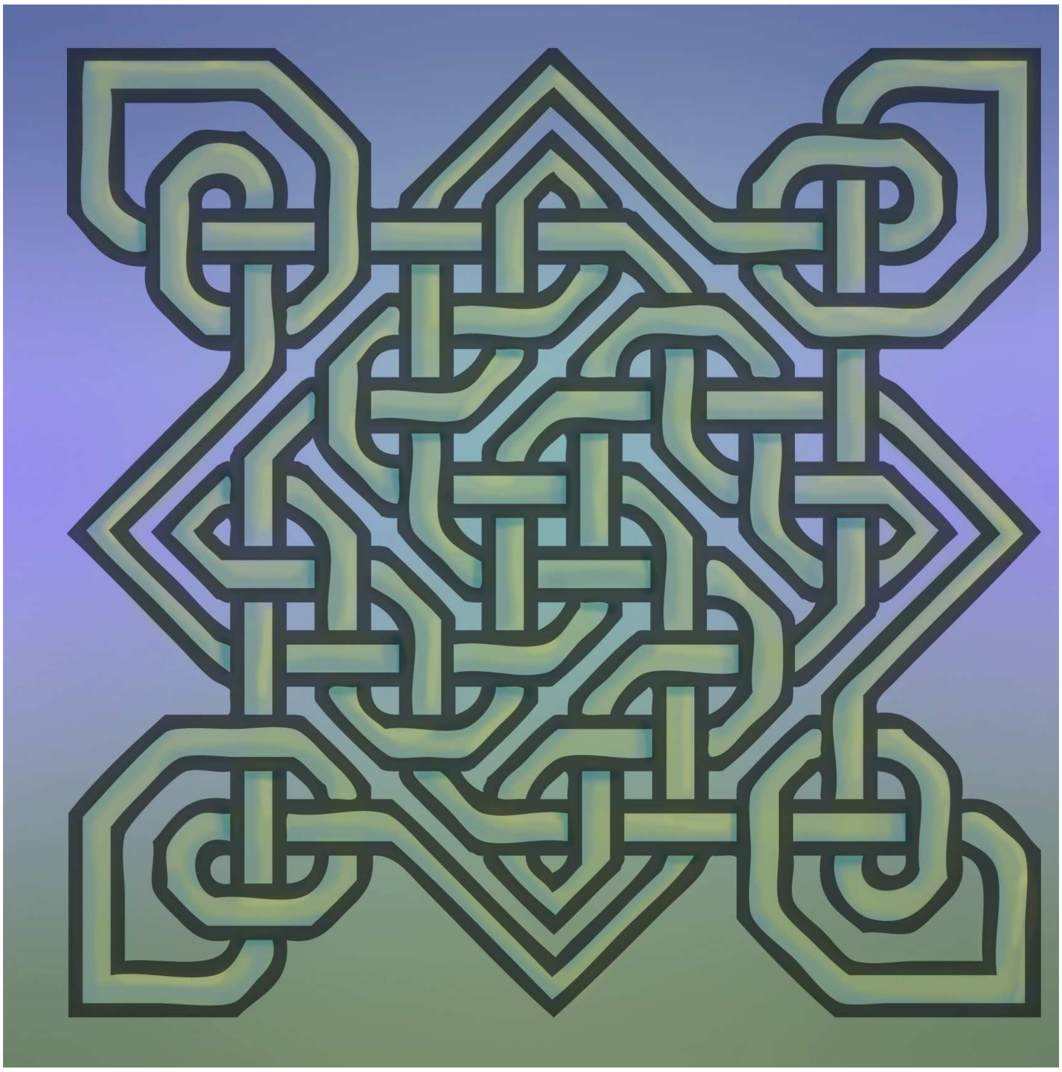
Solmu

Matematiikkalehti
1/2010

http://solmu.math.helsinki.fi/



Solmu 1/2010

ISSN-L 1458-8048
ISSN 1459-0395 (Painettu)
ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)
00014 Helsingin yliopisto

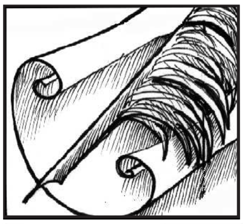
http://solmu.math.helsinki.fi/

Numeroon 2/2010 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 29.3.2010 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.

Sisällys



Miksi matemaatikot, matematiikan opettajat ja opetushallinto eivät puhu toisilleen?

Kävin vuoden alussa, ennen loppiaista, joululomien aikaan Jyväskylässä. Jyväskylän yliopistossa pidettiin Matematiikan päiviä. Tällaiset päivät pidetään joka toinen vuosi jossain yliopistokaupungissa. Päivien nimi oli alkuaan Matemaatikkopäivät, ja ne perustettiin, jotta Suomen eri yliopistoissa ja muissa laitoksissa toimivat matemaatikot saisivat tavata toisiaan ja kertoa viimeaikaisten töidensä tuloksista. Aikojen kuluessa huomattiin, että päivät voisivat toimia vähän laajemminkin matematiikan näyteikkunana. Yksi matemaatikkojen avautuminen oli matematiikan opetusta koskevien teemojen käsittely itse matematiikan tutkimukseen liittyvien esitelmien ohella.

Jyväskylässä matematiikan opetukseen peruskoulusta yliopistoon liittyvät teemat olivat hyvin esillä. Kolmessa parituntisessa esitelmäryppäässä ja yleispaneelikeskustelussa tuli esiin runsaasti tietoa ja ajatuksia matematiikan asemasta ja opettamisesta kouluissa, ja siitä miksi ja millaista matematiikkaa tulisi opettaa vaikkapa yliopistojen ja korkeakoulujen näkökulmasta. Yksi hyvin keskeinen matematiikan koulussa opiskelun motiivihan on aina valmiuksien hankkiminen jatkoopintoja varten. Matematiikan päivien anti ylitti monin tavoin vaikkapa sen, mitä opettajien oman ammatillisen yhteisön, Matemaattisten aineiden opettajien liiton koulutuspäivät yleensä matematiikan alalta tarjoavat.

