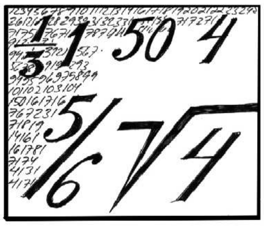
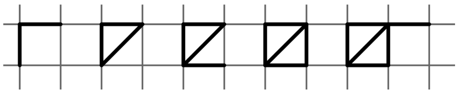


# Peruskoulun matematiikkakilpailun alkukilpailu

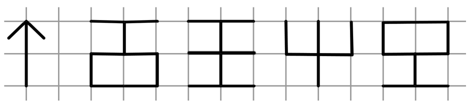
Lukuvuoden 2009–10 Matemaattisten aineiden opettajien liitto MAOL:in valtakunnallisen Peruskoulun matematiikkakilpailun ensimmäinen kierros pidettiin 4. marraskuuta 2009. Työskentelyaikaa oli vain 50 minuuttia.

Kilpailutehtävät olivat seuraavanlaiset:

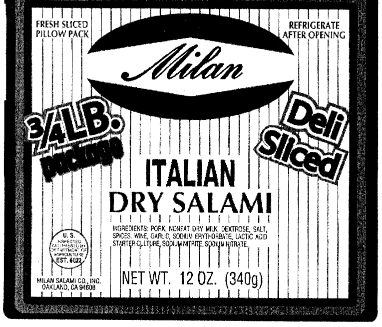
**1.** a) Piirrä jonon seitsemäs kuvio.



b) Piirrä jonon seuraava kuvio. Minkä säännön mukaan jono muodostuu?

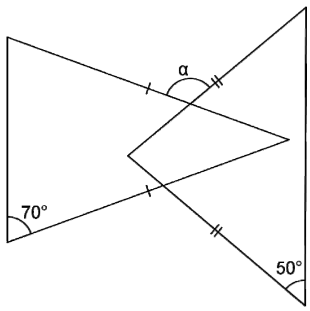


**2.** Laske a) kuinka monta grammaa (g) on unssissa (oz.), b) kuinka monta unssia (oz.) on paunassa (lb.), c) kuinka monta grammaa (g) on paunassa (lb.).




**3.** Laske lukujen 1 ja $\dfrac{1}{999\,999\,999\,999}$ summa, erotus ja osamäärä.

**4.** Päättele, kuinka suuri on kulma $\alpha$. Kannat ovat yhdensuuntaisia.




**5.** Piirrä ympyrä, jonka säde on kuusi ruutua. Jaa sen kehä kahdeksaan yhtä suureen osaan. Piirrä kahdeksan puoliympyrän kaarta, joiden toinen päätepiste on yksi jakopisteistä ja toinen on ympyrän keskipiste. Piirrä selkeä kuva käyttäen harppia. Tummenna muodostuneista alueista joka toinen. Kuinka suuri osa tummennettu alue on ympyrän pinta-alasta? Perustele.

**6.** Laske puuttuvien lukujen summa. Ruudukossa pitää jokaisella pystyrivillä, jokaisella vaakarivillä ja jokaisessa pienessä $3 \cdot 3$-ruudukossa olla luvut 1, 2, 3, …, 9, jokainen vain yhden kerran.

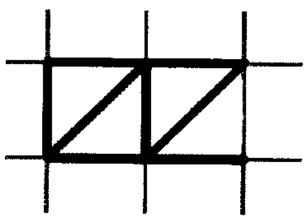
**7.** Neliön kärkipisteet ovat ruutuviivojen leikkauspisteissä ja sivun pituus on viisi pituusyksikköä eli ruudun sivua. Yksi kärki keskipisteenä piirretään ympyrä, joka kulkee keskipisteenä olevan kärjen vastaisen kärjen kautta. Kuinka monen ruutuviivojen leikkauspisteen kautta ympyrän kehä kulkee? Piirrä kuva. Tarkasta tuloksesi laskemalla.

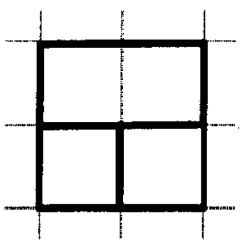
**8.** Nettiyhteisössä on tyttöjä ja poikia. Jokaisella tytöllä on kaverina neljä tyttöä ja viisi poikaa. Jokaisella pojalla on kaverina kolme poikaa ja seitsemän tyttöä. a) Onko nettiyhteisössä enemmän poikia vai tyttöjä? Perustele. b) Mikä on nettiyhteisön pienin mahdollinen henkilömäärä? Perustele.

## Ratkaisuja

Seuraavat, osin saivarteluakin sisältävät ratkaisut ovat Solmun toimituksen. Niiden perusteella ei tule tehdä päätelmiä palkintoraadin arvioista eikä siitä, kuinka perusteellinen työ varsin niukan vastausajan puitteissa olisi mahdollista.

