = \rho u_{tt}(x,t)$$

eli

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Merkitsemällä vielä $c^2 = T/\rho$ saamme d'Alembertin[1] *aaltoyhtälön*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

[1] Jean d'Alembert (1717–1783), ranskalainen matemaatikko.

Näemme helposti (teht. 70a), että jokainen funktio

$$u = f(x - ct) + g(x + ct),$$

missä f ja g ovat mielivaltaisia kahdesti derivoituvia (yhden muuttujan) funktioita, toteuttaa aaltoyhtälön. Käänteisesti voidaan osoittaa (mitä emme kuitenkaan tee), että aaltoyhtälön jokainen ratkaisu on tätä muotoa.

Tarkastelemme aluksi ratkaisua $u = f(x - ct)$. Funktio f määrää aallon muodon, ja muuttuja $x - ct$ määrää aallon vaiheen. Aalto ”etenee positiivisen x-akselin suuntaan” nopeudella c (ks. myös teht. 70c). Tällainen ratkaisu ei kuitenkaan kelpaa mallintamaan värähtelevää kieltä. Nimittäin tässä koko x-akseli värähtelee, kun taas kieli saa värähdellä vain tukipisteiden välissä. Siksi ratkaisussa täytyy olla myös termi $g(x + ct)$, joka määrää negatiivisen x-akselin suuntaan nopeudella c etenevän aaltoliikkeen.

Jos ajanhetkellä $t = 0$ tunnetaan kielen jokaisen pisteen poikkeama tasapainoasemasta ja nopeus (u-akselin suunnassa), niin aaltoyhtälöstä voidaan periaatteessa laskea jokaisen pisteen myöhemmät vaiheet. Tehtävänä on tällöin löytää ratkaisu, joka toteuttaa *reunaehdot* $u(x, 0) = f(x)$ ja $u_t(x, 0) = g(x)$, missä f ja g ovat tunnettuja jatkuvia funktioita. Jos kieli on ”äärettömän pitkä” eli koko x-akseli värähtelee, niin tällä probleemalla on d’Alembertin *klassinen ratkaisu*

$$u(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\mathrm{d}y.$$

Usein käy kuitenkin niin, että osittaisdifferentiaaliyhtälön yleisestä ratkaisusta ei saada helposti niitä ratkaisuja, jotka toteuttavat annetut reunaehehdot. Siksi lähtökohdaksi ei tavallisesti oteta yleistä ratkaisua vaan reunaehdot toteuttava funktio, ks. teht. 72.

Harjoitustehtäviä

70. Olkoot f ja g kahdesti derivoituvia funktioita. **a)** Osoita, että funktio $u = f(x - ct) + g(x + ct)$ toteuttaa aaltoyhtälön. **b)** Kiinnitetään $t > 0$. Mikä yhteys on käyrien $u = f(x)$ ja $u = f(x - ct)$ välillä? **c)** Päätttele b-kohdan tuloksen perusteella, että aaltoyhtälön ratkaisun $u = f(x - ct)$ kuvaama aalto etenee positiivisen x-akselin suuntaan nopeudella c.

71. Osoita, että funktio

$$u(x,t) = \frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\mathrm{d}y$$

toteuttaa **a)** aaltoyhtälön, **b)** reunaehdot $u(x,0) = f(x)$ ja $u_t(x,0) = g(x)$.

72. Olkoon värähtelevä kieli tuettu pisteisiin $(0,0)$ ja $(\pi,0)$. Tällöin sen värähtelyä kuvaavan aaltoyhtälön

$$u_{xx}(x,t) = \frac{1}{c^2}u_{tt}(x,t)$$

ratkaisun täytyy (kaikilla t:n arvoilla) toteuttaa reunaehdot

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$

a) Miksi tällaisen ratkaisun määräämä ”aalto ei etene”? Kyseessä on *seisova aalto* eli aaltoyhtälön *stationaarinen ratkaisu*. **b)** Määritä tälle *reuna-arvoprobleemalle* muotoa

$$u = X(x)T(t)$$

oleva nollafunktiosta eroava ratkaisu, missä X ja T ovat kahdesti derivoituvia funktioita. Ohjeita: Näytä aluksi, että täytyy olla

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

kaikilla x:llä ja t:llä. Täten (perustele tarkemmin, miksi) yhtälön kummallakin puolella on vakiofunktio; olkoon kyseinen vakio μ. Alkuperäinen osittaisdifferentiaaliyhtälö muuttuu siis pariksi

$$X'' = \mu X, \qquad T'' = \mu c^2 T$$

tavallisia differentiaaliyhtälöitä reunaehdoilla $X(0) = X(\pi) = 0$. Tutki, millä μ:n arvoilla tällä yhtälöparilla on nämä reunaehdot toteuttavia nollafunktiosta eroavia ratkaisuja.

73. Origossa toiminut lämmönlähde sammutetaan ajanhetkellä $t = 0$. Funktio

$$u(x,t) = t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}$$

ilmoittaa sen aiheuttaman lämpötilan pisteessä x ajanhetkellä $t\,(> 0)$. Osoita, että u toteuttaa *lämpöyhtälön*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

⋆**74.** Tutkitaan lämmön johtumista suorassa ympäristöstään eristetyssä palkissa, jonka jokaisen poikkileikkauksen ala on A. Palkki on tehty materiaalista, jonka lämmönjohtavuuskerroin on α (J/mKs), ominaislämpökapasiteetti β (J/kgK) ja tiheys $\rho\,(\mathrm{kg/m^3})$. Olkoon palkin symmetria-akseli x-akseli ja toinen pää origossa, ja olkoon $u = u(x,t)$ palkin lämpötila kohdassa x hetkellä t. Kun $h > 0$ (ja $x + h \leq l$, missä l on palkin pituus), lasketaan kahdella tavalla palkissa välillä $[x, x+h]$ tapahtuva lämpömäärän muutos aikavälillä $[t, t+\Delta t]$.

Tapa 1. Kyseisen osan massa on $\rho\, Ah$, joten tämän osan saama lämpömäärän muutos

$$\Delta Q \approx \beta\rho Ah(u(x, t+\Delta t) - u(x,t)).$$

Tapa 2. Ajatellaan, että tarkasteltava osa koostuu ”ohuista seinämistä”, joiden paksuus on $\Delta x\,(< h)$. Sen lämpömäärän muutos on siihen kohdassa $x+h$ tulevan lämpömäärän ja siitä kohdassa x poistuvan lämpömäärän erotus. Seinämän läpi kulkeva lämpömäärä (positiivinen tai negatiivinen) on (itseisarvoltaan) verrannollinen seinämän alaan, lämpötilaeroon seinämän eri puolilla ja aikavälin pituuteen sekä kääntäen verrannollinen seinämän paksuuteen. Kohdassa $x+h$ olevan seinämän läpi kulkee tällöin ajassa Δt lämpömäärä

$$\Delta Q_{x+h} \approx \alpha A \frac{u(x+h+\Delta x, t) - u(x+h, t)}{\Delta x}\Delta t$$

ja vastaavasti kohdassa x

$$\Delta Q_x \approx \alpha A \frac{u(x+\Delta x, t) - u(x,t)}{\Delta x}\Delta t.$$

Johda tältä pohjalta lämpöyhtälö

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a\frac{\partial u}{\partial t},$$

missä a on tietty vakio. Ohjeita: Anna aluksi tavan 2 likimääräisyhtälöissä $\Delta x \to 0$. Sitten merkitse tapojen 1 ja 2 mukaiset lämpömäärän muutokset samoiksi. Lopuksi anna $h \to 0$.

3.2 Kaasulaki

Tavalliset kaasut noudattavat kohtuullisissa olosuhteissa likimain *kaasulakia* eli *kaasujen tilayhtälöä*

$$pV = CT,$$

missä p on kaasun paine, V tilavuus, T (absoluuttinen) lämpötila ja C on (kaasusta riippuva) vakio. Historiallisista syistä tämä yhtälö esitetään usein kolmena eri lakina.