Mutta. Jyväskylän päivien osallistujissa oli mainiosta ajankohdasta huolimatta matematiikan opettajia korkeintaan kourallinen, ja kourallinen tarkoittaa tässä kouraan kiinnittyvien sormien lukumäärää. Paikalla olleiden opetushallinnon matematiikan asiantuntijoiden lukumäärä oli opettajien lukumäärää aidosti pienempi ei-negatiivinen luku. Missä vika? Tässä yksittäistapauksessa varmaankin tiedotuksen epäonnistumisessa. Mutta minkä oire on tällaisen tiedotuksen epäonnistuminen? Ehkäpä sen, että matemaatikot ja matematiikan opettajat eivät oikeastaan muista toisiaan eivätkä tiedosta toistensa olemassaoloa. Ani harvoin tapaa matematiikanopettajan, joka olisi vaikkapa syventämässä tietämystään suorittamalla matemaattisia jatko-opintoja. Opettajien yleensä monipuoliseen täydennyskoulutustarjontaan ei kuulu varsinaisen matematiikan kursseja. Matemaatikko on harvinainen lintu oppikirjantekijänä, ja ainakin oppimateriaaleja satunnaisesti selaava lukija saa melko voimakkaan mielikuvan siitä, että kirjankustantajat eivät juuri matemaatikkojen asiantuntemusta käytä käsikirjoituksia editoidessaan. Ja matemaatikko, jos kohta ansaitseekin toimeentuloaan vaikkapa opettamalla tulevia matematiikanopettajia, ei useinkaan viitsi suhteuttaa antamaansa oppia koulumatematiikan kenttään, hänen oppilaansa tulevaan työmaahan.

Oma lukunsa on vielä opetushallinnon ja matematiikan osaamisen leikkausjoukon koko. Jätän sen arvioinnin muiden tehtäväksi. Surullista on kuitenkin matematiikan asiantuntemuksen ilmeinen laiminlyönti opetusta melko syvällisesti ohjaavia opetussuunnitelmia laadittaessa. Matematiikka on pitkän ajan kuluessa kehittynyttä rakenteista tietoa. Ei sitä ole mahdollista silputa

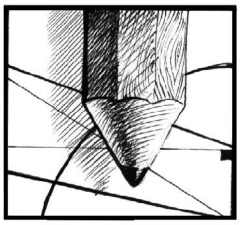
Pääkirjoitus

ja niputtaa hetken mielijohteiden tai kulloinkin muodissa olevien kasvatustieteellisten näkemysten mukaisesti, niin kuin useasti näytään tehtävän. Järjestetäänkö lääketieteen opetus lääketieteen asiantuntemus sivuuttaen?

Matti Lehtinen

Solmu on yksi pieni yritys pitää yllä yhteyttä kaikkien matematiikan parissa ahertavien kesken: koululaisten, opiskelijoiden, opettajien ja matemaatikkojen. Kaikki me toisiamme tarvitsemme.

Pääkirjoitus

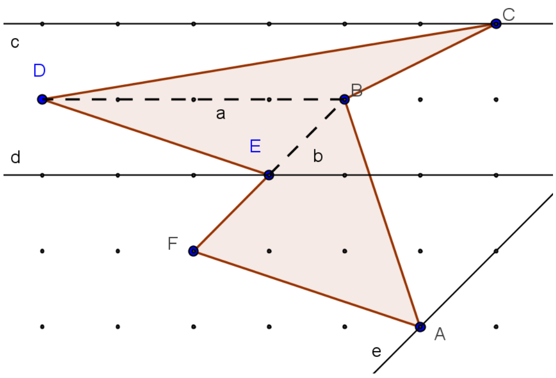


Lisäys monikulmion pinta-alan laskemiseen

Hannu Korhonen
Lehtori emeritus, Orimattila

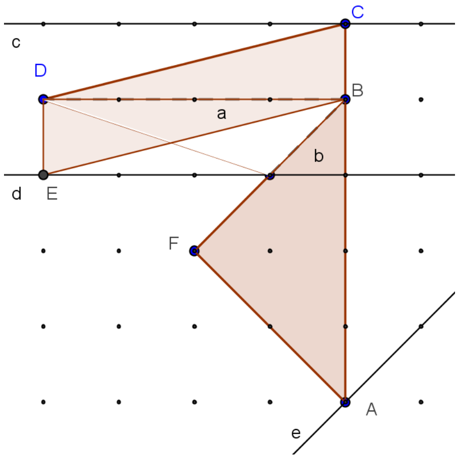
Mika Koskenojan kirjoitukset monikulmion pinta-alasta Solmun numeroissa 1/2009 ja 3/2009 herättivät huomaamaan matematiikan hienouden. Yksinkertaiselle tehtävälle on monen monia ratkaisuja. Ensi katsanolta ei ole aina aivan selvää, mikä niistä sopisi opetuksessa esitettäväksi.

Tehtävän ratkaiseminen on useimmille oppilaille ad hoc -tilanne. Pyrkimyksenä on useimmiten vain yksittäisen tehtävän ainutkertainen ratkaiseminen. Opettajan työ alkaa jo tehtävän valinnasta, sillä tehtävä voi antaa oppilaalle paljon yksityiskohtiaan enemmän. Keskeiseksi valintaperusteeksi nousee ratkaisun merkitys oppilaalle: onko se helppo ymmärtää, harjoitellaanko siinä jo opittua, opitaanko siinä jokin uusi asia tai idea, jota voidaan soveltaa myöhemmin, antaako se uusia näkökulmia aikaisemmin opittuun tai uusia yhteyksiä aikaisemmin opittujen asioiden välille jne.



