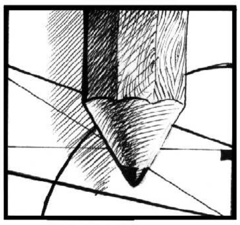
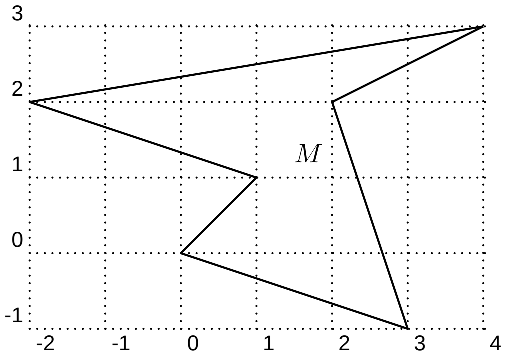


Monikulmion pinta-ala lapsille

Mika Koskenoja
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Tehtävä. Kuusikulmion M kärjet ovat tason pisteissä $(0,0)$, $(3,-1)$, $(2,2)$, $(4,3)$, $(-2,2)$ ja $(1,1)$. Laske M:n pinta-ala.



Olen jo esittänyt tehtävälle Solmussa kaksi hyvin erilaista ratkaisutapaa. Numerossa 1/2009 ilmestynyt kirjoitus ”Monikulmion pinta-ala koululaisille” vaati ainoastaan alkeisgeometrian hallintaa. Toinen kirjoitukseni ”Monikulmion pinta-ala ylioppilaille” ilmestyi numerossa 3/2009. Siinä esitetyssä ratkaisussa käytettiin yliopistomatematiikan alussa opittavia vektorianalyysin perusteita, mutta kirjoituksen seuraamiseen riitti lukion pitkän matematiikan derivointi- ja integrointitaitojen hyvä hallinta.

Hannu Korhonen jatkaa aiheesta kirjoituksessaan ”Lisäys monikulmion pinta-alan laskemiseen”. Hänen hienosti oivalletut ratkaisunsa hyödyntävät geometrian dynaamisia ominaisuuksia.

Ensimmäisen kirjoitukseni otsikon ’koululaisilla’ tarkoitin lähinnä peruskoulun yläluokkien ja lukion oppilaita. Nyt esitettävä Pickin lauseeseen perustuva tehtävän ratkaisutapa on aikaisempien kirjoitusten tapoja yksinkertaisempi. Kirjoituksen otsikon ’lapset’ viittaakin alakouluikäisiin. Pickin lause sopii hyvin myös yläkoulujen ja lukion matematiikan opetukseen, jolloin voidaan tuloksen soveltamisen lisäksi pohtia myös lauseen todistusta.

Pickin lause ja sen todistus

Pickin lauseen avulla voidaan laskea pinta-ala monikulmiolle, jonka kärjet ovat hilapisteissä. *Hilapisteet* ovat tason pisteitä (x, y), joiden koordinaatit x ja y ovat kokonaislukuja. Monikulmio on *yksinkertainen*, jos se on reiätön eikä leikkaa itseään. Kutsumme monikulmiota *hilamonikulmioksi*, jos se on yksinkertainen ja sen kaikki kärjet ovat hilapisteissä. Esimerkiksi tehtävämme kuusikulmio M on hilamonikulmio. Lisäksi sanomme, että hilamonikulmion sisällä olevat hilapisteet ovat sen *sisähilapisteitä* ja hilamonikulmion reunalla olevat hilapisteet sen *reunahilapisteitä.* Sisähilapisteiden lukumäärää merkitsemme I:llä ja reunahilapisteiden lukumäärää B:llä.

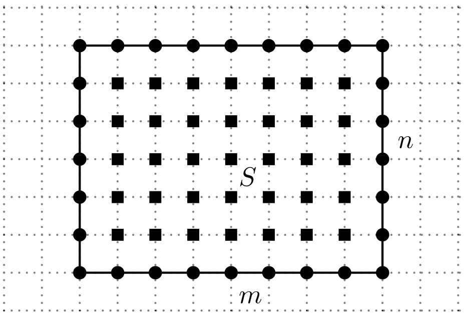
Pickin lause. Olkoon K hilamonikulmio. Tällöin K:n pinta-ala on

$$\operatorname{ala}(K) = I + \frac{B}{2} - 1.$$

Todistus. Todistamme Pickin lauseen vaiheittain edeten suorakulmiosta yleiseen monikulmioon. Tarkastelemme koko ajan vain hilamonikulmioita. Merkitsemme kuvissa monikulmioiden sisähilapisteitä neliöllä (■) ja reunahilapisteitä pallolla (●).