Boylen[1] *laki* tai *Boylen-Mariotten*[2] *laki:* Jos T on vakio, niin pV on vakio.

Charlesin[3] *laki:* Jos V on vakio, niin p/T on vakio.

Gay-Lussacin[4] *laki:* Jos p on vakio, niin V/T on vakio.

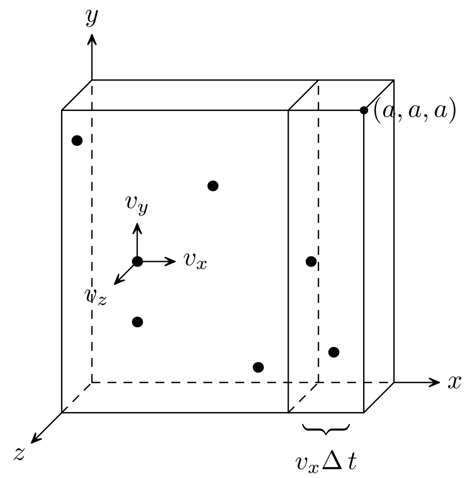
Johdamme kaasulain kuten Maxwell[5] ja Boltzmann[6] tekivät toisistaan riippumatta. Oletamme seuraavaa.

1. Kaasumolekyylien yhteenlaskettu tilavuus on ”äärettömän pieni” verrattuna kaasun kokonaistilavuuteen. (Jos esimerkiksi kiehumislämpötilassa oleva vesi muutetaan samanlämpöiseksi normaalipaineiseksi höyryksi, niin sen tilavuus kasvaa noin 1600-kertaiseksi.)
2. Molekyylit vuorovaikuttavat toisiinsa vain törmäysten yhteydessä eli niiden välinen gravitaatio on ”äärettömän pieni”. Molekyyleihin vaikuttaa myös maan gravitaatiokenttä, joten niiden radat ovat periaatteessa kartioleikkauksia, mutta törmäyksiä on niin paljon ja niitä tapahtuu niin usein, että radat kaartuvat ”äärettömän vähän”. (Oletamme siis, että molekyylit kulkevat törmäysten välillä suoraviivaisesti vakionopeuksilla ja että mikään liikesuunta ei ole erikoisasemassa.)
3. Molekyylien törmäykset toisiinsa ja kaasusäiliön seinämiin ovat täysin kimmoisia, ja törmäykseen kuluva aika on ”äärettömän pieni” pieni verrattuna törmäysten väliseen aikaan. (Muuten molekyylien liike-energia häviäisi vähitellen ja niiden liike loppuisi.)
4. Maan gravitaation aiheuttama paine-ero säiliön ylä- ja alaosan välillä on ”äärettömän pieni”.

Tarkastelemme a-särmäistä kuutiota, jonka sisällä on N kaasumolekyyliä. Oletustemme mukaan ne ovat jakautuneet tasaisesti kuution sisälle, ne törmäilevät kimmoisasti toisiinsa ja kuution sivutahkoihin, niiden radat ovat

[1] Robert Boyle (1627–1691), irlantilainen luonnonfilosofi.
[2] Edme Mariotte (1620–1684), ranskalainen fyysikko.
[3] Jacques Charles (1746–1823), ranskalainen keksijä.
[4] Joseph Gay-Lussac (1778–1850), ranskalainen fyysikko ja kemisti.
[5] James Clerk Maxwell (1831–1879), skottilainen fyysikko.
[6] Ludvig Boltzmann (1844–1906), itävaltalainen fyysikko.

murtoviivoja ja niiden aiheuttama paine on kaikkialla sama. Sijoitamme tämän kuution xyz-koordinaatistoon niin, että yksi kärki tulee origoon ja vastakkainen kärki pisteeseen (a, a, a). Valitsemme sivutahkoista yhden, vaikkapa pisteiden $(a, 0, 0)$ ja (a, a, a) kautta kulkevan, ja sitä S:llä.



Olkoon $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ molekyylin keskimääräinen nopeus pisteessä (x, y, z). Molekyylin törmätessä S:ään nopeudeksi tulee $(-v_x, v_y, v_z)$. Tällöin molekyylin liikemäärän muutos on $2mv_x$, missä m on molekyylin massa. Tarkastelemme nyt "lyhyttä" aikaväliä Δt. Tänä aikana vain ne molekyylit, joiden etäisyys S:stä on enintään $v_x\Delta t$, voivat törmätä S:ään. Koska ne jakautuvat tasaisesti suorakulmaiseen särmiöön, jonka särmät ovat a, a ja $v_x\Delta t$, niiden lukumäärä on

$$\frac{a^2 v_x \Delta t}{a^3} N = N \frac{v_x \Delta t}{a}.$$

Puolet niistä liikkuu kohti S:ää ja törmää siihen. Tällaisten molekyylien yhteinen liikemäärän muutos on siis

$$\tfrac{1}{2} N \frac{v_x \Delta t}{a} \cdot 2mv_x = \frac{N}{a} mv_x^2 \Delta t.$$

Olkoon F se voima, jolla törmäävät molekyylit kaikkiaan vaikuttavat S:ään. Sen impulssi on $F\Delta t$, joten impulssiperiaatteen mukaan

$$F = \frac{N}{a} mv_x^2,$$

ja siis S:ään kohdistuu paine

$$p = \frac{F}{a^2} = \frac{N}{a^3} mv_x^2 = \frac{N}{V} mv_x^2,$$

missä $V = a^3$ on kuution tilavuus. Olkoon $v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ molekyylin keskimääräinen vauhti. Koska mikään liikesuunta ei ole erityisasemassa, on $v_x = v_y = v_z$, joten $v_x^2 = \frac{1}{3}v^2$, ja siis

$$p = \frac{N}{3V}\, mv^2 = \tfrac{2}{3}\,\frac{N}{V}\,\tfrac{1}{2}mv^2.$$

Molekyylien keskimääräinen liike-energia $\frac{1}{2}mv^2$ on verrannollinen kaasun absoluuttiseen lämpötilaan T. Tämä kannattaa kirjoittaa muotoon

$$\tfrac{1}{2}\,mv^2 = \tfrac{3}{2}\,\mathrm{k}T,$$

missä *Boltzmannin vakio* $\mathrm{k} = 1{,}380658 \cdot 10^{-23}$ J/K. Näin ollen

$$pV = \tfrac{2}{3}\,N\,\frac{mv^2}{2} = \tfrac{2}{3}\,N\,\tfrac{3}{2}\,\mathrm{k}\,T = N\mathrm{k}T.$$

Siis $C = N\mathrm{k}$, ja kaasulaki seuraa.

Kaasun *ainemäärä* on molekyylien lukumäärä. Sen yksikkö on *mooli*. Yhdessä moolissa kaasua on *Avogadron*[1] *vakion* $\mathrm{N}_0 = 6{,}02214179 \cdot 10^{23}$ (atomien lukumäärä 12 g:ssa hiili 12:ta) suuruinen määrä molekyylejä. Siis kaasussa, jonka ainemäärä on n, on $N = n\mathrm{N}_0$ molekyylia. Tällöin

$$pV = N\mathrm{k}T = n\mathrm{N}_0 kT = n\mathrm{R}T,$$

missä $\mathrm{R} = \mathrm{kN}_0 = 8{,}314510\,\mathrm{J/(mol\,K)}$ on *moolinen kaasuvakio*. Näin saamme kaasulain muotoon

$$pV = n\mathrm{R}T.$$

Kaasulaki kuvaa hyvin tavallisia kaasuja tavanomaisissa paineissa ja lämpötiloissa. Johtaessamme sitä oletimme S:n kuutioksi, mutta S saa olla muodoltaan mikä tahansa, sillä se voidaan täyttää kuutioilla mielivaltaisen tarkasti.