Kuva 1: Kuusikulmion jako kolmioiksi ja apusuorat.

Koskenojan ensimmäisen artikkelin ratkaisut ja samoin hänen tehtävänsä edustavat perinteistä laskennollista geometriaa. Numerossa 1/2009 esiintyneen kuusikulmion pinta-ala voidaan laskea myös seuraavasti. Ratkaisun dynaaminen näkökulma palauttaa mieleen ja antaa mahdollisuuden käyttää monia keskeisiä geometrian totuuksia (määritelmiä, lauseita ja laskusääntöjä).



Kuva 2: Kuusikulmion osien muuntaminen helposti laskettaviksi.

Jaetaan kuusikulmio (kuva 1) kolmeksi kolmioksi janoilla a ja b. Piirretään näiden janojen suuntaiset apusuorat $c, d \parallel a$ ja $e \parallel b$. Siirretään pistettä C ylimmän kolmion kannan suuntaista suoraa c pitkin (kuva 2). Kolmion korkeus ei muutu eikä siis sen pinta-alakaan, koska yhdensuuntaisten suorien yhdensuuntaiset väli-janat ovat yhtä pitkät. Vastaavasti siirretään pistettä E. Kolmiot muodostavat suunnikkaan, jonka kanta $= 1$ ja korkeus 4, pinta-ala siis 4 (p.a.y).

Siirretään pistettä A alimmaisen kolmion kannan BF suuntaista suoraa e pitkin niin, että saadaan suorakulmainen kolmio. Sen pinta-ala $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$ (p.a.y) on sama kuin alkuperäisen kolmion ABF. Kuusikulmion pinta-ala on siis $4 + 4 = 8$ (p.a.y).

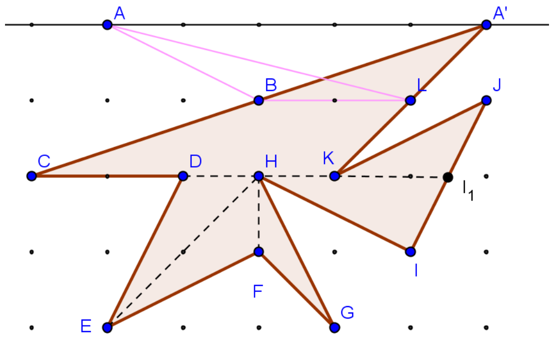
Ad hoc -ratkaisun ongelma on yleisyyden puute, mutta toisaalta ratkaisu voi olla hyvin yksinkertainen. Numerossa 3/2009 tehtäväksi annetun 12-kulmion pinta-ala saadaan siirtämällä vain yhtä pistettä A (kuva 3). Monikulmio on sitten ositettu kolmioiksi niin, että kaikkien kolmioiden kannat ovat akselien suuntaiset. Pinta-ala on

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2} \cdot (4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2\tfrac{1}{2} \cdot 1 + 1\tfrac{1}{2} \cdot 1) \\ &\qquad = \tfrac{1}{2} \cdot 17 = 8\tfrac{1}{2}, \end{aligned}$$

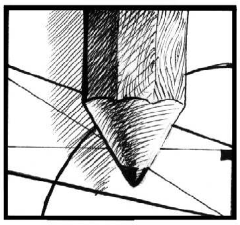
missä kolmiot kiertävät ylimmästä isosta kolmiosta lähtien vastapäivään.

Vieläkin alkeellisempi ratkaisu on. Ei ole tarpeen siirtää yhtään pistettä. Kaksitoistakulmio on jaettavissa akselien suuntaisilla janoilla yhdeksi neliöksi ja kahdeksaksi kolmioksi!

Siinäpä miettimistä opettajalle, minkä näistä ratkaisuista ottaisi oppilaidensa kanssa pohdittavaksi. (Jotta kenellekään ei tulisi sellaista mielikuvaa, että matematiikassa on vain yksi tai edes ensisijaisesti jokin muita parempi ratkaisu, jonka paremmuuden joku viisas auktoriteetti aina tietää, sanon, että mielestäni kaikki ratkaisut ansaitsevat tulla oppilaiden kanssa käsitellyiksi, tosin eri syistä ja eri vaiheessa opetusta, kaksitoistakulmion alkeellinen ratkaisu jo perusopetuksen alaluokilla.) Useinkaan ei siis ole tärkeää se, mitä opetetaan, vaan miten opetetaan. Koskenoja on tärkeän asian äärellä. Vaikka hänen lähtökohtansa ei ehkä olekaan opetuksen suunnittelu, niin artikkeleillaan hän tulee korostaneeksi sitä, että yksinkertaisestakin lähtökohdasta opettaja saa pientä vaivaa nähden rakennetuksi mitä monipuolisimpia opetustilanteita.



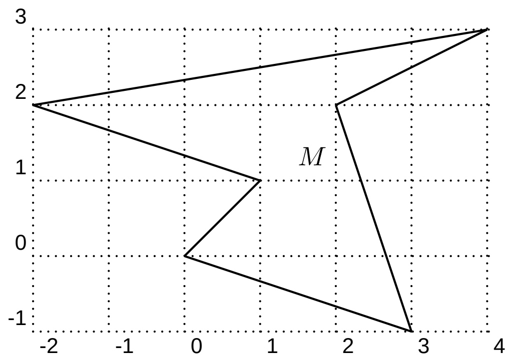
Kuva 3: Kaksitoistakulmion pinta-ala kolmioiksi jakamalla ja yhtä pistettä siirtämällä.