**1.** Tehtävä on samanlainen kuin ns. älykkyystesteissä tavallinen ”mikä on jonon seuraava jäsen?” Tällaiseen tehtävään ei ole täsmällistä matemaattista ratkaisua. Positiivisten kokonaislukujen joukossa määritelty funktiohan ei määräydy pelkästään joukossa $\{1, 2, \ldots, n\}$ saamiensa arvojen perusteella, jos muuta informaatiota ei ole annettu. ”Luonnollisenoloinen” vastaus kohdassa a) on tietenkin ylemmän kuvan figuuri ja kohdassa b), jossa kuviot voi hahmottaa numeroiksi 1, 2, 3, 4 ja 5 asetettuna seläkkäin yhteen peilikuviensa kanssa, esimerkiksi oheinen kahta kuutosta markkeeraava kuvio.



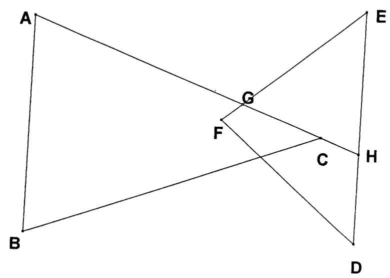


**2.** Jos etiketti on rehellinen, niin $\frac{3}{4}$ lb $= 340$ g $= 12$ oz. Tästä nähdään, että 1 lb $= 16$ oz $= \frac{4}{3} \cdot 340$ g $= 453\,\frac{1}{3}$ g. Lisäksi 1 oz $= \frac{340}{12}$ g $= 28\,\frac{1}{3}$ g. [Koska (tavallinen) unssi on noin 28,35 g ja pauna eli naula 453,59 g, etiketti on rehellinen.]

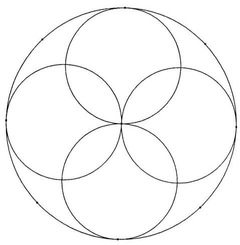
**3.** Kysytyt luvut ovat

$$1\,\frac{1}{999\,999\,999\,999},\ \frac{999\,999\,999\,998}{999\,999\,999\,999} \text{ ja } 999\,999\,999\,999.$$

**4.** Kuvan merkinnöistä päätellään, että kolmiot $ABC$ ja $DEF$ ovat tasakylkisiä. Leikatkoon suora $AC$ $EF$:n pisteessä $G$ ja $DE$:n pisteessä $H$. Koska kolmio $DEF$ on tasakylkinen, $\angle FED = 50°$. Koska $AB \| DE$ ja kolmio $ABC$ on tasakylkinen, niin $\angle EHG = \angle CAB = 70°$. Koska kolmion kulman vieruskulma on kolmion kahden muun kulman summa, nähdään kolmiosta $HEG$, että $\alpha = \angle AGE = 70° + 50° = 120°$.




**5.** Tehtävän sanamuoto on hiukan väljä, kun se ei tarkemmin määrittele puoliympyränkaarien asemaa. Eräs tehtävän ehdot täyttävä kuvio olisi viereinen ylempi ympyräkuvio. ”Joka toinen alue” on mielekäs, kun piirretään kuvio alemman mallin mukaan. Silloin tietysti kaikki kahdeksan aluetta ovat sama-alaisia, ja 45° kierto origon ympäri vaihtaa varjostetun ja varjostamattoman alueen toisikseen. Kummankin ala on siis puolet ympyrän alasta.



**6.** Jos tehtävän sudokulla on ratkaisu, tehtävän vastaukseksi riittävä informaatio on esimerkiksi vaakarivejä koskeva. Jokaisen vaakarivin lukujen summaksi on tultava $1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$, joten koko ruudukon lukujen summa on $9 \cdot 45 = 5 \cdot 81 = 405$. Kun esillä olevien lukujen summa on (vaakariveittäin laskettuna) $21+12+19+13+19+14+8+9+24 = 139$, puuttuvien lukujen summa on $405 - 139 = 266$.

Jos sattuisi niin, että sudokulla ei olisi ratkaisua, ei tehtävälläkään olisi [silloin tällöin sattuu aikakauslehdissä silmiin sudokuja, jotka ovat virheellisiä – useimmiten, vaikkei aina, virhe osoittautuu ratkaisijan tekemäksi]. Ratkaisun olemassaolon varmistamiseksi olisi siis sudoku ratkaistava. Sudoku todellakin ratkeaa, sen ratkaisu on