Harjoitustehtäviä

75. Mitä fysikaalista suuretta esittää lauseke

$$\textbf{a)}\ \frac{\gamma m\rho}{r}, \qquad\qquad \textbf{b)}\ \sqrt{\frac{\kappa \mathrm{R}T}{M}},$$

missä γ on gravitaatiovakio, m on massa, ρ on tiheys, r on etäisyys, R on moolinen kaasuvakio, T on absoluuttinen lämpötila, M on moolimassa (eli massa moolia kohti) ja κ on dimensioton vakio?

[1] Amedeo Avogadro (1776–1856), italialainen fyysikko.

76. **a)** Osoita kaasulain perusteella, että kaasun tiheys on vakiolämpötilassa verrannollinen paineeseen.

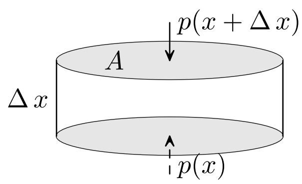
b) Ilmassa on 79 % typpeä N_2 ja 21 % happea O_2. i) Miten kannattaa määritellä ilman "laskennallinen moolimassa"? ii) Laske se. Typen atomipaino on 14 ja hapen 16.

<u>77</u>. Sylinterissä oleva kaasu laajenee ja työntää edellään mäntää. Kaasun tilavuus kasvaa arvosta V_1 arvoon V_2. Kitkaa ei oteta huomioon. **a)** Osoita, että kaasun tekemä työ

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V.$$

b) Laske tämä työ olettaen, että kaasu noudattaa Boylen lakia.

78. Kuvio esittää suoran ympyräpohjaisen lieriön muotoista pystysuoran putken osaa, jonka poikkileikkauksen ala on A ja korkeus Δx. Lieriön alapohja on korkeudella x maan pinnasta. Ajatellaan, että lieriön kummassakin pohjassa on ohut kalvo. Olkoon $p(x)$ ilman paine ja $\rho(x)$ ilman tiheys korkeudella x, ja olkoon T ilman lämpötila. Tällöin lieriössä olevan ilman massa $m \approx \rho(x)A\Delta x$. Koska kalvot pysyvät levossa (voit kokeilla saippualiuoksella), kohdassa x vallitsee voimien tasapaino.



a) Laadi tällä perusteella differentiaaliyhtälö paineelle $p = p(x)$. **b)** Ratkaise se alkuehdolla, jonka mukaan paine maan pinnalla on p_0. **c)** Ilmoita b-kohdan ratkaisu $p = p(x)$ (eli paine korkeuden funktiona) muodossa $x = x(p)$ (eli korkeus paineen funktiona).

79. Määritä ilman **a)** paine, **b)** tiheys korkeudella x Maan pinnasta, kun lämpötilaksi oletetaan vakio T ja putoamisliikkeen kiihtyvyys $g = g(x)$ noudattaa gravitaatiolakia, jolloin ilmakehää ei oteta huomioon.

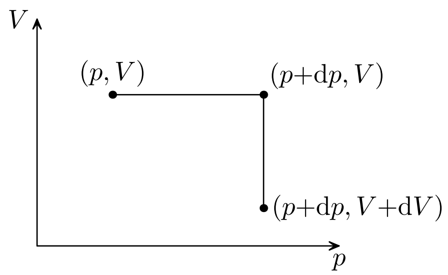
⋆80. Arvioi edellisen tehtävän perusteella ilmakehän massa. Ohjeita: Oleta lämpötilaksi 270 K. Muodosta "sipulinkuorimaisten massa-alkioiden summa" maan pinnalta 200 km:n korkeudelle. Laske näin saamasi integraali jollakin numeerisella integrointimenetelmällä tai laskimen valmisohjelmalla. Analysoi epätarkkuustekijöitä.

3.3 ⋆Adiabaattinen prosessi

Tarkastelemme yhtä kaasumoolia, jolloin kaasulaki on

$$pV = \mathrm{R}T.$$

Vakio $\mathrm{R} = 8{,}3145\,\mathrm{J/K}$. Havainnollistamme pV-koordinaatistossa tämän kaasuerän painetta ja tilavuutta, joita yhdessä kutsumme tässä kaasun ”tilaksi”. Koordinaatiston ensimmäisen neljänneksen pisteet ja kaasun eri tilat vastaavat täysin toisiaan. Olkoon $\mathrm{d}Q$ se energia, joka sitoutuu (tai jonka vastaluvun osoittama määrä vapautuu), kun kaasun tilaan (p, V) tehdään ”äärettömän pieni” muutos $(\mathrm{d}p, \mathrm{d}V)$, jolloin uudeksi tilaksi tulee $(p + \mathrm{d}p, V + \mathrm{d}V)$ kuvion osoittamalla tavalla.



Jos $\mathrm{d}T$ on kaasun lämpötilan muutos, niin

$$\mathrm{d}Q = C_V \mathrm{d}T + p\mathrm{d}V,$$

missä C_V on kaasun lämpökapasiteetti vakiotilavuudessa.

Yhtälöstä $\mathrm{R}T = pV$ saamme derivoimalla p:n suhteen

$$\mathrm{R}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}p} = V + p\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}$$

ja ”kertomalla $\mathrm{d}p/R$:llä”

$$\mathrm{d}T = \frac{V}{\mathrm{R}}\mathrm{d}p + \frac{p}{\mathrm{R}}\mathrm{d}V,$$

joten

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Q &= C_V \mathrm{d}T + p\mathrm{d}V \\
&= \frac{C_V}{\mathrm{R}} V\mathrm{d}p + \frac{C_V}{\mathrm{R}} p\mathrm{d}V + p\mathrm{d}V \\
&= \frac{C_V}{\mathrm{R}} V\mathrm{d}p + \frac{C_V + \mathrm{R}}{\mathrm{R}} p\mathrm{d}V.
\end{aligned}$$

Jos paine on vakio, niin $\mathrm{d}p = 0$, jolloin

$$\mathrm{d}T = \frac{p\mathrm{d}V}{\mathrm{R}}$$

ja edelleen

$$\mathrm{d}Q = (C_V + \mathrm{R})\frac{p\mathrm{d}V}{\mathrm{R}} = (C_V + \mathrm{R})\,\mathrm{d}T.$$

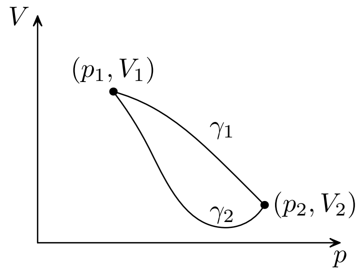
Siis

$$C_p = C_V + \mathrm{R}$$

on kaasun lämpökapasiteetti prosessissa, jossa paine pysyy vakiona. Nyt saamme

$$\mathrm{d}Q = \frac{1}{\mathrm{R}}(C_V V\mathrm{d}p + C_p p\mathrm{d}V).$$

Olkoon kaasun alkutila (p_1, V_1) ja lopputila (p_2, V_2).