1. Suorakulmio. Osoitetaan ensin, että Pickin lause pätee suorakulmioille, joiden sivut ovat koordinaattiakselien suuntaisia. Yleisesti tällaisen suorakulmion S kanta on m ja korkeus on n, joten sen pinta-ala on

$$\operatorname{ala}(S) = \text{kanta} \cdot \text{korkeus} = mn.$$



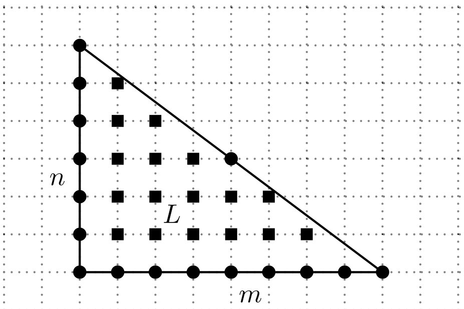
Nyt havaitaan, että suorakulmiossa on sisähilapisteitä $n-1$ vaakarivissä ja $m-1$ pystysarakkeessa, joten $I = (m-1)(n-1)$. Lisäksi havaitaan, että $B = 2m + 2n = 2(m+n)$. Näin ollen

$$\begin{aligned} I + \frac{B}{2} - 1 &= (m-1)(n-1) + \frac{2(m+n)}{2} - 1 \\ &= (mn - m - n + 1) + (m+n) - 1 \\ &= mn, \end{aligned}$$

joka on vaadittu $m \times n$-suorakulmion pinta-ala.

2. Suorakulmainen kolmio. Tarkastellaan sitten suorakulmaisia kolmioita, joiden kateetit ovat koordinaattiakselien suuntaisia. Yleisesti tällaisen kolmion L kanta on m ja korkeus on n, joten sen pinta-ala on

$$\operatorname{ala}(L) = \frac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2} = \frac{mn}{2}.$$



Suorakulmaisen kolmion sisä- ja reunahilapisteiden erottelu ja laskeminen on yleensä muuten selvää, mutta hypotenuusalla ja hypotenuusan lähellä kolmion sisähilapisteiden erotteleminen voi olla hankalaa. Edellä olevassa esimerkkikuvassa hypotenuusalla kärkien välissä on vain yksi reunahilapiste ja kolmion sisähilapisteet on helppo erottaa.

Pickin lauseen todistus suorakulmaiselle kolmiolle ei kuitenkaan edes vaadi hypotenuusan lähellä olevien sisä- ja reunahilapisteiden erottelua. Olkoon nimittäin k reunahilapisteiden lukumäärä hypotenuusalla kärkien välissä (hypotenuusan ja kateettien kohtaamispisteitä ei lasketa mukaan). Tällöin $B = m + n + 1 + k$ ja

$$I = \frac{(m-1)(n-1) - k}{2},$$

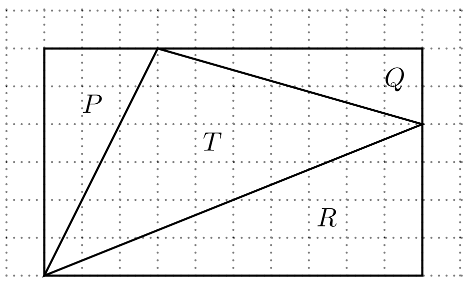
sillä $m \times n$-suorakulmiossa on $(m-1)(n-1)$ sisähilapistettä, josta vähennetään vastaavan suorakulmaisen $m \times n$-kolmion hypotenuusalla sijaisevien reunahilapisteiden lukumäärä k ja näin saatu lukumäärä jaetaan kahdella. Nyt saadaan

$$\begin{aligned} & I + \frac{B}{2} - 1 \\ &= \frac{(m-1)(n-1) - k}{2} + \frac{m + n + 1 + k}{2} - 1 \\ &= \frac{mn}{2} - \frac{m}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{k}{2} + \frac{m}{2} + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} + \frac{k}{2} - 1 \\ &= \frac{mn}{2}, \end{aligned}$$

joka on suorakulmaisen $m \times n$-kolmion pinta-ala.