Monikulmion pinta-ala lapsille

Mika Koskenoja
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Tehtävä. Kuusikulmion M kärjet ovat tason pisteissä $(0,0)$, $(3,-1)$, $(2,2)$, $(4,3)$, $(-2,2)$ ja $(1,1)$. Laske M:n pinta-ala.



Olen jo esittänyt tehtävälle Solmussa kaksi hyvin erilaista ratkaisutapaa. Numerossa 1/2009 ilmestynyt kirjoitus "Monikulmion pinta-ala koululaisille" vaati ainoastaan alkeisgeometrian hallintaa. Toinen kirjoitukseni "Monikulmion pinta-ala ylioppilaille" ilmestyi numerossa 3/2009. Siinä esitetyssä ratkaisussa käytettiin yliopistomatematiikan alussa opittavia vektorianalyysin perusteita, mutta kirjoituksen seuraamiseen riitti lukion pitkän matematiikan derivointi- ja integrointitaitojen hyvä hallinta.

Hannu Korhonen jatkaa aiheesta kirjoituksessaan "Lisäys monikulmion pinta-alan laskemiseen". Hänen hienosti oivalletut ratkaisunsa hyödyntävät geometrian dynaamisia ominaisuuksia.

Ensimmäisen kirjoitukseni otsikon 'koululaisilla' tarkoitin lähinnä peruskoulun yläluokkien ja lukion oppilaita. Nyt esitettävä Pickin lauseeseen perustuva tehtävän ratkaisutapa on aikaisempien kirjoitusten tapoja yksinkertaisempi. Kirjoituksen otsikon 'lapset' viittaakin alakouluikäisiin. Pickin lause sopii hyvin myös yläkoulujen ja lukion matematiikan opetukseen, jolloin voidaan tuloksen soveltamisen lisäksi pohtia myös lauseen todistusta.

Pickin lause ja sen todistus

Pickin lauseen avulla voidaan laskea pinta-ala monikulmiolle, jonka kärjet ovat hilapisteissä. *Hilapisteet* ovat tason pisteitä (x,y), joiden koordinaatit x ja y ovat kokonaislukuja. Monikulmio on *yksinkertainen*, jos se on reiätön eikä leikkaa itseään. Kutsumme monikulmiota *hilamonikulmioksi*, jos se on yksinkertainen ja sen kaikki kärjet ovat hilapisteissä. Esimerkiksi tehtävämme kuusikulmio M on hilamonikulmio. Lisäksi sanomme, että hilamonikulmion sisällä olevat hilapisteet ovat sen *sisähilapisteitä* ja hilamonikulmion reunalla olevat hilapisteet sen *reunahilapisteitä.* Sisähilapisteiden lukumäärää merkitsemme I:llä ja reunahilapisteiden lukumäärää B:llä.

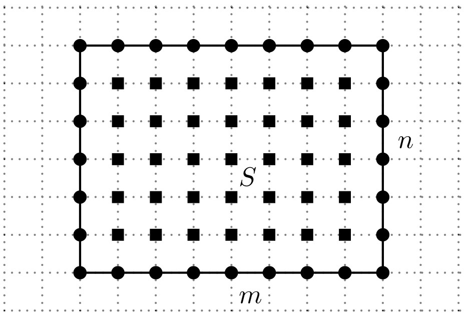
Pickin lause. Olkoon K hilamonikulmio. Tällöin K:n pinta-ala on

$$\mathrm{ala}(K) = I + \frac{B}{2} - 1.$$

Todistus. Todistamme Pickin lauseen vaiheittain edeten suorakulmiosta yleiseen monikulmioon. Tarkastelemme koko ajan vain hilamonikulmioita. Merkitsemme kuvissa monikulmioiden sisähilapisteitä neliöllä (■) ja reunahilapisteitä pallolla (●).

1. Suorakulmio. Osoitetaan ensin, että Pickin lause pätee suorakulmioille, joiden sivut ovat koordinaattiakselien suuntaisia. Yleisesti tällaisen suorakulmion S kanta on m ja korkeus on n, joten sen pinta-ala on

$$\mathrm{ala}(S) = \mathrm{kanta} \cdot \mathrm{korkeus} = mn.$$



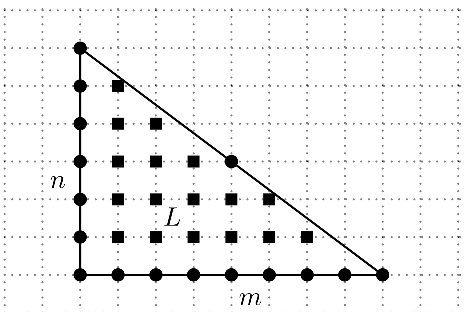
Nyt havaitaan, että suorakulmiossa on sisähilapisteitä $n-1$ vaakarivissä ja $m-1$ pystysarakkeessa, joten $I = (m-1)(n-1)$. Lisäksi havaitaan, että $B = 2m + 2n = 2(m+n)$. Näin ollen

$$\begin{aligned} I + \frac{B}{2} - 1 &= (m-1)(n-1) + \frac{2(m+n)}{2} - 1 \\ &= (mn - m - n + 1) + (m+n) - 1 \\ &= mn, \end{aligned}$$

joka on vaadittu $m \times n$-suorakulmion pinta-ala.