Voitaisiin ajatella, että pitäisi tarkastella käyräintegraalia (teht. 84)

$$\int_{(p_1,V_1)}^{(p_2,V_2)} \mathrm{d}Q = \frac{1}{\mathrm{R}}\int_{(p_1,V_1)}^{(p_2,V_2)} (C_V V\mathrm{d}p + C_p p\mathrm{d}V),$$

mutta se on tiestä riippuva (teht. 88). Sen sijaan ”differentiaalin”

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{T}$$

integraali on tiestä riippumaton (teht. 89). Koska

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S &= \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \frac{1}{\mathrm{R}}\Big(\frac{C_V V}{T}\mathrm{d}p + \frac{C_p p}{T}\mathrm{d}V\Big) \\
&= \frac{C_V V}{\mathrm{R}T}\mathrm{d}p + \frac{C_p p}{\mathrm{R}T}\mathrm{d}V \\
&= \frac{C_V V}{pV}\mathrm{d}p + \frac{C_p p}{pV}\mathrm{d}V \\
&= C_V\frac{\mathrm{d}p}{p} + C_p\frac{\mathrm{d}V}{V},
\end{aligned}$$

on *entropian muutos*

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int_{(p_1,V_1)}^{(p_2,V_2)} \mathrm{d}S = \int_{(p_1,V_1)}^{(p_2,V_2)} \big(C_V \frac{\mathrm{d}p}{p} + C_p \frac{\mathrm{d}V}{V}\big) = C_V \int_{p_1}^{p_2} \frac{\mathrm{d}p}{p} + C_p \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} \\ &= C_V(\ln p_2 - \ln p_1) + C_p(\ln V_2 - \ln V_1) = C_V \ln \frac{p_2}{p_1} + C_p \ln \frac{V_2}{V_1}.\end{aligned}$$

Merkitsemme $p_2 = p$, $V_2 = V$, jolloin

$$\begin{aligned}\Delta S &= C_V \ln \frac{p}{p_1} + C_p \ln \frac{V}{V_1} \\ &= \ln \frac{p^{C_V} V^{C_p}}{p_1^{C_V} V_1^{C_p}} = \ln k p^{C_V} V^{C_p},\end{aligned}$$

missä

$$k = \frac{1}{p_1^{C_V} V_1^{C_p}} \quad \text{on vakio.}$$

Oletamme nyt, että prosessi on *adiabaattinen* eli Q on vakio. Tällöin $\mathrm{d}Q = 0$, joten myös $\mathrm{d}S = \mathrm{d}Q/T = 0$, mistä puolestaan seuraa, että $\Delta S = 0$ eli

$$\ln k p^{C_V} V^{C_p} = 0.$$

Näin ollen

$$k p^{C_V} V^{C_p} = 1$$

eli

$$p^{C_V} V^{C_p} = \frac{1}{k}.$$

Korottamalla tämän potenssiin $1/C_V$ saamme

$$p V^{\frac{C_p}{C_V}} = \big(\frac{1}{k}\big)^{\frac{1}{C_V}}.$$

Merkitsemme vielä $\kappa = C_p/C_V$. Olemme näin johtaneet *adiabaattisen prosessin kaasuyhtälön*

$$p\, V^{\kappa} = \text{vakio},$$

missä κ on kaasulle ominainen *adiabaattivakio*. Kaksiatomisille kaasuille, myös ilmalle, $\kappa = 1{,}40$. Johdimme yhtälön yhtä kaasumoolia käyttäen, mutta se on ainemäärästä riippumaton, sillä lämpökapasiteettien suhde on selvästi vakio.

Harjoitustehtäviä

81. Oletetaan, että funktio $z = f(x, y)$ sekä osittaisderivaatat f_x ja f_y ovat jatkuvia pisteen (x_0, y_0) eräässä ympäristössä (eli eräässä (x_0, y_0)-keskisessä ympyräalueessa). Jos Δx ja Δy ovat (itseisarvoiltaan) tarpeeksi pieniä, niin f:n lisäys pisteestä (x_0, y_0) pisteeseen $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ eli erotus

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

noudattaa likimääräisyhtälöä

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Lieriönmuotoisen kannellisen astian pohjan säde on 10,0 cm ja korkeus 50,0 cm. Laske **a)** tällä likimääräiskaavalla, **b)** suoraan, kuinka paljon astian pinta-ala kasvaa, kun pohjan säde kasvaa 0,2 cm ja korkeus 0,3 cm.

82. Miksi edellisen tehtävän likimääräiskaavaa ei voida käyttää, jos oletetaan vain, että f on derivoituva pisteessä (x_0, y_0)? Ohje: Teht. 27.

83. Tehtävän 81 likimääräiskaava antaa aiheen määritellä, että jos ”differentiaalit” $\mathrm{d}x$ ja $\mathrm{d}y$ ovat ”äärettömän pieniä”, niin funktion f ”kokonaisdifferentiaali” on

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Tämä puolestaan motivoi tarkastelemaan ”differentiaalilausekkeita”, joiden yleinen muoto on

$$u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y$$

missä $u = u(x, y)$ ja $v = v(x, y)$ ovat eräässä suorakulmiossa

$$\{(x, y)|\, a < x < b, c < x < d\}$$

määriteltyjä funktioita, joiden enimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Todista: Välttämätön ehto sille, että $u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y$ on erään funktion kokonaisdifferentiaali, on, että

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

(Voidaan todistaa, että tämä ehto on myös riittävä.) Ohje: Oleta, että tällainen funktio löytyy. Käytä hyväksi ”sekaderivaatan” riippumattomuutta derivoimisjärjestyksestä (s. 16).

84. Olkoot $u = u(x, y)$ ja $v = v(x, y)$ käyrällä γ jatkuvia funktioita. Olkoon γ:n parametriesitys $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, ja olkoon γ:lla tangentti sen jokaisessa pisteessä. Differentiaalilausekkeen $u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y$ *(käyrä)integraali* pitkin (suunnattua) käyrää γ on

$$\int_\gamma (u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y) = \int_\alpha^\beta (u(x(t), y(t))x'(t) + v(x(t), y(t))y'(t))\mathrm{d}t.$$

Vaihtoehtoinen merkintä on kirjoittaa

$$\int_{P_1}^{P_2} (u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y),$$

missä $P_1 = (x(\alpha), y(\alpha))$, $P_2 = (x(\beta), y(\beta))$, ja ilmoittaa, että integroidaan pitkin käyrää γ. Laske integraali

$$\int_{(0,0)}^{(\frac{1}{2},1)} (2y\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y)$$

pitkin **a)** näiden pisteiden yhdysjanaa, **b)** paraabelia $y^2 = 2x$.

85. Voidaan todistaa, että integraali

$$\int_{P_1}^{P_2} (u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y)$$

on *tiestä riippumaton* eli ei riipu γ:sta, jos ja vain jos integroitava on erään funktion kokonaisdifferentiaali eli (teht. 83)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Totea, että tämä sopii yhteen tehtävän 84 tulosten kanssa.

86. Tarkastellaan integraalia *pitkin umpinaista käyrää* γ eli integraalia

$$I = \int_P^P (u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y),$$

missä $P \in \gamma$.

a) Osoita, että yhtälö $I = 0$ ei ole yleisesti voimassa.

b) Millä ehdolla se on voimassa?

c) Olkoon $Q \in \gamma$. Osoita, että

$$\int_Q^Q (u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y) = I,$$

joten I ei riipu siitä, mikä γ:n piste otetaan lähtökohdaksi. Siksi voidaan merkitä

$$\oint_\gamma (u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y)$$

tarkoittamaan differentiaalilausekkeen $u\mathrm{d}x+v\mathrm{d}y$ integraalia pitkin umpinaista (suunnattua) käyrää γ.

87. Laske integraali

a) $\displaystyle\oint_\gamma \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, **b)** $\displaystyle\oint_\gamma \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$,

kun γ on ympyrä $x^2 + y^2 = 1$ positiiviseen kiertosuuntaan.

88. Osoita, että (tekstissä olevin merkinnöin) integraali

$$\int_{(p_1,V_1)}^{(p_2,V_2)} (C_V V \mathrm{d}p + C_p p \mathrm{d}V)$$

on tiestä riippuva.

89. Osoita, että (tekstissä olevin merkinnöin) integraali

$$\int_{(p_1,V_1)}^{(p_2,V_2)} (\frac{C_V V}{T} \mathrm{d}p + \frac{C_p p}{T} \mathrm{d}V)$$

on tiestä riippumaton.