3. Yleinen kolmio. Osoitetaan seuraavaksi Pickin lause yleiselle kolmiolle, jonka ei siis tarvitse olla suorakulmainen eikä sivujen tarvitse olla koordinaattiakselien suuntaisia.

Jokainen kolmio voidaan täydentää sivuiltaan koordinaattiakselien suuntaiseksi suorakulmioksi liittämällä siihen korkeintaan kolme suorakulmaista kolmiota. Tarkastellaankin siis kolmiota T, joka täydennetään suorakulmioksi liittämällä siihen suorakulmaiset kolmiot P, Q ja R esimerkiksi seuraavassa kuvassa esitetyllä tavalla.



suorakulmio $S = TPQR$

Oletetaan, että kolmiolla T on B_T reuna- ja I_T sisähilapistettä. Vastaavasti kolmioilla P, Q ja R on reunahilapisteitä B_P, B_Q ja B_R sekä sisähilapisteitä I_P, I_Q ja I_R kappaletta. Merkitään kaikkien kolmioiden muodostamaa suorakulmiota $S = TPQR$, sekä sen reuna- ja sisähilapisteiden lukumääriä B_S ja I_S. Koska tiedämme Pickin lauseen olevan voimassa suorakulmioille ja suorakulmaisille kolmioille, niin

$$\begin{aligned}\mathrm{ala}(P) = I_P + \frac{B_P}{2} - 1,\ \mathrm{ala}(Q) = I_Q + \frac{B_Q}{2} - 1,\\ \mathrm{ala}(R) = I_R + \frac{B_R}{2} - 1,\ \mathrm{ala}(S) = I_S + \frac{B_S}{2} - 1.\end{aligned}$$

Kolmioiden reuna- ja sisähilapisteistä saadaan yhtälöt

$$B_P + B_Q + B_R = B_S + B_T$$

ja

$$I_S = I_P + I_Q + I_R + I_T + (B_P + B_Q + B_R - B_S) - 3.$$

Näistä ensimmäinen voidaan kirjoittaa muotoon

$$B_P + B_Q + B_R - B_S = B_T,$$

joka toiseen yhtälöön sijoittamalla johtaa yhtälöön

$$I_S = I_P + I_Q + I_R + I_T + B_T - 3.$$

Nyt saadaan

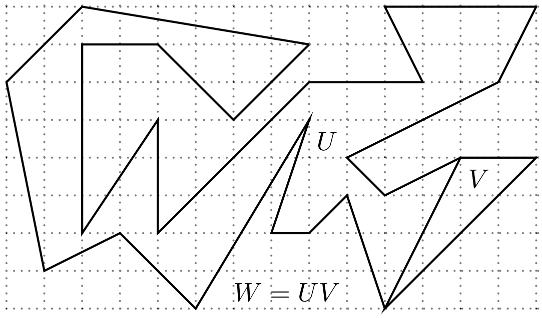
$$\begin{aligned}\mathrm{ala}(T) &= \mathrm{ala}(S) - \mathrm{ala}(P) - \mathrm{ala}(Q) - \mathrm{ala}(R)\\ &= I_S - I_P - I_Q - I_R + \frac{B_S - B_P - B_Q - B_R}{2} + 2\\ &= (I_P + I_Q + I_R + I_T + B_T - 3) - I_P - I_Q - I_R\\ &\quad + \frac{(B_P + B_Q + B_R - B_T) - B_P - B_Q - B_R}{2} + 2\\ &= I_T + B_T - 3 - \frac{B_T}{2} + 2\\ &= I_T + \frac{B_T}{2} - 1,\end{aligned}$$

joten Pickin lause pätee kaikille kolmioille.

4. Yleinen monikulmio. Todistetaan induktiolla n-kulmion kärkien $n \geqslant 3$ lukumäärän suhteen, että Pickin lause pätee mille tahansa monikulmiolle. On jo osoitettu, että tulos on voimassa kolmioille eli 3-kulmioille (*induktion alkuaskel*). Oletetaan, että tulos pätee n-kulmioille, kun $n \geqslant 3$ (*induktio-oletus*). Osoitetaan, että tällöin tulos pätee myös $n+1$-kulmioille (*induktioaskel*).

Yleisesti n-kulmiosta päästään $n+1$-kulmioon kolmion lisäämisellä tai poistamisella. Riittää kuitenkin todistaa induktioaskel vain lisätylle kolmiolle, sillä jokainen $n+1$-kulmio saadaan jostakin n-kulmiosta kolmion lisäämisellä. Tämä ei ole itsestään selvää, mutta melko helppo perustella (ks. [Davis, III.3]).