2. Suorakulmainen kolmio. Tarkastellaan sitten suorakulmaisia kolmioita, joiden kateetit ovat koordinaattiakselien suuntaisia. Yleisesti tällaisen kolmion L kanta on m ja korkeus on n, joten sen pinta-ala on

$$\mathrm{ala}(L) = \frac{\mathrm{kanta} \cdot \mathrm{korkeus}}{2} = \frac{mn}{2}.$$



Suorakulmaisen kolmion sisä- ja reunahilapisteiden erottelu ja laskeminen on yleensä muuten selvää, mutta hypotenuusalla ja hypotenuusan lähellä kolmion sisähilapisteiden erotteleminen voi olla hankalaa. Edellä olevassa esimerkkikuvassa hypotenuusalla kärkien välissä on vain yksi reunahilapiste ja kolmion sisähilapisteet on helppo erottaa.

Pickin lauseen todistus suorakulmaiselle kolmiolle ei kuitenkaan edes vaadi hypotenuusan lähellä olevien sisä- ja reunahilapisteiden erottelua. Olkoon nimittäin k reunahilapisteiden lukumäärä hypotenuusalla kärkien välissä (hypotenuusan ja kateettien kohtaamispisteitä ei lasketa mukaan). Tällöin $B = m + n + 1 + k$ ja

$$I = \frac{(m-1)(n-1) - k}{2},$$

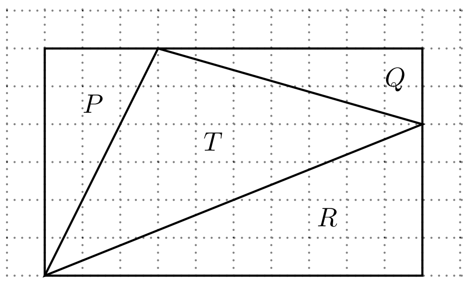
sillä $m \times n$-suorakulmiossa on $(m-1)(n-1)$ sisähilapistettä, josta vähennetään vastaavan suorakulmaisen $m \times n$-kolmion hypotenuusalla sijaisevien reunahilapisteiden lukumäärä k ja näin saatu lukumäärä jaetaan kahdella. Nyt saadaan

$$\begin{aligned} & I + \frac{B}{2} - 1 \\ &= \frac{(m-1)(n-1) - k}{2} + \frac{m + n + 1 + k}{2} - 1 \\ &= \frac{mn}{2} - \frac{m}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{k}{2} + \frac{m}{2} + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} + \frac{k}{2} - 1 \\ &= \frac{mn}{2}, \end{aligned}$$

joka on suorakulmaisen $m \times n$-kolmion pinta-ala.

3. Yleinen kolmio. Osoitetaan seuraavaksi Pickin lause yleiselle kolmiolle, jonka ei siis tarvitse olla suorakulmainen eikä sivujen tarvitse olla koordinaattiakselien suuntaisia.

Jokainen kolmio voidaan täydentää sivuiltaan koordinaattiakselien suuntaiseksi suorakulmioksi liittämällä siihen korkeintaan kolme suorakulmaista kolmiota. Tarkastellaankin siis kolmiota T, joka täydennetään suorakulmioksi liittämällä siihen suorakulmaiset kolmiot P, Q ja R esimerkiksi seuraavassa kuvassa esitetyllä tavalla.



suorakulmio $S = TPQR$

Oletetaan, että kolmiolla T on B_T reuna- ja I_T sisähilapistettä. Vastaavasti kolmioilla P, Q ja R on reunahilapisteitä B_P, B_Q ja B_R sekä sisähilapisteitä I_P, I_Q ja I_R kappaletta. Merkitään kaikkien kolmioiden muodostamaa suorakulmiota $S = TPQR$, sekä sen reuna- ja sisähilapisteiden lukumääriä B_S ja I_S. Koska tiedämme Pickin lauseen olevan voimassa suorakulmioille ja suorakulmaisille kolmioille, niin

$$\text{ala}(P) = I_P + \frac{B_P}{2} - 1,\ \text{ala}(Q) = I_Q + \frac{B_Q}{2} - 1,$$
$$\text{ala}(R) = I_R + \frac{B_R}{2} - 1,\ \text{ala}(S) = I_S + \frac{B_S}{2} - 1.$$

Kolmioiden reuna- ja sisähilapisteistä saadaan yhtälöt

$$B_P + B_Q + B_R = B_S + B_T$$

ja

$$I_S = I_P + I_Q + I_R + I_T + (B_P + B_Q + B_R - B_S) - 3.$$

Näistä ensimmäinen voidaan kirjoittaa muotoon

$$B_P + B_Q + B_R - B_S = B_T,$$

joka toiseen yhtälöön sijoittamalla johtaa yhtälöön

$$I_S = I_P + I_Q + I_R + I_T + B_T - 3.$$

Nyt saadaan

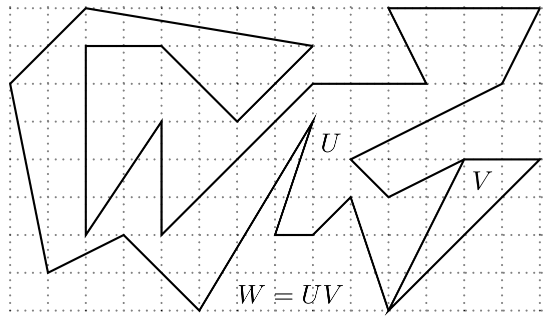
$$\begin{aligned}
&\text{ala}(T) = \text{ala}(S) - \text{ala}(P) - \text{ala}(Q) - \text{ala}(R)\\
&= I_S - I_P - I_Q - I_R + \frac{B_S - B_P - B_Q - B_R}{2} + 2\\
&= (I_P + I_Q + I_R + I_T + B_T - 3) - I_P - I_Q - I_R\\
&\quad + \frac{(B_P + B_Q + B_R - B_T) - B_P - B_Q - B_R}{2} + 2\\
&= I_T + B_T - 3 - \frac{B_T}{2} + 2\\
&= I_T + \frac{B_T}{2} - 1,
\end{aligned}$$

joten Pickin lause pätee kaikille kolmioille.