90. Osoita, että adiabaattisessa prosessissa $VT^\alpha =$ vakio, missä

$$\alpha = \frac{C_V}{C_p - C_V}.$$

91. Käytetään tehtävän 84 merkintöjä. Oletetaan, että jokainen origosta alkava puolisuora kohtaa γ:n enintään yhdessä pisteessä. Osoita, että käyrän γ ja janojen OP_1 ja OP_2 rajoittaman alueen pinta-ala

$$A = \pm\tfrac{1}{2} \int_{P_1}^{P_2} (y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y),$$

missä etumerkki valitaan niin, ettei tulos ole negatiivinen.
Ohjeita: *Tapa 1.* Käytä kaavaa

$$A = \tfrac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r(\theta)^2 \mathrm{d}\theta$$

(ks. osaluku 1.6). *Tapa 2.* Jaa γ ”äärettömän moneen äärettömän pieneen” osaan ja yhdistä jakopisteet origoon, jolloin muodostuu ”äärettömän monta alaltaan äärettömän pientä” O-huippuista kolmiota. Laske vektoritulon avulla niiden ”pinta-alojen summa”.

92. Olkoon γ ellipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Määritä sen rajoittaman alueen pinta-ala laskemalla integraali

$$\tfrac{1}{2} \oint_\gamma (y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y).$$

Vrt. teht. 21.

3.4 ⋆Äänen nopeuden laskeminen

Äänen nopeus ilmassa voidaan määrittää paitsi kokeellisesti (miten?) myös laskemalla. Teemme niin.

Ääni etenee laajenevan pallon pinnan muotoisena aaltorintamana. Ilma ei liiku äänen suuntaan, vaan ääniaallot muodostuvat ilman tihentyessä ja harventuessa, jolloin ilmassa olevat molekyylit liikkuvat edestakaisin. Ääni on siis *pitkittäistä aaltoliikettä.* Tutkimme ääniaallon etenemistä x-akselin suunnassa. Oletamme seuraavaa.

1. Normaali ilmanpaine $p_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$, ja ρ_0 on vastaava ilman tiheys. Ääni muuttaa ilmanpainetta niin, että $p = p(x,t)$ on paine pisteessä x ajanhetkellä t, ja $\rho = \rho(x,t)$ on vastaava ilman tiheys. Muutokset ovat ”hyvin pieniä” normaaliarvoihin verrattuina. (Esimerkiksi tavallisen puheen aiheuttama paine metrin etäisyydeltä on noin 0,02 Pa, ja kipukynnyksen aiheuttama paine on noin 60 Pa.)

2. Ilma on homogeenista, joten sen ominaisuudet lepotilassa eivät riipu ajasta eivätkä paikasta.

3. Ilma on sisäisesti kitkatonta eli emme ota huomioon ilman viskositeettia.

4. Ilma on täysin kimmoisaa, joten ulkoisen voiman vaikutuksen loputtua se palaa alkuperäiseen tilaansa.

5. Ääniaallon ja ilman välillä ei siirry lämpöä eli äänen eteneminen on adiabaattinen prosessi.

Olkoon $u = u(x,t)$ ilmassa olevien molekyylien (keski)nopeus x-akselin suuntaan pisteessä x ajanhetkellä t. Johdamme p:n, u:n ja ρ:n välille kolme osittaisdifferentiaaliyhtälöä. Osoitamme niiden perusteella, että ρ toteuttaa aaltoyhtälön, ja laskemme siitä äänen nopeuden. Teemme kaiken tämän viidessä vaiheessa.

Vaihe 1. Tutkimme p:n riippuvuutta ρ:sta, kun t on kiinnitetty. Olkoon tarkasteltavan ilman tilavuus V, jolloin adiabaattisen proessin kaasuyhtälön mukaan $p\,V^\kappa =$ vakio. Derivoimalla p:n suhteen saamme

$$V^\kappa + p\kappa V^{\kappa-1}\frac{\partial V}{\partial p} = 0.$$

Suhtaudumme "osittaisdifferentiaaleihin" ∂p ja ∂V kuten "differentiaaleihin" $\mathrm{d}p$ ja $\mathrm{d}V$, joten voimme kertoa tämän yhtälön lausekkeella

$$\frac{1}{\kappa V^\kappa}\frac{\partial p}{p}.$$

Saamme

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial p}{p} + \frac{\partial V}{V} = 0.$$

Toisaalta ilmaa ei synny eikä häviä, joten sen massa $m = \rho V$ on vakio. Derivoimalla ρ:n suhteen saamme

$$V + \rho\frac{\partial V}{\partial \rho} = 0 \quad \text{eli} \quad \frac{\partial \rho}{\rho} + \frac{\partial V}{V} = 0.$$

Näin ollen

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial p}{p} = \frac{\partial \rho}{\rho}$$

eli

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \kappa\frac{p}{\rho}.$$

Mutta

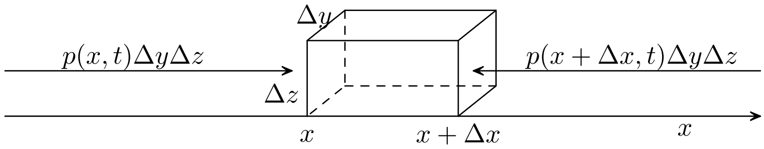
$$\rho = \frac{M}{\mathrm{R}T}p$$

(teht. 76a), joten

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\kappa \mathrm{R}T}{M},$$

missä R on kaasuvakio, T on ilman lämpötila ja M moolimassa.

Vaihe 2. Tutkimme p:n muutosta välillä $[x, x + \Delta x]$ "testisärmiössä", jonka särmät Δx, Δy ja Δz ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Siihen tahkoon,



joka kulkee pisteen x kautta ja on kohtisuorassa x-akselia vastaan, vaikuttaa ajanhetkellä t "ulkoilman" paine voimalla $p(x,t)\Delta y\Delta z$. Pisteen $x+\Delta x$ kautta kulkevaan vastaavaan tahkoon vaikuttaa paine voimalla $-p(x+\Delta x,t)\Delta y\Delta z$.

Särmiön ilman massa on noin $\rho_0\Delta x\Delta y\Delta z$ ja nopeus noin $u(x,t)$, joten Newtonin toisen lain mukaan

$$p(x,t)\Delta y\Delta z - p(x+\Delta x,t)\Delta y\Delta z \approx \rho_0\Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

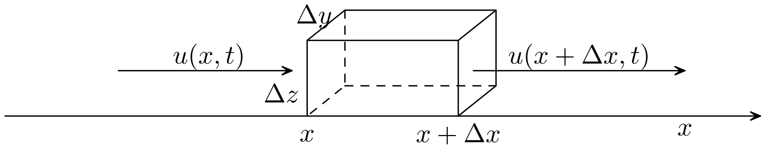
ja edelleen

$$\frac{p(x+\Delta x,t)-p(x,t)}{\Delta x} \approx -\rho_0\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

Antamalla $\Delta x \to 0$ saamme

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -\rho_0\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

Vaihe 3. Tutkimme ρ:n muutosta testisärmiössä.