Tarkastellaan n-kulmiota U ja kolmiota V, kun U:lla ja V:llä on yksi yhteinen sivu. Yhdistämällä U ja V saadaan $n+1$-kulmio $W = UV$ kuten seuraavassa esimerkkikuvassa.



Oletetaan, että Pickin lause on voimassa n-kulmiolle U. Todistuksen alun perusteella tiedetään, että se on voimassa myös kolmiolle V. Merkitään jälleen U:n, V:n ja W:n reuna- ja sisähilapisteiden lukumääriä B_U, B_V ja B_W sekä I_U, I_V ja I_W. Olkoon k monikulmion U ja kolmion V yhteisten reunahilapisteiden lukumäärä. Tällöin

$$I_W = (I_U + I_V) + (k - 2)$$

ja

$$B_W = (B_U + B_V) - 2(k - 2) - 2,$$

joista ensimmäisestä seuraa

$$I_U + I_V = I_W - (k - 2),$$

ja jälkimmäisestä

$$B_U + B_V = B_W + 2(k - 2) + 2.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}\mathrm{ala}(W) &= \mathrm{ala}(U) + \mathrm{ala}(V)\\ &= (I_U + \frac{B_U}{2} - 1) + (I_V + \frac{B_V}{2} - 1)\\ &= (I_U + I_V) + \frac{B_U + B_V}{2} - 2\\ &= I_W - (k - 2) + \frac{B_W + 2(k - 2) + 2}{2} - 2\\ &= I_W + \frac{B_W}{2} - 1.\end{aligned}$$

Pickin lause on näin ollen todistettu. □

Huomautus 1. Solmun 3/2009 kirjoituksessa n-kulmion M pinta-alan kaavaksi johdettiin

$$\mathrm{ala}(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_{i+1} + x_i)(y_{i+1} - y_i)}{2},$$

kun M:n kärjet ovat vastapäivään kiertäen pisteissä $M_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$, ja $x_{n+1} = x_1$ ja $y_{n+1} = y_1$. Havaitsimme kaavasta jo silloin, että hilamonikulmion (kuinka monimutkaisen tahansa) pinta-ala on $k \cdot \frac{1}{2}$, missä $k \in \mathbf{Z}_+$. Sama havainto on helppo tehdä Pickin lauseen kaavasta, koska I ja B ovat positiivisia kokonaislukuja. Kaavahan voidaan esittää muodossa

$$\mathrm{ala}(M) = \frac{2I + B - 2}{2},$$

missä $2I + B - 2 \in \mathbf{Z}_+$.

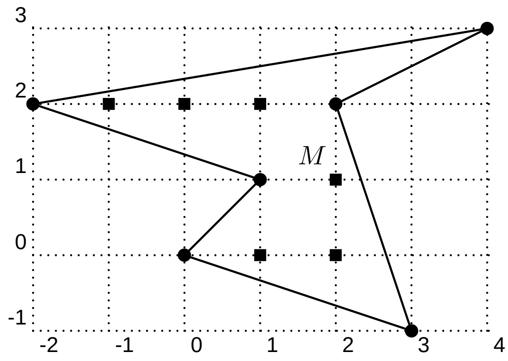
Huomautus 2. Edellä todistamamme Pickin lause on voimassa vain yksinkertaisille monikulmioille, joissa ei saa olla reikiä. Jos monikulmiossa on reikiä, niin Pickin lauseen kaavan loppuun on lisättävä reikien lukumäärä n. Reiällisen hilamonikulmion N pinta-ala on siis

$$\mathrm{ala}(N) = I + \frac{B}{2} - 1 + n,$$

missä n on reikien lukumäärä. Reiällisen hilamonikulmion pinta-alan saa toki laskettua myös niin, että laskee ensin pinta-alan reiättömälle hilamonikulmiolle ja vähentää tuloksesta reikien yhteenlasketun pinta-alan.

Huomautus 3. Tässä kirjoituksessa käsitellään Pickin lausetta tason hilamonikulmioille. Lause voidaan yleistää avaruuden kappaleille ja vielä ylempiin ulottuvuuksiin *Ehrhartin polynomien* avulla.

