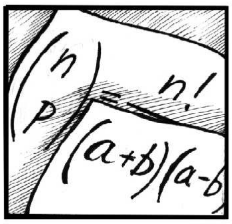

Oliko vuosi 2009 sittenkin tylsä?

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Solmussa 3/2009 julkaistiin parikymmentä koululaiskilpailutehtävää, joita yhdisti luku 2009, ja toivottiin niihin lukijoiden ratkaisuja. Solmun postilaatikon ei voi sanoa pullistelleen palautteen määrästä. Iloisen poikkeuksen muodosti **Matti Leinonen** Espoosta, joka lähetti melkein kaikkiin tehtäviin oikean ratkaisun. Useimmat seuraavista ratkaisuista noudattavat Leinosen suuntaviivoja.

Ratkaisuissa käytetään lukuteorian ja logiikan kurssista tuttua lukukongruenssiformalismia. Muutaman tehtävän ratkaisussa turvaudutaan Eulerin ϕ-funktion ominaisuuteen, joka ei kuulu Suomessa lukioissa opiskeltavan lukuteorian kurssin piiriin. Tulos sinänsä on melko helppo muotoilla: jos n on positiivinen kokonaisluku, niin $\phi(n)$:llä merkitään niiden lukujen k, $1 \le k \le n-1$, lukumäärää, joilla ei ole muuta yhteistä tekijää luvun n kanssa kuin 1. Siis esimerkiksi $\phi(3) = 2$ ja $\phi(8) = 4$. Luvulla $\phi(n)$ on seuraava merkillinen ominaisuus: jos a:lla ja n:llä ei ole yhteisiä tekijöitä, niin luku $a^{\phi(n)} - 1$ on jaollinen n:llä. – Tämän asian sinänsä melko yksinkertaiseen todistukseen palataan Solmussa myöhemmin.

Mutta nyt 2009-tehtävien ratkaisut.

1. Olkoon $D = \underbrace{111\ldots1}_{2009\ \text{kpl}}$. Koska $A = 10^{2009} - 1 = 9D$ ja $B = \frac{4}{9}(10^{2009} - 1)$, niin $AB = \frac{4}{9}\left(10^{2009} - 1\right)^2 = \frac{4}{9}\left(10^{4018} - 2 \cdot 10^{2009} + 1\right) = 4D \cdot 10^{2009} - 4D$. Siis

$$C = \underbrace{444\ldots4}_{2009\ \text{kpl}}\underbrace{000\ldots0}_{2009\ \text{kpl}} - \underbrace{444\ldots4}_{2009\ \text{kpl}} = \underbrace{444\ldots4}_{2008\ \text{kpl}}3\underbrace{555\ldots5}_{2008\ \text{kpl}}6.$$

Viimeinen luku saadaan normaalilla ”vähennyslaskulla allekkain”. C:n numeroiden summa on siis $2008 \cdot (4 + 5) + 3 + 6 = 2009 \cdot 9 = 18081$.

2. Koska luvuilla n ja $n + 1$ ei ole yhteisiä tekijöitä, yhtälö voi toteutua vain, jos $2009 = 7^2 \cdot 41$ on jaollinen luvulla n^2. Tämä on mahdollista, jos $n = 1$ tai $n = 7$. Jos $n = 1$, niin $m = 4018$. Jos $n = 7$, $m = 8 \cdot 41 = 328$.

3. a) Koska $10^k \equiv 1 \mod 9$ kaikilla k, tehtävän luku on modulo 9 sama kuin $1^2 + 2^2 + \cdots + 2009^2$. Nyt $(9k + 1)^2 + (9k + 2)^2 + \cdots + (9(k + 1))^2 \equiv 1 + 4 + 0 + 7 + 7 + 0 + 4 + 1 + 0 = 24 \equiv 6 \mod 9$ ja koska $2009 = 223 \cdot 9 + 2$ ja $223 \equiv 7 \mod 9$, $1^2 + 2^2 + \cdots + 2009^2 \equiv 223 \cdot 6 + 2008^2 + 2009^2 \equiv 7 \cdot 6 + 1 + 4 \equiv 2$ mod 9. Mikään neliöluku ei ole 2 modulo 9, joten väite on tosi.

b) Samasta syystä kuin edellisessä kohdassa tutkittava luku on modulo 9 sama kuin $1 + 2 + \cdots + 2009 = 1005 \cdot 2009 \equiv 6 \cdot 2 \equiv 3$. Mikään neliöluku ei ole 3 modulo 9.

