Mitä todistaminen on ja ei ole – erään kilpailutehtävän opetuksia

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Syksyn 2009 Lukion matematiikkakilpailun ensimmäisen kierroksen avoimen sarjan tehtävä 2 oli seuraava:

”Kolmion sivujen pituudet muodostavat geometrisen jonon, jonka suhde on q. Osoita, että $\sqrt{5}-1 < 2q < \sqrt{5}+1$.”

Osallistuin kilpailuvastausten arviointiin, ja seuraavat sinänsä triviaalit havainnot kuvaavat mielestäni jonkin verran matematiikan kulmakiven, loogisen päättelyn, osaamisen ongelmallisuutta ja sitä, että pitkänkin ”matematiikan” laskentopainotteisesta opetuksesta se paljolti loistaa poissaolollaan. Kilpailun osallistujien voi arvella edustavan yleensä lukiolaisten matematiikan osaamisen kärkipäätä.

Tehtävä oli ajateltu ratkaistavaksi suunnilleen näin: jos kolmion sivut ovat a, qa ja q^2a ja jos $q \geq 1$, niin q^2a kolmion pisimpänä sivuna on lyhempi kuin kahden muun sivun yhteispituus. q toteuttaa siis epäyhtälön $q^2 < 1+q$. Tämä epäyhtälö ratkaistaan totutulla tavalla; epäyhtälön ratkaisu on ylöspäin aukeavan paraabelin q^2-q-1 nollakohtien $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ rajaama väli, mutta oletus $q \geq 1$ rajaa ratkaisujoukoksi välin $\left[1,\ \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right]$. Jos taas $q < 1$, niin kolmion pisin sivu on a ja kolmioepäyhtälö johtaa epäyhtälöön $1 < q + q^2$. Tämän yhtälön ratkaisuja ovat ylöspäin aukeavan paraabelin q^2+q-1 nollakohtien $q = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ rajaaman suljetun välin komplementin luvut. Lisäehdon $0 < q < 1$ mukaisesti ratkaisuja ovat väliin $\left(\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1),\ 1\right)$ kuuluvat luvut q. Todistus on valmis. Jakoa $q \geq 1$, $q < 1$ ei tietenkään tarvitse tehdä. Molempien kolmioepäyhtälöiden $q^2 < 1+q$ ja $1 < q+q^2$ on joka tapauksessa toteuduttava ja q:n on kuuluttava yhtälöiden ratkaisujoukkojen leikkaukseen, joka juuri on tehtävässä todistettavaksi vaadittu ehto.

Melko useat kilpailijat vastasivat suunnilleen näin: ”Jos $q = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, niin

$$q^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1+q.$$

Mutta ”kolmiossa”, jonka sivut ovat a, qa ja q^2a, pisin sivu on yhtä pitkä kuin lyhempien sivujen summa, eli kolmio onkin janaksi surkastunut eikä siis ole kolmio. Samoin, jos $q = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, niin

$$q^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1-q.$$

Kolmiossa, jonka sivut ovat a, qa ja q^2a pisin sivu a on yhtä pitkä kuin sivujen qa ja q^2a summa, joten tämäkin kolmio surkastuu epäkolmioksi. Koska väitetyn q:ta koskevan epäyhtälön ääripäissä ei saada kolmiota, on väitös todistettu!”

Mutta mitä tässä onkaan todistettu? Että tehtävän kolmioita määrittävä parametri ei saa arvoja $\dfrac{\sqrt{5}\pm 1}{2}$. Tämä on tosin askel oikeaan suuntaan: väitteenhän todistaisi se, että *epäyhtälöt* $q \le \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ ja $q \ge \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ ovat asetetussa tilanteessa mahdottomia.

Muutamat kilpailijat esittivät huomattavasti sofistikoituneemman ratkaisuehdotuksen. "Voimme olettaa, että kolmiossa ABC on $AB = 1$, $BC = q$ ja $CA = q^2$. Jos $\angle ABC = \beta$, niin kosinilauseen mukaan $q^4 = q^2 + 1 - 2q\cos\beta$ eli

$$\cos\beta = \frac{-q^4 + q^2 + 1}{2q} = f(q).$$

Tarkastellaan funktiota $f(q)$. Kun $q = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, niin

$$f(q) = \frac{-\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2} + \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} + 1}{1+\sqrt{5}} = -1$$

ja kun $q = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, niin

$$f(q) = \frac{-\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2} + \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} + 1}{-1+\sqrt{5}} = 1.$$

Lisäksi

$$\begin{aligned} f'(q) &= \frac{(-4q^3 + 2q)(2q) - 2(-q^4 + q^2 + 1)}{4q^2} \\ &= \frac{-3q^4 + q^2 - 1}{2q^2}. \end{aligned}$$

Etsitään derivaatan nollakohtia: sijoitus $q^2 = t$ palauttaa ongelman toisen asteen yhtälöön $-3t^2 + t - 1 = 0$; tämän yhtälön diskriminantti on $1 - 12 < 0$, joten nollakohtia ei ole. Derivaatta säilyttää merkkinsä ja $f(1) = -\dfrac{3}{2}$, joten derivaatta on kaikkialla negatiivinen. f on siis aidosti vähenevä funktio, joten

$$-1 = f\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) < f(q) < f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 1,$$

kun $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Johtopäätös: näillä q:n arvoilla $-1 < \cos\beta < 1$, joten kolmio on olemassa."

Miksi tämä ei ole tehtävän ratkaisu? Tietysti siksi, että todistettava väite oli muotoa "kun parametrista q riippuva kolmio on olemassa, niin parametri q kuuluu tiettyyn väliin". Yllä osoitettiin vain, että jos parametri kuuluu väliin, kolmio saattaa olla olemassa; ainakaan kosinilauseen yhden osion kanssa ei jouduta ristiriitaan. Sen sijaan yllä oleva lasku olisi mainiosti antanut mahdollisuuden epäsuoraan todistukseen. Jos oletettaisiin, että kolmio olisi olemassa ja parametri q olisi tehtävässä annetun välin ulkopuolella, funktion f monotonisuus antaisi seurauksen $\cos\beta \ge 1$ tai $\cos\beta \le -1$, jotka kumpikin olisivat ristiriidassa oletuksen kanssa.

Kosinilausetta hyödynsi myös seuraava kaunis ratkaisu. Siinä kolmio ABC on sama kuin edellä, ja $\angle CAB = \alpha$.

"Koska $\cos\alpha < 1$, niin kosinilauseen perusteella $q^2 = q^4 + 1 - 2q^2\cos\alpha > q^4 + 1 - 2q^2$. Siis $q^4 - 3q^2 + 1 < 0$. Sijoitetaan $q^2 = t$ ja ratkaistaan epäyhtälö $t^2 - 3t + 1 < 0$. Vasemman puolen nollakohdat ovat

$$t = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Epäyhtälö toteutuu siis, kun

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} < t < \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Mutta

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$$

ja

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2,$$

joten q on vaaditussa välissä."

Tässä on kaikki kohdallaan, vaikka ensin voi epäilyttää se, että eri relevanttien kolmioepäyhtälöiden tarkastelua vaativia tilanteita $q < 1$ ja $q > 1$ ei käsitellä erikseen. Onnellinen valinta on ollut tarkastella keskimmäisen sivun vastaista kulmaa. Se lähestyy nollaa kummassakin surkastumispäässä, ja johtaa molempien reunojen löytymiseen samasta epäyhtälöstä.