Tehtävän ratkaisu



Havaitsemme kuvasta, että $I = 6$ ja samoin $B = 6$, joten

$$\mathrm{ala}(M) = I + \frac{B}{2} - 1 = 6 + \frac{6}{2} - 1 = 6 + 3 - 1 = 8.$$

Tulos on tietysti sama kuin muissakin kirjoituksissa eri tavoin laskettu monikulmion M pinta-ala.

Pickin lauseen soveltamisesta

Pickin lauseen käyttö monikulmion pinta-alan laskemisessa vaatii kärkien sijaitsemisen hilapisteissä. Tämä on vahva rajoite, josta kuitenkin saatetaan päästä eroon joidenkin sallittujen operaatioiden jälkeen. Aluksi monikulmiota kannattaa yrittää siirtää yhdensuuntaissiirrolla niin, että mahdollisimman moni kärki asettuu hilapisteisiin. Tällöin monikulmion pinta-ala ei muutu.

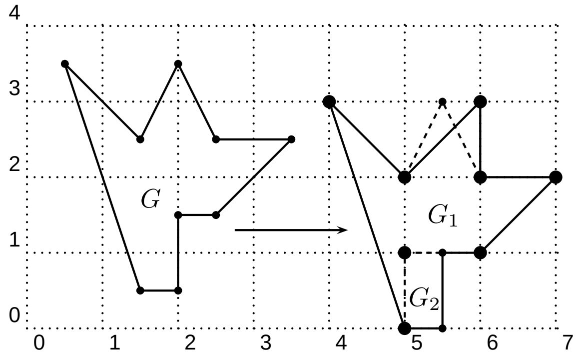
Jos siirron jälkeen osa monikulmion kärjistä ei sijaitse hilapisteissä, mieleen tulee heti kaksi mahdollista tapaa edetä. Ensinnäkin, ositetaan monikulmio sopivasti ja sovelletaan Pickin lausetta vain osaan ositettua monikulmiota. Toiseksi, Hannu Korhosen kirjoituksessaan esille tuomat geometrian dynaamiset ominaisuudet ovat hyödynnettävissä. Osituksen monikulmioita voidaan muuttaa geometrian laskusääntöjen avulla pinta-alat säilyttäen toisiksi monikulmioiksi niin, että muokattujen monikulmioiden kärjet ovat hilapisteissä.

Esimerkki. Seuraavassa kuvassa olevan 9-kulmion G mikään kärki ei ole hilapisteessä. Siirretään G ensin $3\frac{1}{2}$ yksikköä oikealle ja $\frac{1}{2}$ yksikköä alaspäin. Tällöin kuusi kärkeä asettuu hilapisteisiin, loput kolme kärkeä $(5\frac{1}{2}, 0)$, $(5\frac{1}{2}, 1)$ ja $(5\frac{1}{2}, 3)$ sen sijaan eivät. Näin ollen emme voi soveltaa Pickin lausetta ainakaan vielä koko monikulmioon. Siirretään piste $(5\frac{1}{2}, 3)$ puoli yksikköä oikealle pisteeseen $(6, 3)$, jolloin monikulmion pinta-ala ei muutu. Ositetaan monikulmio nyt kahteen osaan G_1 ja G_2, joista G_1:n kaikki kärjet ovat hilapisteissä (merkitty kuvassa isolla pallolla $\bullet$). Jäljelle jäänyt osa G_2 on suorakulmio, jonka pinta-ala on selvästi

$$\mathrm{ala}(G_2) = \tfrac{1}{2}.$$

Pickin lauseen perusteella

$$\mathrm{ala}(G) = \mathrm{ala}(G_1) + \mathrm{ala}(G_2) = (I_{G_1} + \frac{B_{G_1}}{2} - 1) + \tfrac{1}{2}$$
$$= (0 + \tfrac{8}{2} - 1) + \tfrac{1}{2} = 3\tfrac{1}{2}.$$