4. Pelin voittaa aina jompikumpi pelaajista. Pelaajalla B on seuraavanlainen voittostrategia: 1) Jos jossain neliössä on kolme keltaista sivua ennen B:n vuoroa, hän värittää tämän neliön neljännen sivun ja voittaa. 2) Jos tätä mahdollisuutta ei ole, B värittää sivun, joka on symmetrinen ruudukon keskipisteen suhteen sen sivun kanssa, jonka A viimeksi väritti. Osoitetaan, että ellei B voi tehdä askelta 1), hän voi aina tehdä askeleen 2). Ellei näin olisi, A olisi edellisellä siirrollaan voittanut eli värittänyt neljännen sivun eräästä neliöstä; olkoon tämä neliö $CDEG$ ja olkoon A:n viimeksi värittämä sivu CD. Tällöin B on värittänyt sivuista DE, EF ja FC viimeksi väritetyn, esimerkiksi DE:n, sillä jos tämä olisi ollut A:n värittämiä, olisi B:n ollut mahdollista käyttää askelta 1) sen vuoron jälkeen, jona A väritti kolmannen sivun. Tarkastellaan nelikulmion $CDEF$ symmetrianelikulmiota $C'E'D'F'$ (ruudukon keskipisteen suhteen). Koska B on aina värittänyt symmetrisen sivun, A oli viimeistä edellisellä vuorollaan värittänyt $D'E'$:n. Mutta koska CF ja FE jo olivat väritetyt, niin olivat myös $C'F'$ ja $F'E'$. A:n viimeistä edellisen siirron jälkeen B olisikin voittanut värittämällä $C'D'$:n! Oletus, että A voittaa, johtaa siis ristiriitaan. – Sama päättely voidaan soveltaa myös tilanteeseen, jossa $ABCD$ on ruudukon keskimmäinen ruutu.

5. Oppilas ottaa ensin a_1 palaa ja pilkkoo ne. Nyt hänellä on $7 - a_1 + 7a_1 = 7 + 6a_1$ palaa. Kun hän valitsee niistä a_2 ja pilkkoo ne seitsemään osaan, hänellä on $7 + 6a_1 - a_2 + 7a_2 = 7 + 6(a_1 + a_2)$. Induktiolla nähdään, että palojen määrä on aina $7 + 6k$. Jos olisi $7 + 6k = 2009$, olisi $2002 = 6k$. Koska 2002 ei ole jaollinen kolmella, tämä tilanne ei voi toteutua.

6. Jos (x, y, z) on yhtälön ratkaisu, niin $99(x+y+z) \le 2009 \le 101(x+y+x)$. Koska $\frac{2009}{99} < 21$ ja $\frac{2009}{101} > 19$, on oltava $x+y+z = 20$. Kun tehtävän yhtälö kirjoitetaan muotoon $100(x+y+z)+z-x = 2009$, nähdään, että $z = x+9$. Yhtälöstä $x+y+z = 20$ saadaan nyt $2x+y = 11$. Koska $y \ge 1$, on oltava $1 \le x \le 5$. Kun annetaan x:lle arvot 1, 2, 3, 4, 5 saadaan yhtälön ratkaisut (1, 9, 10), (2, 7, 11), (3, 5, 12), (4, 3, 13) ja (5, 1, 14).

7. Laskemista helpottaa havainto $\sqrt{2010 \pm 2\sqrt{2009}} = \sqrt{2009 \pm 2\sqrt{2009} + 1} = \sqrt{\left(1 \pm \sqrt{2009}\right)^2} = \sqrt{2009} \pm 1$. Koska $1 + \sqrt{2009}$ on yhtälön $x^2 + ax + b = 0$ ratkaisu, on $2010 + 2\sqrt{2009} + a\left(1 + \sqrt{2009}\right) + b = 0$. Koska a ja b ovat kokonaislukuja ja $\sqrt{2009}$ on irrationaaliluku, on oltava $(a+2)\sqrt{2009} = 0$ eli $a = -2$. Tästä seuraa $b = -2008$. Yhtälön $x^2 - 2x - 2008 = 0$ juurien summa on 2; kun toinen juuri on $1 + \sqrt{2009}$, toisen juuren on oltava $1 - \sqrt{2009}$. $\sqrt{2009} - 1$ ei voi olla yhtälön ratkaisu.