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 9 | 3 | 7 | 6 | 2 | 1 | 4 | 8 |
| 6 | 7 | 3 | 3 | 8 | 1 | 5 | 2 | 9 |
| 8 | 1 | 2 | 9 | 5 | 4 | 7 | 3 | 6 |
| 3 | 5 | 9 | 6 | 2 | 8 | 4 | 1 | 7 |
| 2 | 6 | 8 | 1 | 4 | 7 | 5 | 9 | 3 |
| 1 | 4 | 7 | 5 | 9 | 3 | 8 | 6 | 2 |
| 4 | 8 | 5 | 2 | 3 | 9 | 6 | 7 | 1 |
| 9 | 2 | 1 | 4 | 7 | 6 | 3 | 8 | 5 |
| 7 | 3 | 6 | 8 | 1 | 5 | 2 | 9 | 4 |

**7.** Tämänkin tehtävän sanamuoto saattaa näyttää hiukan väljältä, kun neliön asentoa ruudukossa ei ole yksilöity. Voidaan olettaa, että neliön yksi kärki on origo ja pituusyksikkö on ruudukon neliön (sillä neliöitähän ruudut lienevät) sivu. Kaksi neliön kärkeä on silloin sellaisissa pisteissä $(x,\, y)$, joiden etäisyys origosta on 5 eli joille pätee $x^2+y^2 = 25$. Tällaisia pisteitä ovat $(\pm 5,\, 0)$, $(0,\, \pm 5)$ ja $(\pm 4,\, \pm 3)$ ja $(\pm 3,\, \pm 4)$. Erilaisia tehtävän toteuttavia neliöitä on kaikkiaan 12. Jokaisen lävistäjän pituuden neliö on $5^2 + 5^2 = 50$, joten kaikkiin neliöihin liittyy sama origokeskinen ympyrä. Tällä ympyrällä olevien ruutuviivojen leikkauspisteet $(x,\, y)$ toteuttavat kaikki ehdon $x^2 + y^2 = 50$. Kokeilemalla nähdään, että ainoat kokonaislukuparit, jotka yhtälön toteuttavat, ovat $(\pm 5,\, \pm 5)$ (4 kpl) ja $(\pm 1,\, \pm 7)$ (4 kpl) sekä $(\pm 7,\, \pm 1)$ (4 kpl). Pisteitä on siis 12.

**8.** Olkoon poikia $p$ kappaletta ja tyttöjä $t$ kappaletta. Tehtävässä ei ilmoitettu kaveruuden molemminpuolisuutta. Ilman tätä tietoa tehtävällä ei ole ratkaisua: samat seitsemän tyttöä voivat olla kavereina esim. sadalle pojalle, ja tytöillä on kullakin omat muutamat kaverinsa toisten tyttöjen ja poikien joukossa, samoin pojilla poikien joukossa. Jos kuitenkin kaveruus on molemminpuolista, voidaan "kaveruus" tulkita esim. kaveriparia yhdistäväksi viivaksi. Viivoja on $7p = 5t$, joten $p < t$. Lisäksi $p$ on jaollinen 5:llä ja $t$ 7:llä. Pojasta poikaan kulkevia viivoja on $\dfrac{3p}{2}$, koska jokaisesta pojasta lähtee kolme tällaista viivaa, ja jokainen viiva tulee lasketuksi kahdesti, kerran kummankin päänsä kohdalla. Tämä merkitsee sitä, että $p$ on parillinen luku, joten $p \geq 10$ ja siis $t \geq 14$. Osoitetaan, että 24 henkilön nettiyhteisö toteuttaa vaaditut ehdot. Jaetaan kymmenen poikaa kahdeksi viiden pojan joukoksi $P_1$ ja $P_2$ ja 14 tyttöä kahdeksi seitsemän tytön joukoksi $T_1$ ja $T_2$. Jos joukon $P_1$ jokaisen pojan kavereina ovat kaikki $T_1$:n tytöt ja joukon $P_2$ jokaisen pojan kavereina kaikki joukon $T_2$ tytöt, niin poikien ja tyttöjen välinen kaveruusehto toteutuu. Jos kummassakin tyttöjoukossa erikseen kaveruus toteutuu esimerkiksi oheisen kaavion mukaan, tyttöjen tuttavuusehto täyttyy:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array}
\begin{pmatrix}
 & x & & x & x & & x \\
x & & x & & x & x & \\
 & x & & x & & x & x \\
x & & x & & x & & x \\
x & x & & x & & x & \\
 & x & x & & x & & x \\
x & & x & x & & x &
\end{pmatrix}.
\end{array}
$$

Poikien kaveruusehto puolestaan täyttyy esimerkiksi silloin, kun kaveruudet järjestyvät tällaisen kaavion mukaan:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10 \end{array}
\begin{pmatrix}
 & x & & & x & & & & & x \\
x & & x & & & x & & & & \\
 & x & & x & & & x & & & \\
 & & x & & x & & & x & & \\
 & & & x & & x & & & x & \\
 & & & & x & & x & & & x \\
x & & & & & x & & x & & \\
 & x & & & & & x & & x & \\
 & & x & & & & & x & & x \\
x & & & x & & & & & x &
\end{pmatrix}.
\end{array}
$$