Särmiöstä aikavälillä $[t, t+\Delta t]$ poistuvan ilman massa

$$\Delta m \approx \rho_0 u(x,t)\Delta t\Delta y\Delta z - \rho_0 u(x+\Delta x,t)\Delta t\Delta y\Delta z,$$

joten tiheyden muutos

$$\Delta\rho = \frac{\Delta m}{\Delta x\Delta y\Delta z} \approx \rho_0\frac{u(x,t)-u(x+\Delta x,t)}{\Delta x}\Delta t,$$

ja siis

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t} \approx -\rho_0\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}.$$

Kun $\Delta t \to 0$ ja $\Delta x \to 0$, saamme

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

Vaihe 4. Tiedämme nyt yhteyden p:n ja u:n välillä (vaihe 2) sekä ρ:n ja u:n välillä (vaihe 3). Aluksi johdamme niistä yhteyden p:n ja ρ:n välille. Koska

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x},$$

on

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(- \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t}\Big) = -\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$$

ja

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(- \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}\Big) = -\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}.$$

Oletamme kaikki toisen kertaluvun osittaisderivaatat jatkuviksi, jolloin (s. 16)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x},$$

ja siis

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}.$$

Mutta meillä on toinenkin yhteys p:n ja ρ:n välillä, nimittäin

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\kappa \mathrm{R} T}{M}$$

(vaihe 1), josta saamme

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\kappa \mathrm{R} T}{M}\frac{\partial \rho}{\partial x}\Big) = \frac{\kappa \mathrm{R} T}{M}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}.$$

Näin ollen

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\kappa \mathrm{R} T}{M}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2},$$

joten ρ toteuttaa aaltoyhtälön

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2},$$

missä

$$c = \sqrt{\frac{\kappa \mathrm{R} T}{M}}$$

on aallon nopeus.

Vaihe 5. Sijoittamalla $\kappa = 1{,}40$ (s. 65), $\mathrm{R} = 8{,}31451\,\mathrm{J/(mol\,K)}$ (s. 61), $T = 293\,\mathrm{K}(= 20°\mathrm{C})$ ja $M = 0{,}02884\,\mathrm{kg/mol}$ (teht. 76b) saamme $c = 344\,\mathrm{m/s}$, mikä sopii yhteen koetulosten kanssa.

Myös p toteuttaa saman aaltoyhtälön (teht. 93), joten sitäkin tutkimalla saadaan äänen nopeus.

Harjoitustehtäviä

93. Osoita, että (tekstissä olevin merkinnöin) p toteuttaa saman aaltoyhtälön kuin ρ, **a)** käyttämällä, **b)** käyttämättä hyväksi sitä, että ρ toteuttaa sen.

94. Suhteellisuusteorian mukaan valon nopeutta ei voida ylittää. Kuitenkin aaltoyhtälön perusteella äänen nopeus saadaan mielivaltaisen suureksi, kun lämpötila on tarpeeksi suuri. Onko suhteellisuusteoria näin osoitettu vääräksi?

95. Vapunviettäjä hengittää ilmapallosta keuhkonsa täyteen heliumia ja alkaa sitten puhua. Miltä hänen puheensa kuulostaa ja miksi?

96. Miksi kuuluu pamaus, kun lentokoneen nopeus ylittää äänen nopeuden?

97. **a)** Kertaa (s. 43), mitä tarkoitetaan aaltoliikkeen jaksonajalla ja taajuudella. **b)** *Aallonpituus* on se matka, jonka aalto kulkee yhdessä jaksonajassa. Mikä yhtälö on aaltoliikkeen nopeuden c, taajuuden f ja aallonpituuden λ välillä?

98. Laske $440\,\mathrm{Hz}$:n taajuisen äänen aallonpituus ilmassa, kun lämpötila on $20{,}0°\mathrm{C}$. (Jaksollisen ilmiön taajuuden yksikkö hertsi[1] $\mathrm{Hz} = 1/\mathrm{s}$.)

99 (*Doppler*[2]*-ilmiö*). Poliisiauto **a)** tulee rikospaikalle nopeudella v, **b)** lähtee sieltä tällä nopeudella. Auton hälytyssireenin äänen taajuus on f. Millä taajuudella ääni kuuluu rikospaikalle? Äänen nopeus on c.

100. ($\smile$) Kuten edellinen tehtävä, mutta poliisiauto ajaa ääntä nopeammin. (Periaatteessa tämä on mahdollista. Nimittäin Green[3] teki vuonna 1997 Nevadan autiomaassa auton nopeuden maailmanennätyksen 1228 km/h.)

[1] Heinrich Hertz (1857–1894), saksalainen fyysikko.
[2] Christian Doppler (1803–1853), itävaltalainen matemaatikko ja fyysikko.
[3] Andy Green (1962–), brittiläinen hävittäjälentäjä.

Lähdeluettelo

[1] A. F. Bermant and I. G. Aramanovich, *Mathematical Analysis. A Brief Course for Engineering Students.* Mir Publishers, 1975.

[2] E. A. Coddington, *An Introduction to Ordinary Differential Equations.* Prentice-Hall, 1961.

[3] I. Ekeland, *Ennakoimattoman matematiikka.* ArtHouse, 1989.

[4] H. Gask, *Ordinära differentialekvationer.* Lund, 1968.

[5] M. Halmetoja, K. Häkkinen, J. Merikoski, L. Pippola, H. Silfverberg ja T. Tossavainen, *Matematiikan taito 13: Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.* WSOY, 2008.

[6] F. Hoyle, *Musta pilvi.* Karisto, 1961.

[7] F. Iversen, *Analyyttisen geometrian oppikirja.* 2. p. Otava, 1963.

[8] Y. Juve ja V. Lyytikäinen, *Differentiaaliyhtälöiden alkeet.* Kirjayhtymä, 1971.

[9] P. Kattainen, *Fysiikan oppikirja lukioluokille I.* 7. p. Otava, 1968.

[10] P. Kattainen, *Fysiikan oppikirja lukioluokille II.* 6. p. Otava, 1967.

[11] K. ja R. Kurki-Suonio, *Vuorovaikuttavat kappaleet - mekaniikan perusteet.* 3. p. Limes, 1995.

[12] K. Kurki-Suonio, M. Kervinen ja R. Korpela, *Kvantti 1.* Weilin + Göös, 1982.

[13] K. V. Laurikainen, *Modernin fysiikan alkeita.* WSOY, 1968.

[14] J. Lavonen, K. Kurki-Suonio ja H. Hakulinen, *Galilei 3: Mekaniikka 1.* Weilin + Göös, 1995.

[15] J. Lavonen, K. Kurki-Suonio ja H. Hakulinen, *Galilei 4: Mekaniikka 2.* Weilin + Göös, 1995.

[16] R. Lehti, *Tanssi auringon ympäri.* Pohjoinen, 1989.

[17] R. Lehti, T. Markkanen ja J. Rydman (toim.) *Isaac Newton – jättilaisen hartioilla.* Ursa, 1988.

[18] E. Lindelöf, *Differentiali- ja integralilasku ja sen sovellutukset III. Ensimmäinen osa. Tavalliset differentiaaliyhtälöt.* Mercatorin kirjapaino oy, 1935.

[19] P. J. Myrberg, *Differentiaali- ja integraalilaskennan oppikirja.* 4. p. Otava, 1961.

[20] K. A. Poukka, *Korkeamman matematiikan alkeiskurssi.* WSOY, 1946.

[21] J. Toivanen, *Teknillinen akustiikka.* Otakustantamo, 1981.

[22] K. Väisälä, *Vektorianalyysi.* 6. p. WSOY, 1968.

Tuloksia ja ohjeita

1. **b)** Millä c:n arvolla $y_0 = c\mathrm{e}^{-x_0^2}$?

2. $y = c\mathrm{e}^{-ax} + \mathrm{e}^{-ax}\int \mathrm{e}^{ax}f(x)\mathrm{d}x$. Tässä $\int \mathrm{e}^{ax}f(x)\mathrm{d}x$ tarkoittaa integroitavan *tiettyä* integraalifunktiota (eikä siis *kaikkia*, koska integroimisvakio c on merkitty erikseen). Se integraalifunktio, joka saa arvon 0 pisteessä x_0, voidaan esittää muodossa $\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{at}f(t)\mathrm{d}t$, joten vaihtoehtoinen tapa esittää vastaus on $y = c\mathrm{e}^{-ax} + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{a(t-x)}f(t)\mathrm{d}t$.

3. **a)** $y = c\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}$. **b)** $y = c\mathrm{e}^{-x^2} + x\mathrm{e}^{-x^2}$.