8. Oletetaan ensin, että $0 < n < 53$. Vasemmanpuolinen epäyhtälö on triviaalisti tosi ja oikeanpuolinen on yhtäpitävä epäyhtälön $2009 \le (53-n)^2$ eli epäyhtälön $\sqrt{2009} < 53 - n$ kanssa. Nyt $44^2 = 1936 < 2009 < 2025 = 45^2$. Epäyhtälö ei toteudu, kun $53 - n \le 44$ eli $n \ge 9$, mutta toteutuu, kun $53 - n \ge 45$ eli $n \le 8$. Olkoon sitten $53 < n$. Epäyhtälö on nyt yhtäpitävä epäyhtälön $(n-53)^2 < 2009 < 53(n-53)$ kanssa. Oikeanpuolisen epäyhtälön nojalla $n > \frac{2009 + 53^2}{53} = 90\,\frac{48}{53}$, joten $n \ge 91$. Vasemmanpuolisen epäyhtälön nojalla $n < 53 + \sqrt{2009} = 97 + (\sqrt{2009} - 44)$. Koska viimeinen suluissa oleva erotus on positiivinen, mutta < 1, $n \le 97$. Epäyhtälön toteuttavat siis luvut 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 91, 92, 93, 94, 95, 96 ja 97.

9. Koska $2009 = 223 \cdot 9 + 2$, tehtävässä tarkastelluissa luvuissa on ainakin 224 numeroa. Etsitään pienintä ehdot täyttävää lukua 224-numeroisten lukujen joukosta, ts. tarkastellaan lukuja $x = \overline{c_{223}c_{222}\ldots c_1c_0}$, missä $0 \le c_k \le 9$. Jotta numerosumma 2009 saavutettaisiin, on oltava $c_{223} \ge 2$. Jos olisi $c_{223} = 2$, kaikki muut numerot olisivat yhdeksikköjä. Silloin $x = 3 \cdot 10^{223} - 1$. Koska Fermat'n pienen lauseen nojalla $10^6 \equiv 1 \mod 7$ ja 222 on jaollinen kuudella, niin $10^{223} = 10 \cdot 10^{222} \equiv 10 \equiv 3 \mod 7$. Siten $3 \cdot 10^{223} - 1 \equiv 9 - 1 \equiv 1 \mod 7$, joten x ei ole jaollinen 7:llä eikä siis varmasti myöskään luvulla $2009 = 7^2 \cdot 41$. Oletetaan sitten, että olisi $c_{223} = 3$. Tällöin luvun muut numerot ovat yhdeksikköjä, paitsi että joukossa on yksi kahdeksikko. Siis

$$x = 3\underbrace{999\ldots9}_{222-i\text{ kpl}}8\underbrace{99\cdots9}_{i\text{ kpl}} = 4 \cdot 10^{223} - 1 - 10^i.$$

Helppo lasku osoittaa, että luvut 10, 10^2, 10^3, 10^4 ja 10^5 ovat modulo 41 kongruentteja lukujen 10, 18, 16, 37 ja 1 kanssa. Näin ollen $10^{5k+l} \equiv 10^l \mod 41$, joten $4 \cdot 10^{223} \equiv 4 \cdot 16 \equiv 23 \mod 41$ ja $x \equiv 22 - 10^i \mod 41$. Edellisen perusteella x ei ole jaollinen 41:llä eikä siis myöskään 2009:llä.

Jatketaan yritystä. Oletetaan, että $c_{223} = 4$. Muut numerot ovat yhdeksikköjä, paitsi että mukana on joko kaksi kahdeksikkoa tai yksi seitsemän. Joka tapauksessa $x = 5 \cdot 10^{223} - 1 - 10^i - 10^j$, missä voi olla $i = j$. Nyt saadaan $x \equiv 38 - (10^i + 10^j) \mod 41$. x on jaollinen 41:llä, jos $\{i, j\} = \{0, 4\} \mod 5$. Tästä nähdään, että $i \ne j$ ja $i, j \le 220$. Mahdollisimman pienen luvun löytämiseksi tutkitaan tapausta $j = 220$. Silloin on oltava $i \equiv 4 \mod 5$. Pyritään löytämään sellainen i, että x on jaollinen 49:llä. Alussa mainitun Eulerin lauseen perusteella tiedetään, että $10^{\phi(49)} = 10^{42} \equiv 1 \mod 49$. Jos d on pienin positiivinen kokonaisluku, jolle $10^d \equiv 1 \mod 49$, niin d on luvun $\phi(49) = 42$ tekijä. Lasketaan modulo 49: $10^1 \equiv 10$, $10^2 \equiv 2$, $10^3 \equiv 20$, $10^6 \equiv 400 \equiv 8$, $10^7 \equiv 80 \equiv 31$, $10^{14} \equiv 31^2 = 961 \equiv 30$ ja $10^{21} \equiv 31 \cdot 30 = 930 \equiv 48$. Pienin k, jolla $10^k \equiv 1 \mod 49$ on siis 42. Nyt $x \equiv 5 \cdot 10^{13} - 10^{10} - 1 - 10^i \equiv 31 - 10^i \mod 49$. x on jaollinen 49:llä, jos $10^i \equiv 31 \equiv 10^7 \mod 49$. Tämä on mahdollista, jos $i \equiv 7 \mod 42$. Mutta on myös oltava $i \equiv 4 \mod 5$. Molemmat ehdot täyttää vain luku $i = 49$. Kysytty luku on siis