4. Yleinen monikulmio. Todistetaan induktiolla n-kulmion kärkien $n \geqslant 3$ lukumäärän suhteen, että Pickin lause pätee mille tahansa monikulmiolle. On jo osoitettu, että tulos on voimassa kolmioille eli 3-kulmioille (*induktion alkuaskel*). Oletetaan, että tulos pätee n-kulmioille, kun $n \geqslant 3$ (*induktio-oletus*). Osoitetaan, että tällöin tulos pätee myös $n+1$-kulmioille (*induktioaskel*).

Yleisesti n-kulmiosta päästään $n+1$-kulmioon kolmion lisäämisellä tai poistamisella. Riittää kuitenkin todistaa induktioaskel vain lisätylle kolmiolle, sillä jokainen $n+1$-kulmio saadaan jostakin n-kulmiosta kolmion lisäämisellä. Tämä ei ole itsestään selvää, mutta melko helppo perustella (ks. [Davis, III.3]).

Tarkastellaan n-kulmiota U ja kolmiota V, kun U:lla ja V:llä on yksi yhteinen sivu. Yhdistämällä U ja V saadaan $n+1$-kulmio $W = UV$ kuten seuraavassa esimerkkikuvassa.



Oletetaan, että Pickin lause on voimassa n-kulmiolle U. Todistuksen alun perusteella tiedetään, että se on voimassa myös kolmiolle V. Merkitään jälleen U:n, V:n ja W:n reuna- ja sisähilapisteiden lukumääriä B_U, B_V ja B_W sekä I_U, I_V ja I_W. Olkoon k monikulmion U ja kolmion V yhteisten reunahilapisteiden lukumäärä. Tällöin

$$I_W = (I_U + I_V) + (k - 2)$$

ja

$$B_W = (B_U + B_V) - 2(k - 2) - 2,$$

joista ensimmäisestä seuraa

$$I_U + I_V = I_W - (k - 2),$$

ja jälkimmäisestä

$$B_U + B_V = B_W + 2(k - 2) + 2.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
\text{ala}(W) &= \text{ala}(U) + \text{ala}(V)\\
&= (I_U + \frac{B_U}{2} - 1) + (I_V + \frac{B_V}{2} - 1)\\
&= (I_U + I_V) + \frac{B_U + B_V}{2} - 2\\
&= I_W - (k - 2) + \frac{B_W + 2(k - 2) + 2}{2} - 2\\
&= I_W + \frac{B_W}{2} - 1.
\end{aligned}$$

Pickin lause on näin ollen todistettu. □

Huomautus 1. Solmun 3/2009 kirjoituksessa n-kulmion M pinta-alan kaavaksi johdettiin

$$\text{ala}(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_{i+1} + x_i)(y_{i+1} - y_i)}{2},$$

kun M:n kärjet ovat vastapäivään kiertäen pisteissä $M_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$, ja $x_{n+1} = x_1$ ja $y_{n+1} = y_1$. Havaitsimme kaavasta jo silloin, että hilamonikulmion (kuinka monimutkaisen tahansa) pinta-ala on $k \cdot \frac{1}{2}$, missä $k \in \mathbf{Z}_+$. Sama havainto on helppo tehdä Pickin lauseen kaavasta, koska I ja B ovat positiivisia kokonaislukuja. Kaavahan voidaan esittää muodossa

$$\text{ala}(M) = \frac{2I + B - 2}{2},$$

missä $2I + B - 2 \in \mathbf{Z}_+$.

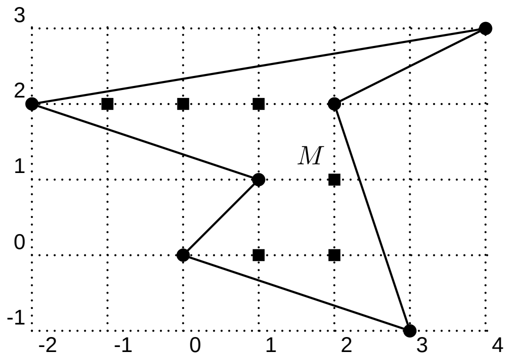
Huomautus 2. Edellä todistamamme Pickin lause on voimassa vain yksinkertaisille monikulmioille, joissa ei saa olla reikiä. Jos monikulmiossa on reikiä, niin Pickin lauseen kaavan loppuun on lisättävä reikien lukumäärä n. Reiällisen hilamonikulmion N pinta-ala on siis

$$\text{ala}(N) = I + \frac{B}{2} - 1 + n,$$

missä n on reikien lukumäärä. Reiällisen hilamonikulmion pinta-alan saa toki laskettua myös niin, että laskee ensin pinta-alan reiättömälle hilamonikulmiolle ja vähentää tuloksesta reikien yhteenlasketun pinta-alan.

Huomautus 3. Tässä kirjoituksessa käsitellään Pickin lausetta tason hilamonikulmioille. Lause voidaan yleistää avaruuden kappaleille ja vielä ylempiin ulottuvuuksiin *Ehrhartin polynomien* avulla.

Tehtävän ratkaisu



Havaitsemme kuvasta, että $I = 6$ ja samoin $B = 6$, joten

$$\text{ala}(M) = I + \frac{B}{2} - 1 = 6 + \frac{6}{2} - 1 = 6 + 3 - 1 = 8.$$

Tulos on tietysti sama kuin muissakin kirjoituksissa eri tavoin laskettu monikulmion M pinta-ala.