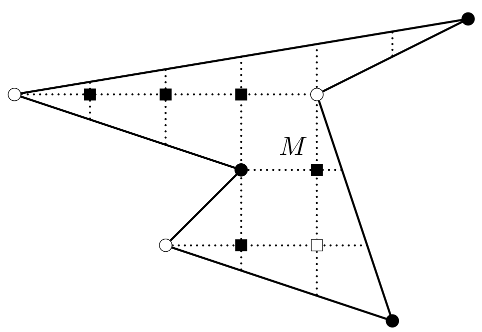
Puuhaa pienille lapsille

Kun käyttää Pickin lausetta monikulmion pinta-alan määräämisessä, ei tarvitse osata muuta kuin lukumäärän laskeminen, lisääminen ja vähentäminen sekä kahteen osaan jakaminen. Toisin sanoen on osattava luonnolliset luvut, yhteen- ja vähennyslasku sekä jakolasku jakajana 2. Perusopetuksen opetussuunnitelman mukaan kaikki nämä opitaan jo vuosiluokilla 1–2, jakolasku kuitenkin ainoastaan "konkreettisilla välineillä". Varsinaisesti jakolaskun ja jaollisuuden oppiminen tapahtuu vasta luokilla 3–5, jolloin opitaan myös pinta-alan käsite.

Valikoiduissa ja sopivasti asetetuissa tehtävissä vaatimus peruslaskutoimitusten osaamisesta on mahdollista kiertää useallakin eri tavalla, joten yksinkertaisimmillaan Pickin lauseen käyttöön riittää pienten lukumäärien laskemisen hallinta. Tehtäviä voikin antaa ratkaistavaksi jo esikoululaisille ja jopa päiväkoti-ikäisille lapsille, jotka osaavat laskea vaikkapa kymmeneen. Pinta-alan käsitteen ymmärtäminen on näin pienille lapsille vielä vaikeaa ja vaillinaista, mutta mielikuvat voivat silti olla aivan oikeita ja opettajan johdattelemana itse keksityt kuvaukset pinta-alasta hyvinkin osuvia ja rikkaita. Pinta-alan puutteellinen ymmärtäminen on matematiikan maailmaan johdattelevassa lasten puuhastelussa kuitenkin sivuseikka eikä estä sitä iloa, joka syntyy kuvion reunalla ja sen sisällä sijaitsevien hilapisteiden havaitsemisesta, erottelusta ja lukumäärien laskemisesta.

Helpoiksi tarkoitetuissa tehtävissä monikulmiot kannattaa valita niin, että niissä on reunahilapisteitä parillinen määrä. Tällöin kahdella jaettaessa pysytään kokonaisluvuissa. Laskemisen helpottamiseksi ohjaaja voi värittää reunahilapisteet vuorotellen punaisiksi ja sinisiksi sekä sisähilapisteet vielä eri värillä, vaikkapa vihreiksi. Koska Pickin lauseen kaavassa lopuksi vähennetään luku yksi, niin on mahdollista menetellä niin, että yhtä sisähilapisteistä ei väritetäkään vihreäksi vaan esimerkiksi keltaiseksi. Tällöin tulee laskea yhteen monikulmion vihreiden sisähilapisteiden lukumäärä ja punaisten reunahilapisteiden lukumäärä. Tulokseksi saadaan ”sisähilapisteiden lukumäärä + reunahilapisteiden lukumäärä jaettuna kahdella − 1”, joka on monikulmion pinta-ala.

Ellei käytettävissä ole värejä, niin reunahilapisteet voi merkitä vuorotellen valkoisella ja mustalla pallolla (○ ja ●) sekä sisähilapisteet neliöllä (■), joista yksi eroavalla tavalla (□). Piirroksissa ei tarvita koordinaatistoa kokonaisuudessaan asteikolla varustettuna, vaan riittää merkitä ruudukko kuvion sisälle, kuten seuraavassa kuvassa. Paksulle väripaperille piirrettäessä kuvion voi leikata irti ja antaa lapsille tutkittavaksi. Reunahilapisteiden kohdalle kannattaa saksilla kiertää pieni ympyrän kaari, jotta pisteet erottuvat.



Paras ja huonoin ratkaisu?

Ei tietenkään ole olemassa yksiselitteisiä kriteereitä, joiden perusteella olisi mahdollisista selvittää, mikä minun ja Hannu Korhosen kirjoituksissa tehtävälle esitetyistä useista ratkaisuista on paras tai huonoin. Asiaa voi kuitenkin pohtia lähestymällä sitä monipuolisesti useasta eri näkökulmasta. Kaikki esitetyt ratkaisut ovat varmasti jollakin koulutasolla ja jossakin opetustilanteessa parhaita.

Jos kriteerinä käytetään ratkaisun yksinkertaisuutta, niin yli muiden nousee tässä kirjoituksessa esitetty Pickin lauseeseen perustuva ratkaisu. Onhan jo tullut todettua, että tällä tavalla tehtävän voi ratkaista kuka tahansa alakoululaisista lähtien.