$$x = 4998\underbrace{999\ldots9}_{170\text{ kpl}}8\underbrace{999\ldots9}_{49\text{ kpl}}.$$

10. Tehtävä oli epätarkasti muotoiltu. Kun se luetaan, niin kuin se oli Solmussa 3/2009 kirjoitettu, ratkaisu on tietysti 2007. Ei ole ongelma konstruoida 2007 eri yksikkösäteistä ympyrää, jotka kaikki sisältävät samat kaksi pistettä. Tehtävän laatijan tarkoitus oli ilmeisesti kuitenkin, että punaiset pisteet olisivat niiden sinipistekeskisten yksikköympyröiden *kehällä*. Ratkaistaan tehtävä tässä versiossa. Olkoon pisteistä punaisia p kappaletta ja sinisiä $s = 2009 - p$ kappaletta. Jokainen punainen pistepari voi olla enintään kahdella yksikkösäteisellä ympyrällä. Pistepareja on $\binom{p}{2}$, joten sinisiä pisteitä voi olla enintään $2 \cdot \binom{p}{2} = p(p-1)$ kappaletta. Siis $p + p(p-1) = p^2 \geq 2009$, joten $s \leq 2009 - \sqrt{2009} < 2009 - 44 = 1965$. Siis $s \leq 1964$. Tämä s:n arvo saavutetaan esimerkiksi niin, että valitaan janalta, jonka pituus on alle 2,45 eri pistettä. Pisteparit määrittävät $44 \cdot 45 = 1980$ eri yksikkösäteistä ympyrää, joista jokaisella on tasan yksi pistepari. Valitaan näistä jotkin 1964 ympyrää. Niiden keskipisteet kelpaavat tehtävän sinisiksi pisteiksi.

11. Tässä tehtävässä vuosiluvut ovat vain silmänlumeena. Olkoot a ja b mitä hyvänsä positiivisia lukuja ja olkoon $A = \sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{b+\sqrt{a}}$ ja $B = \sqrt{a+\sqrt{a}} + \sqrt{b+\sqrt{b}}$. Silloin

$$A^2 - B^2 = 2\sqrt{ab + a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + \sqrt{ab}} \\ -2\sqrt{ab + a\sqrt{b} + b\sqrt{a} + \sqrt{ab}}.$$

Koska $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} - a\sqrt{b} - b\sqrt{a} = (a-b)(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0$ ja neliöjuurifunktio on kasvava, on $A^2 \geq B^2$. Jos $a \neq b$, erisuuruus on aito. Tehtävän kahdesta luvusta edellinen on suurempi. (Ero ei ole suuri: alle 3 sadasmiljoonasosaa.)

12. Koska $f(0) = 0$, välttämätön ehto sille, että funktion f jakso olisi 3π on $\cos(3\pi n) \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot 2009\pi}{n^2}\right) = 0$. Tämä toteutuu vain, jos $\sin\left(\frac{3 \cdot 2009\pi}{n^2}\right) = 0$ eli jos $\frac{3 \cdot 2009\pi}{n^2} = k\pi$ jollain kokonaisluvulla k. Luvun $3 \cdot 2009 = 3 \cdot 7^2 \cdot 41$ on oltava jaollinen luvulla n^2. Tämä on mahdollista vain, jos $n = 1$ tai $n = 7$. On helppo nähdä, että 3π todella on funktioiden $\cos(x)\sin(2009x)$ ja $\cos(7x)\sin(41x)$ jakso.