4. Merkitse $g(x) = f'(x) - f(x)$, jolloin $f'(x) = f(x) + g(x)$. Funktio f toteuttaa siis differentiaaliyhtälön $y' - y = g(x)$, missä g on eräs eipositiivinen funktio. Ratkaise tämä yhtälö alkuehdolla $y(0) = 1$.

5. Mitä tarkoittaa se, että funktio $y = \phi(x)$ on differentiaaliyhtälön $g(y)y' = f(x)$ ratkaisu? Mikä yhdistetty funktio tulee vastauksessa derivoiduksi?

6. $y = \sqrt[3]{x+7}$.

7. $k_0\mathrm{e}^{\frac{pt}{100}}$.

8. $xy = c$ $(c \neq 0)$.

9. **a)** $y = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-c)^2, & \text{kun } x > c, \\ -\frac{1}{4}(x-c)^2, & \text{kun } x < c. \end{cases}$ **b)** Erikoisratkaisu on $y = 0$.

10. $c = \dfrac{c_0}{1 + kc_0 t}$.

11. Noin 11 tuntia.

12. **a)** $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_0)$. **b)** $T = T_0 + (T_1 - T_0)\mathrm{e}^{-kt}$.

13. $m\mathrm{e}^{-\frac{lt}{a}}$.

14. **a)** $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -k\dfrac{V^{\frac{2}{3}}}{V_0 - V}$.

b) $kt = \frac{9}{4}V_0^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{4}V^{\frac{4}{3}} - 3V_0V^{\frac{1}{3}}$.

c) Noin 7,5 tunnissa.

15. $P_n(t) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

16. Differentiaaliyhtälö on $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$.

18. a) $y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$ $(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ -1 \leq y \leq 1)$.

b) $\mathrm{D} \arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c.$

d) $y = \frac{k}{\omega}\sin(\omega x + c)$. Jos $k > 0$, niin sijoita $z = \omega y/k$. Tapaus $k = 0$?

19. a) $\sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$.

b) $\mathrm{D}\sinh x = \cosh x, \quad \mathrm{D}\cosh x = \sinh x$.

c) $y = \sinh x \Leftrightarrow x = \operatorname{arsinh} y, \ \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$;

$y = \cosh x \Leftrightarrow x = \operatorname{arcosh} y \, (x \geq 0, y \geq 1)$,

$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

d)
$$\mathrm{D}\operatorname{arsinh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh} x + c;$$
$$\mathrm{D}\operatorname{arcosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh} x + c.$$

f) $y = \frac{k}{\omega}\cosh(\omega x + c)$. Jos $k > 0$, niin sijoita $z = \omega y/k$. Tapaus $k = 0$?

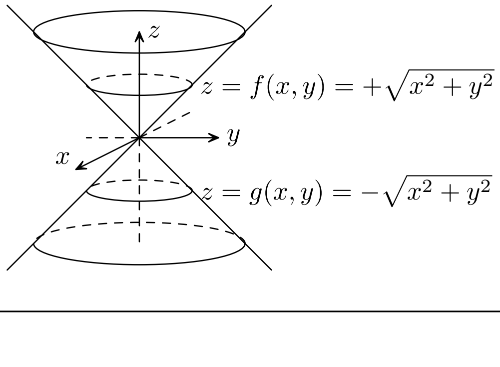
20. Jos $a = 0$, niin $y = cx + d$. Jos $a \neq 0$, niin $y = x + c\mathrm{e}^{-ax} + d$.

21. πab.

23. a) $x = r(t - \sin t),\ y = r(1 - \cos t)$. **b)** $8r$. **c)** $3\pi r^2$.

24. a) $\sinh t$. **b)** $\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}$.

25. a), b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad g(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2}$. Kuvaaja on origohuippuinen suora ympyrä(kaksois)kartiopinta, jonka akseli on z-akseli.



26.
$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= ye^{xy} - y^2, \\ f_y(x,y) &= xe^{xy} - 2xy, \\ f_{xx}(x,y) &= y^2e^{xy}, \\ f_{yy}(x,y) &= x^2e^{xy} - 2x, \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = e^{xy} + xye^{xy} - 2y. \end{aligned}$$

27. $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x, y \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0 \text{ tai } y = 0. \end{cases}$

28. Tutki esimerkiksi suoria $y = 0$ ja $x = 0$.

30. **a)** Olkoot A ja B annettuja pisteitä, ja olkoon l annettu suora (joka ei kulje A:n kautta). Ellipsi on (tason) niiden pisteiden P ura, joille $PA + PB =$ vakio, hyperbeli niiden pisteiden ura, joille $|PA - PB| =$ vakio, ja paraabeli niiden pisteiden ura, joille $PA = P$:n etäisyys l:stä.

b) Nämä käyrät syntyvät, kun suoraa ympyrä(kaksois)kartiopintaa leikataan sopivasti (miten?) tasolla.

c) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}y^2 = 1$.

d) $x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}$.

e) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}y^2 = 1$.

31. **a)** Paraabelilta. **b)** Ellipsiltä. **c)** Hyperbeliltä.

32. $r = \dfrac{p}{1 + \varepsilon \cos\theta}$, *parametri* $p = \varepsilon s$.

33. **a)** Merkitse $x = r(\theta)\cos r(\theta)$, $y = r(\theta)\sin r(\theta)$ ja laske

$$\Big(\frac{ds}{d\theta}\Big)^2 = \Big(\frac{dx}{d\theta}\Big)^2 + \Big(\frac{dy}{d\theta}\Big)^2.$$

b) i) 8, ii) $\frac{3}{2}\pi$.

c) i) $\frac{4}{3}\pi^3$, ii) $\pi\sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{1}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}\,) \approx 21{,}26$.

34. Olkoot $p = p(t)$ ja $s = s(t)$ petojen ja saaliiden lukumäärät ajanhetkellä t. Olkoot α ja β syntyneiden ja kuolleiden petojen lukumääriin liittyvät verrannolisuuskertoimet, ja olkoot γ ja δ vastaavat saaliiden määriin liittyvät kertoimet. Tällöin

$$\frac{dp}{dt} = \alpha ps - \beta p, \quad \frac{ds}{dt} = \gamma s - \delta ps.$$

35. **a)** Laske $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x+y+z)$. **b)** Laske $(x,y,z)\cdot(x',y',z')$.

36. $\dfrac{av}{b-a}$.

37. $x = 2\sqrt{1+t}$.

38. Saat v:n yhtälöstä

$$1{,}05\frac{d}{e+v} = \frac{d}{e}$$

(miksi?), kun ajan yksikkönä on kuukausi. Miten jatkat?

39. **a)** Jos kappale ("massapiste") kiertää origoa niin, että $\theta = \theta(t)$ on sen vaihekulma ajanhetkellä t, niin sen kulmanopeus $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.

b)

i) $\mathbf{v} = u(\cos\omega t, \sin\omega t) + u\omega t(-\sin\omega t, \cos\omega t)$,

ii) $\mathbf{a} = 2u\omega(-\sin\omega t, \cos\omega t) - u\omega^2 t(\cos\omega t, \sin\omega t)$,

iii) $v = u\sqrt{1+(\omega t)^2}$.

40. **a)**

i) $\mathbf{v} = (-R\omega\sin\omega t, R\omega\cos\omega t, u)$,

ii) $\mathbf{a} = (-R\omega^2\cos\omega t, -R\omega^2\sin\omega t, 0)$.

iii) Radan projektio xy-tasolla on ympyrä $x^2+y^2=R^2$. Projektiot yz- ja xz-tasoilla ovat

$$y = R\sin\frac{\omega z}{u} \quad \text{ja} \quad x = R\cos\frac{\omega z}{u}.$$

b) Rata muistuttaa ruuvin kierrettä.