Samoin perustein yhtä selvää lienee, että tehtävän huonoin ratkaisu on toisessa kirjoituksessa esitetty Greenin lauseesta johdettuun kaavaan perustuva ratkaisu. Sen ymmärtäminen vaatii yliopistomatematiikan opintoja esitiedoikseen. Tosin kirjoituksessa johdetun kaavan soveltaminen onnistuu paljon vähemmillä tiedoilla jo yläkoululaisilta. Kaavan etuna verrattuna Pickin lauseen kaavaan on, että monikulmion kärjet voivat sijaita missä tahansa. Niiden ei tarvitse olla hilapisteissä.

Pickin lauseen tai Greenin lauseesta johdetun kaavan käyttö monikulmion pinta-alan laskemisessa on varsin suoraviivaista, mikä on näiden ratkaisutapojen vahvuus mutta matematiikan opetuksen kannalta myös heikkous. Hannu Korhosen kirjoituksessaan esittämissä ratkaisuissa tarvitaan paljon enemmän luovuutta, mikä on tärkeää oppilaiden matemaattisten taitojen kehittymisessä.

Pickin lauseen tai Greenin lauseesta johdetun kaavan käyttö koulumatematiikassa yläluokilla ja lukiossa ei olekaan ongelmatonta. Jos kyseiset tulokset kuuluisivat opetussuunnitelmiin, niin luultavasti tarvittavat kaavat löytyisivät taulukko- ja kaavakokoelmista. Tällöin niitä käytettäisiin surutta ymmärtämättä lainkaan, miksi pinta-ala saadaan laskettua melko yksinkertaisiin kaavoihin hilapisteiden lukumääriä tai kärkien koordinaatteja sijoittamalla.

Ylempien luokkien opetuksessa tulisikin ensin varmistaa, että oppilaat todella ymmärtävät suorakulmion kannan ja korkeuden tuloon perustuvan pinta-alan käsitteen. Vasta sen jälkeen voidaan pohtia Pickin lauseen tai Greenin lauseesta johdetun kaavan yhteyttä pinta-alaan, joiden ymmärtäminen ei edistyneille oppilaille ole lainkaan vaikeaa. Mainittuja ja muitakin samankaltaisia tuloksia voikin mielestäni hyvin käyttää opetuksen eriyttämisessä. Jo yläkoulun oppilaat osaavat itsekin konstruoida Pickin lauseen todistuksen ainakin erikoistapauksissa (suorakulmio, suorakulmainen kolmio) esimerkiksi geolautojen avulla. Yleisen tuloksen todistus sopii opetukseen mainiosti harjoiteltaessa induktiotodistuksia.

Tehtäviä

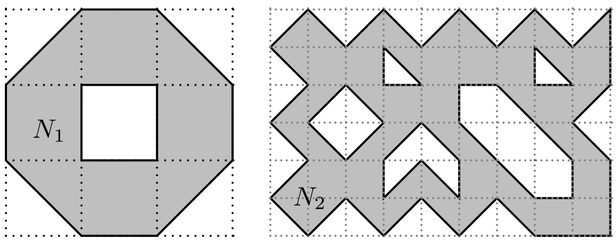
Tehtävä 1. Laske Pickin lauseen todistuksessa esiintyvien esimerkkihilamonikulmioiden S, L, T ja W pinta-alat Pickin lausetta käyttäen.

Tehtävä 2. Osoita, että reiällisen hilamonikulmion N pinta-ala on

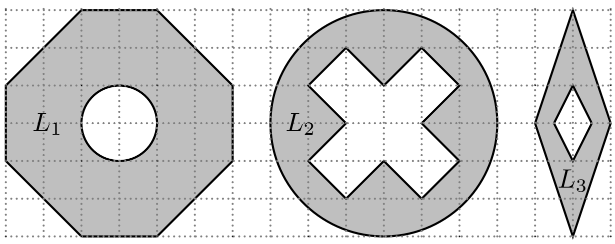
$$\text{ala}(N) = I + \frac{B}{2} - 1 + n,$$

missä n on reikien lukumäärä.