13. Asetetaan ruudukko niin, että kunkin ruudun keskipiste on kokonaislukukoordinaattinen piste, ruudukon keskipiste on $(0, 0)$ ja oikea yläkulma on $(1004, 1004)$; nimetään ruutu sen keskipisteen mukaan. Eräs tapa täyttää ruudukko tehtävän ehtojen mukaisesti on asettaa ykköset ruutuihin, joiden keskipisteet ovat suorilla $y = x + 1004$ ja $y = x - 1005$, ja täyttää kukin vaakarivi ykkösestä oikealle peräkkäisin luvuin. Ruudukon oikean laidan tultua vastaan jatketaan täyttöä samalta riviltä vasemmasta laidasta. Ruudussa $(-502, 502)$ on ykkönen. Ruudun etäisyys keskeltä on 502 (siihen pääsee 502:lla kuninkaan siirrolla, joista jokainen tapahtuu vinottain). Voidaan helposti laskea, että etäisyys jokaiseen muuhun ykkösruutuun on suurempi kuin 502. Osoitetaan sitten, että jokaisessa numeroiden sijoittelussa on ainakin yksi ykkösruutu, jonka etäisyys keskeltä on enintään 502. Ruudukon ylimmillä 502 rivillä ja alimmilla 502 rivillä on yhteensä 1004 ykköstä, samoin ruudukon 502 vasemmanpuolisimmassa sarakkeessa ja 502 oikeanpuolisimmassa sarakkeessa on yhteensä enintään 1004 ykköstä. Ainakin yksi ykkönen on silloin alueella, joka ei sisälly kumpaankaan edellä kuvattuun, eli siinä 1005×1005-neliössä, jonka keskipiste on keskimmäinen ruutu. Tämän neliön jokaisen ruudun etäisyys keskeltä on enintään 502.

14. Olkoon $f(x) = (x-A)(x-B)(x-C)$, missä A, B ja C ovat kokonaislukuja. Jos $|f(34)| = |34-A||34-B||34-C|$ on alkuluku, niin tulon kolmesta tekijästä kaksi on ykkösiä ja kolmas on alkuluku. Voidaan olettaa, että $|34-A| = |34-B| = 1$ ja $|34-C|$ on alkuluku. Luvut 32, 33, 35 ja 36 ovat yhdistettyjä. Siis $C \geq 3$. Nyt $|ABC| \geq 33^2 \cdot 3 = 3267 > 2009$. Tehtävän muut ehdot täyttävä polynomi ei siis täytä ehtoa $|c| \leq 2009$. Tehtävässä vaadittua polynomia ei ole olemassa.

15. Oletetaan, että $F_{20} + 2009 = x^2$ jollain $n \geq 0$ ja kokonaisluvulla $x \geq 0$. Jos $n \geq 41$, niin $F_{20}(n)$ on jaollinen luvulla $n(n-20)(n-40)$. Koska $-20 \equiv 1 \mod 3$ ja $-40 \equiv 2 \mod 3$, $n(n-20)(n-40) \equiv n(n+1)(n+2) \equiv 0 \mod 3$. Koska $2009 \equiv 2 \mod 3$, $x^2 = F_{20}(n) + 2009 \equiv 2 \mod 3$. Tämä on mahdotonta, koska neliöluku on aina $\equiv 0$ tai $\equiv 1 \mod 3$. Tarkastellaan sitten tapauksia $21 \leq n \leq 40$. Nyt $F_{20} = n(n-20)$. Saadaan $2009 = x^2 - n^2 + 20n = x^2 - (n-10)^2 + 100$ eli $23 \cdot 83 = 1909 = x^2 - (n-10)^2 = (x-n+10)(x+n-10)$. Koska $x^2 \geq 2009$, $x \geq 44$, ja $x+n-10 > x-n+10 > 44-40+10 > 1$, ainoa mahdollisuus on

$$\begin{cases} x+n-10 &= 83, \\ x-n+10 &= 23. \end{cases}$$

Tästä ratkaistaan $n = 40$, $x = 53$. Jos sitten $n \leq 20$, niin $F_{20}(n) = n$. Yhtälön $n + 2009 = x^2$ ainoa ratkaisu on nyt $n = 16$, $x = 45$. Tehtävällä on siis kaksi ratkaisua $n = 40$ ja $n = 16$.

16. Luvuilla 40 ja 2009 ei ole yhteisiä tekijöitä. Voidaan käyttää hyväksi alussa mainittua Eulerin funktiota ϕ. Pätee $40^{\phi(2009)} \equiv 1 \mod 2009$, ($\phi(2009)$:n arvolla ei ole ratkaisun kannalta merkitystä; se sattuu olemaan 1680.) Ainakin, kun $n > \phi(2009)$, $a_n \equiv a_{n-1} + 1 \mod 2009$. Tämä merkitsee, että jonon a_n lukujen jakojäännökset käyvät läpi järjestyksessä kaikki eri mahdolliset arvot jaksollisesti ja äärettömän monta kertaa. Erityisesti jakojäännös 0 tulee jonossa vastaan äärettömän monta kertaa.