Pickin lauseen soveltamisesta

Pickin lauseen käyttö monikulmion pinta-alan laskemisessa vaatii kärkien sijaitsemisen hilapisteissä. Tämä on vahva rajoite, josta kuitenkin saatetaan päästä eroon joidenkin sallittujen operaatioiden jälkeen. Aluksi monikulmiota kannattaa yrittää siirtää yhdensuuntaissiirrolla niin, että mahdollisimman moni kärki asettuu hilapisteisiin. Tällöin monikulmion pinta-ala ei muutu.

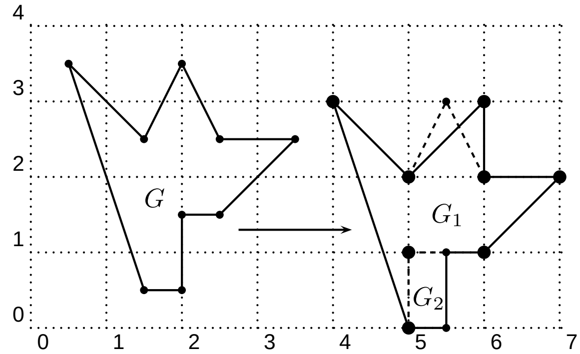
Jos siirron jälkeen osa monikulmion kärjistä ei sijaitse hilapisteissä, mieleen tulee heti kaksi mahdollista tapaa edetä. Ensinnäkin, ositetaan monikulmio sopivasti ja sovelletaan Pickin lausetta vain osaan ositettua monikulmiota. Toiseksi, Hannu Korhosen kirjoituksessaan esille tuomat geometrian dynaamiset ominaisuudet ovat hyödynnettävissä. Osituksen monikulmioita voidaan muuttaa geometrian laskusääntöjen avulla pinta-alat säilyttäen toisiksi monikulmioiksi niin, että muokattujen monikulmioiden kärjet ovat hilapisteissä.

Esimerkki. Seuraavassa kuvassa olevan 9-kulmion G mikään kärki ei ole hilapisteessä. Siirretään G ensin $3\frac{1}{2}$ yksikköä oikealle ja $\frac{1}{2}$ yksikköä alaspäin. Tällöin kuusi kärkeä asettuu hilapisteisiin, loput kolme kärkeä $(5\frac{1}{2}, 0)$, $(5\frac{1}{2}, 1)$ ja $(5\frac{1}{2}, 3)$ sen sijaan eivät. Näin ollen emme voi soveltaa Pickin lausetta ainakaan vielä koko monikulmioon. Siirretään piste $(5\frac{1}{2}, 3)$ puoli yksikköä oikealle pisteeseen $(6, 3)$, jolloin monikulmion pinta-ala ei muutu. Ositetaan monikulmio nyt kahteen osaan G_1 ja G_2, joista G_1:n kaikki kärjet ovat hilapisteissä (merkitty kuvassa isolla pallolla ●). Jäljelle jäänyt osa G_2 on suorakulmio, jonka pinta-ala on selvästi

$$\text{ala}(G_2) = \tfrac{1}{2}.$$

Pickin lauseen perusteella

$$\begin{aligned}\text{ala}(G) &= \text{ala}(G_1) + \text{ala}(G_2) = (I_{G_1} + \frac{B_{G_1}}{2} - 1) + \tfrac{1}{2} \\ &= (0 + \tfrac{8}{2} - 1) + \tfrac{1}{2} = 3\tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$



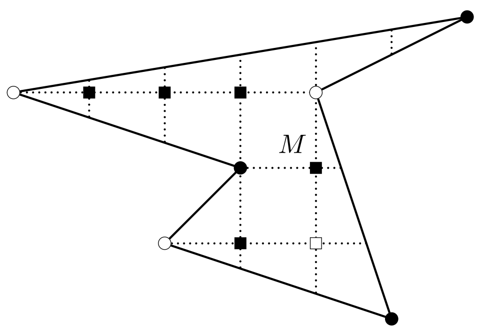
Puuhaa pienille lapsille

Kun käyttää Pickin lausetta monikulmion pinta-alan määräämisessä, ei tarvitse osata muuta kuin lukumäärän laskeminen, lisääminen ja vähentäminen sekä kahteen osaan jakaminen. Toisin sanoen on osattava luonnolliset luvut, yhteen- ja vähennyslasku sekä jakolasku jakajana 2. Perusopetuksen opetussuunnitelman mukaan kaikki nämä opitaan jo vuosiluokilla 1–2, jakolasku kuitenkin ainoastaan ”konkreettisilla välineillä”. Varsinaisesti jakolaskun ja jaollisuuden oppiminen tapahtuu vasta luokilla 3–5, jolloin opitaan myös pinta-alan käsite.

Valikoiduissa ja sopivasti asetetuissa tehtävissä vaatimus peruslaskutoimitusten osaamisesta on mahdollista kiertää useallakin eri tavalla, joten yksinkertaisimmillaan Pickin lauseen käyttöön riittää pienten lukumäärien laskemisen hallinta. Tehtäviä voikin antaa ratkaistavaksi jo esikoululaisille ja jopa päiväkoti-ikäisille lapsille, jotka osaavat laskea vaikkapa kymmeneen. Pinta-alan käsitteen ymmärtäminen on näin pienille lapsille vielä vaikeaa ja vaillinaista, mutta mielikuvat voivat silti olla aivan oikeita ja opettajan johdattelemana itse keksityt kuvaukset pinta-alasta hyvinkin osuvia ja rikkaita. Pinta-alan puutteellinen ymmärtäminen on matematiikan maailmaan johdattelevassa lasten puuhastelussa kuitenkin sivuseikka eikä estä sitä iloa, joka syntyy kuvion reunalla ja sen sisällä sijaitsevien hilapisteiden havaitsemisesta, erottelusta ja lukumäärien laskemisesta.