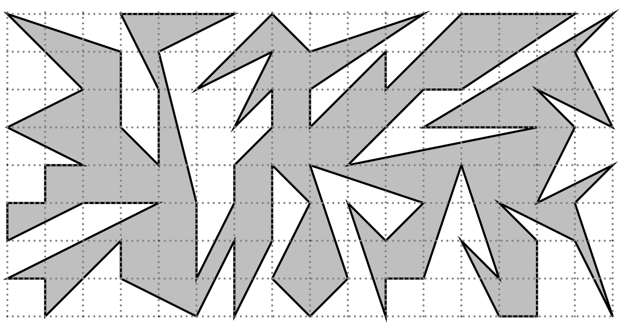
Tehtävä 3. Laske seuraavien reiällisten hilamonikulmioiden N_1 ja N_2 pinta-alat käyttämällä Pickin lauseen yleistystä. Tarkista tuloksesi hilamonikulmioihin sisältyvien yksikköneliöiden ja suorakulmaisten 1-kateettisten kolmioiden lukumäärien perusteella.



Tehtävä 4. Laske seuraavien kuvioiden L_1, L_2 ja L_3 pinta-alat.



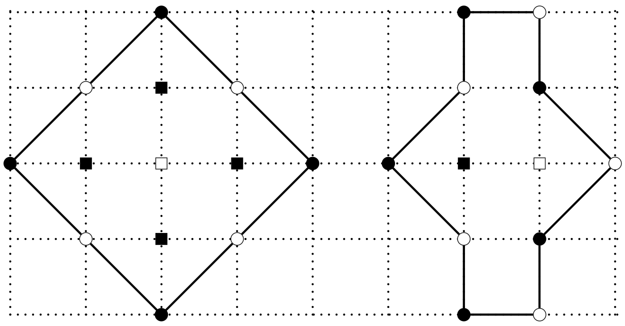
Tehtävä 5. Laske seuraavan hilamonikulmion pinta-ala. Laske pinta-ala myös käyttämättä Pickin lausetta!



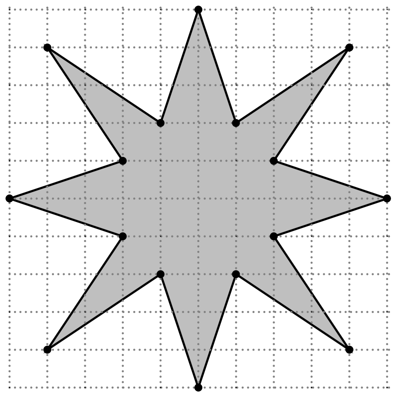
Tehtävä 6. Osoita Pickin lausetta käyttäen, että suorakulmaisen tasakylkisen hilakolmion pinta-ala on $k^2/2$, missä k on kyljen pituus.

Tehtävä 7. Tutkitaan hilasuunnikasta Q, jonka vierekkäiset kulmat ovat 45° ja 135°. Osoita Pickin lausetta käyttäen, että $\text{ala}(Q) = \text{kanta} \cdot \text{korkeus}$.

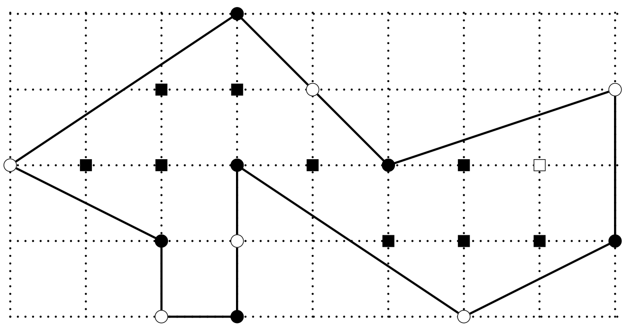
Tehtävä 8. Laske seuraavien hilamonikulmioiden pinta-alat.



Tehtävä 9. Laske seuraavan tähtikuvion pinta-ala.



Tehtävä 10. Laske seuraavan 10-kulmion pinta-ala.



Viitteet

Davis, Tom, Pick's Theorem, http://www.geometer.org/mathcircles/pick.pdf.

Korhonen, Hannu, Lisäys monikulmion pinta-alan laskemiseen, Solmu 1/2010.

Koskenoja, Mika, Monikulmion pinta-ala koululaisille, Solmu 1/2009.

Koskenoja, Mika, Monikulmion pinta-ala ylioppilaille, Solmu 3/2009.

Lehtinen, Matti, Pickin lause, Suomen matematiikan olympialaisvalmennusmateriaalia, http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/kirjallisuus/pick.pdf