17. Jos kahdella aritmeettisella jonolla on sama erotus ja jos niillä on yksikin sama termi, niin jonot jatkuvat tästä termistä alkaen samoina. Ne eivät siis voi olla olennaisesti eri jonoja. Tehtävässä kysytään siis aritmeettisia jonoja, joilla on eri erotus. Jos tehtävän geometrinen jono on b, bq, bq^2, bq^3, $\ldots$, niin $bq^2 = 40 \cdot 2009 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 41$. On kolme mahdollisuutta: $q = 2$, $q = 7$ tai $q = 2 \cdot 7 = 14$. Vastaavasti $b = 2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 41$, $b = 2^3 \cdot 5 \cdot 41$ tai $b = 2 \cdot 5 \cdot 41$. Koska myös b ja bq ovat aritmeettisen jonon jäseniä, $bq - b = b(q-1)$ on jonon erotuksen monikerta. Jos $b(q-1)$ on aritmeettisen jonon erotuksen monikerta, niin $bq^n - b$ on myös erotuksen monikerta (koska $q^n - 1$ on jaollinen $q - 1$:llä). Näin ollen olennaisesti erilaisten, tehtävän ehdon täyttävien aritmeettisten jonojen lukumäärä saadaan laskemalla lukujen $b(q-1)$ eri tekijöiden lukumäärä edellä mainituissa kolmessa tapauksessa. Ensimmäisessä tapauksessa $b(q-1) = 2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 41$, toisessa $b(q-1) = 6 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 41 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 41$ ja kolmannessa $b(q-1) = 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 41$. Luvulla $2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 41$ on 24 tekijää, luvulla $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 41$ 40 tekijää ja luvulla $2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 41$ on 16 tekijää. Lukujen suurin yhteinen tekijä on $2 \cdot 5 \cdot 41$; sen 8 tekijää ovat tekijöinä jokaisessa luvussa ja ainoat tekijät, jotka ovat yhteisiä missään kahdessa luvuista. Kolmella luvulla on siis eri tekijöitä kaikkiaan $8 + (24-8) + (40-8) + (16-8) = 64$ kappaletta. Tämä on myös kysytty olennaisesti erilaisten tehtävän ehdon täyttävien aritmeettisten jonojen lukumäärä.

18. Jos käytetään enintään 14:ää postimerkkiä, niin voidaan maksaa enintään $14 \cdot 143 = 2002$ sentin maksuja. Jos käytetään 15:ttä merkkiä, niin maksettavien arvojen on oltava ainakin $15 \cdot 134 = 2010$ senttiä. Kaikki arvot x, $2010 \le x \le 2145 = 15 \cdot 143$ voidaan muodostaa 15:stä merkistä. Kaikki arvot, jotka ovat suurempia kuin 2145 senttiä ovat (esimerkiksi) muotoa $x + n \cdot 134$, missä $2010 \le x \le 2145$ ja n positiivinen kokonaisluku. Näin ollen suurin arvo, jota merkeistä ei voi muodostaa, on 2009.

19. Olkoon $d \neq 0$ aritmeettisen jonon peräkkäisten termien erotus. Silloin $a_2 = 1 + d$, $a_5 = 1 + 4d$ ja $a_{11} = 1 + 10d$. Koska a_2, a_5 ja a_{11} muodostavat geometrisen jonon, $a_5^2 = a_2 a_{11}$ eli $(1+4d)^2 = (1+d)(1+10d)$ eli $6d^2 = 3d$ eli $d = \dfrac{1}{2}$. Jonon 2009 ensimmäisen termin summa on $2009 \cdot \dfrac{1 + (1 + 1004)}{2} = 1010527$.

20. Yhtälön oikean puolen eksponentissa olevan aritmeettisen jonon summa on $1005 \cdot \dfrac{1 + 2009}{2} = 1005^2$. Koska $121 = 11^2$, todistettava yhtälö on $1005^{2 \ln 11} = 11^{2 \ln 1005}$ eli $e^{(\ln 1005) \cdot 2 \cdot \ln 11} = e^{(\ln 11) \cdot 2 \cdot \ln 1005}$. Koska eksponentit ovat samat, yhtälö on tosi.