41. Etelänavalla.

42. **a)** $\mathbf{v} = u\big(1-\cos\dfrac{ut}{r}, \sin\dfrac{ut}{r}\big)$. **b)** $\mathbf{a} = \dfrac{u^2}{r}\big(\sin\dfrac{ut}{r}, \cos\dfrac{ut}{r}\big)$.

43. **a)** $\mathrm{e}^{100}-1\,\mathrm{s} \approx 8{,}5\cdot 10^{35}$ v. (Maailmankaikkeuden iäksi arvioidaan $13{,}7\cdot 10^9$ v.)

b) $\mathrm{e}^{100} \approx 2{,}7\cdot 10^{43}$ m. (Maailmankaikkeuden säteeksi eli alkuräjähdyksessä syntyneen valon kulkemaksi matkaksi arvioidaan $1{,}3\cdot 10^{26}$ m.)

44. Noin $13\,\mathrm{m/s}$.

45. $y = x\tan\alpha - \dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2.$

46. $v = b\sqrt{\dfrac{g}{a}}\sinh\sqrt{\dfrac{g}{a}}\,t.$

47. $y = \dfrac{1}{a}\cosh ax + b.$

49. **a)** $x = \dfrac{v_0\cos\alpha}{\lambda}(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}),\quad y = \dfrac{1}{\lambda}\big(\dfrac{g}{\lambda}+v_0\sin\alpha\big)(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}) - \dfrac{g}{\lambda}t.$

b) $y = \big(\dfrac{g}{\lambda v_0\cos\alpha}+\tan\alpha\big)x + \dfrac{g}{\lambda^2}\ln\big(1-\dfrac{\lambda x}{v_0\cos\alpha}\big).$

50. Noin $24\,\mathrm{m/s^2}$.

51. Noin $99\,\%$.

52. **a)** $\frac{5}{8}mgr$. **b)** Symmetria-akselilla etäisyydellä $\frac{5}{8}r$ pallopinnasta.

53. Jos heilurin pituus on l, niin heilahdusaika

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\phi}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

54. **a)** $x = r(\theta - \sin\theta)$, $y = r(1+\cos\theta)$.

b) Kysytty aika $T = \pi\sqrt{\dfrac{r}{g}}.$

55. **a)** $U = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t$, $T = \frac{1}{2}kA^2\sin^2\omega t$. **b)** $U + T = \frac{1}{2}kA^2 = \text{vakio}$.

56. **a)** $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \lambda\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0.$

b) Jos λ on k:hon verrattuna suuri, niin harmonista liikettä vastustava voima tulee niin suureksi, ettei värähtelyä pääse syntymään.

57. **a)** $\mathbf{a} = (a\omega^2\sinh\omega t, b\omega^2\cosh\omega t) = \omega^2\mathbf{r}$. **b)** On.

58. Noin 200 min.

59. Noin 50 v.

60. Esimerkiksi laskemalla $m = gr^2/\gamma$, missä r on maapallon säde. (Miten r voidaan määrittää?)

61. 0,109.

62. a) $v_2 = \sqrt{\dfrac{2\gamma M}{r}} \approx 11200\,\mathrm{m/s}.$

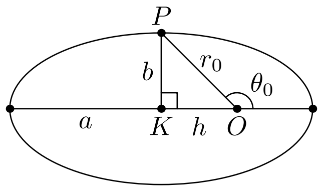
b) $v_1 = \sqrt{\dfrac{\gamma M}{r}} \approx 7900\,\mathrm{m/s}.$

63. Noin $1{,}70 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$.

64. Noin $9\,\mathrm{mm}$.

65. a) Osoita, että kuvion merkinnöillä

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}, \quad h = \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}, \quad b^2 = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}.$$



b) Esitä aluksi pintanopeus kiertoajan ja puoliakselien avulla. Miten jatkat?

66. a) Radan yhtälö on

$$r = \frac{\frac{r_0^2 v_0^2}{\gamma M}}{1 + \left(\frac{r_0 v_0^2}{\gamma M} - 1\right)\cos\theta}.$$

b) i) $\sqrt{\dfrac{\gamma M}{r_0}} < v_0 < \sqrt{\dfrac{2\gamma M}{r_0}},$

ii) $v_0 = \sqrt{\dfrac{2\gamma M}{r_0}}$ (vrt. teht. 62a),

iii) $v_0 > \sqrt{\dfrac{2\gamma M}{r_0}}.$

c) $v_0 = \sqrt{\dfrac{\gamma M}{r_0}}$ (vrt. teht. 62b).

67. Noin 116 tuntia.

68. **a)** i) $-\gamma\dfrac{mM}{a^2}$, ii) 0.

b) Olkoon pallon tiheys ρ ja massa M. Osoita, että jos $a > r$, niin

$$\int_0^r \frac{\gamma m 4\pi s^2 \rho \mathrm{d}s}{a^2} = \gamma \frac{mM}{a^2}.$$

Mitä päättelet tästä?

69. Kysytty aika on $\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = 42$ minuuttia.

70. **b)** ja **c)** Käyrä $u = f(x - ct)$ saadaan siirtämällä käyrää $u = f(x)$ ct:n verran x-akselin positiiviseen suuntaan. Siis myös koko "aalto" liikkuu tällä tavalla.

72. **a)** Reunaehto estää värähtelyn tukipisteissä, joten aalto heijastuu niistä takaisin. **b)** $\mu = -n^2$, missä $n \in \mathbb{Z}_+$.

75. **a)** Painetta. **b)** Nopeutta.

76. **a)** Näytä, että $\rho = \frac{M}{\mathrm{R}T}p$, missä M on moolimassa. **b)** Noin 28,84 g/mol.

77. **b)** $p_1 V_1 \ln \dfrac{V_2}{V_1}$.

78. **a)** $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{Mg}{\mathrm{R}T}p$ (M = moolimassa).

b) $p = p_0 \mathrm{e}^{-\frac{Mg}{\mathrm{R}T}x}$.

c) $x = \dfrac{\mathrm{R}T}{Mg} \ln \dfrac{p_0}{p}$.

79. $p = p_0 \exp\left(-\dfrac{M}{\mathrm{R}T}\dfrac{\gamma m}{r}\dfrac{x}{r+x}\right)$, $\exp x = \mathrm{e}^x$.

80. Noin $5{,}3 \cdot 10^{18}$ kg.

81. **a)** $106{,}8\,\mathrm{cm}^2$. **b)** $107{,}4\,\mathrm{cm}^2$.

84. **a)** $\frac{7}{12}$. **b)** $\frac{43}{60}$.

87. **a)** 0. **b)** 2π.

88. Joko laske integraali kahta sopivasti valittua tietä pitkin tai käytä tehtävässä 85 mainittua lausetta.

89. Joko osoita, että integroitava on funktion $f(p, V) = \mathrm{R} \ln (p^{C_V} V^{C_p})$ kokonaisdifferentiaali, tai käytä tehtävässä 85 mainittua lausetta.

92. πab.

94. Ei ole. Hyvin korkeissa lämpötiloissa atomien elektronirakenteet hajoavat, kaasu muuttuu plasmaksi, eivätkä kaasulait ole enää voimassa.

95. ”Mikkihiiren” tai ”pikkuoravien” ääneltä. Millainen on äänen nopeus heliumissa verrattuna nopeuteen ilmassa?

96. Millainen on ääniaaltojen rintama, kun lentokoneen nopeus on pienempi kuin äänen? Miten se muuttuu nopeuden kasvaessa? Millainen se on, kun kone lentää äänen nopeudella? Mitä tapahtuu, kun koneen nopeus ylittää äänen nopeuden?

97. **b)** $c = \lambda f$.

98. 0,782 m.

99. **a)** Taajuudella $\dfrac{c}{c - v} f$.

b) Taajuudella $\dfrac{c}{c + v} f$.

Asiahakemisto

Henkilöhakemisto