Helpoiksi tarkoitetuissa tehtävissä monikulmiot kannattaa valita niin, että niissä on reunahilapisteitä parillinen määrä. Tällöin kahdella jaettaessa pysytään kokonaisluvuissa. Laskemisen helpottamiseksi ohjaaja voi värittää reunahilapisteet vuorotellen punaisiksi ja sinisiksi sekä sisähilapisteet vielä eri värillä, vaikkapa vihreiksi. Koska Pickin lauseen kaavassa lopuksi vähennetään luku yksi, niin on mahdollista menetellä niin, että yhtä sisähilapisteistä ei väritetäkään vihreäksi vaan esimerkiksi keltaiseksi. Tällöin tulee laskea yhteen monikulmion vihreiden sisähilapisteiden lukumäärä ja punaisten reunahilapisteiden lukumäärä. Tulokseksi saadaan "sisähilapisteiden lukumäärä + reunahilapisteiden lukumäärä jaettuna kahdella − 1", joka on monikulmion pinta-ala.

Ellei käytettävissä ole värejä, niin reunahilapisteet voi merkitä vuorotellen valkoisella ja mustalla pallolla (○ ja ●) sekä sisähilapisteet neliöllä (■), joista yksi eroavalla tavalla (□). Piirroksissa ei tarvita koordinaatistoa kokonaisuudessaan asteikolla varustettuna, vaan riittää merkitä ruudukko kuvion sisälle, kuten seuraavassa kuvassa. Paksulle väripaperille piirrettäessä kuvion voi leikata irti ja antaa lapsille tutkittavaksi. Reunahilapisteiden kohdalle kannattaa saksilla kiertää pieni ympyrän kaari, jotta pisteet erottuvat.



Paras ja huonoin ratkaisu?

Ei tietenkään ole olemassa yksiselitteisiä kriteereitä, joiden perusteella olisi mahdollisista selvittää, mikä minun ja Hannu Korhosen kirjoituksissa tehtävälle esitetyistä useista ratkaisuista on paras tai huonoin. Asiaa voi kuitenkin pohtia lähestymällä sitä monipuolisesti useasta eri näkökulmasta. Kaikki esitetyt ratkaisut ovat varmasti jollakin koulutasolla ja jossakin opetustilanteessa parhaita.

Jos kriteerinä käytetään ratkaisun yksinkertaisuutta, niin yli muiden nousee tässä kirjoituksessa esitetty Pickin lauseeseen perustuva ratkaisu. Onhan jo tullut todettua, että tällä tavalla tehtävän voi ratkaista kuka tahansa alakoululaisista lähtien.

Samoin perustein yhtä selvää lienee, että tehtävän huonoin ratkaisu on toisessa kirjoituksessa esitetty Greenin lauseesta johdettuun kaavaan perustuva ratkaisu. Sen ymmärtäminen vaatii yliopistomatematiikan opintoja esitiedoikseen. Tosin kirjoituksessa johdetun kaavan soveltaminen onnistuu paljon vähemmillä tiedoilla jo yläkoululaisilta. Kaavan etuna verrattuna Pickin lauseen kaavaan on, että monikulmion kärjet voivat sijaita missä tahansa. Niiden ei tarvitse olla hilapisteissä.

Pickin lauseen tai Greenin lauseesta johdetun kaavan käyttö monikulmion pinta-alan laskemisessa on varsin suoraviivaista, mikä on näiden ratkaisutapojen vahvuus mutta matematiikan opetuksen kannalta myös heikkous. Hannu Korhosen kirjoituksessaan esittämissä ratkaisuissa tarvitaan paljon enemmän luovuutta, mikä on tärkeää oppilaiden matemaattisten taitojen kehittymisessä.

Pickin lauseen tai Greenin lauseesta johdetun kaavan käyttö koulumatematiikassa yläluokilla ja lukiossa ei olekaan ongelmatonta. Jos kyseiset tulokset kuuluisivat opetussuunnitelmiin, niin luultavasti tarvittavat kaavat löytyisivät taulukko- ja kaavakokoelmista. Tällöin niitä käytettäisiin surutta ymmärtämättä lainkaan, miksi pinta-ala saadaan laskettua melko yksinkertaisiin kaavoihin hilapisteiden lukumääriä tai kärkien koordinaatteja sijoittamalla.

Ylempien luokkien opetuksessa tulisikin ensin varmistaa, että oppilaat todella ymmärtävät suorakulmion kannan ja korkeuden tuloon perustuvan pinta-alan käsitteen. Vasta sen jälkeen voidaan pohtia Pickin lauseen tai Greenin lauseesta johdetun kaavan yhteyttä pinta-alaan, joiden ymmärtäminen ei edistyneille oppilaille ole lainkaan vaikeaa. Mainittuja ja muitakin samankaltaisia tuloksia voikin mielestäni hyvin käyttää opetuksen eriyttämisessä. Jo yläkoulun oppilaat osaavat itsekin konstruoida Pickin lauseen todistuksen ainakin erikoistapauksissa (suorakulmio, suorakulmainen kolmio) esimerkiksi geolautojen avulla. Yleisen tuloksen todistus sopii opetukseen mainiosti harjoiteltaessa induktiotodistuksia.

Tehtäviä

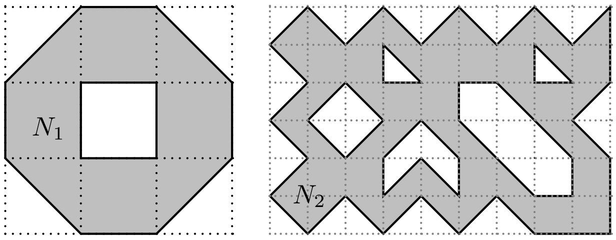
Tehtävä 1. Laske Pickin lauseen todistuksessa esiintyvien esimerkkihilamonikulmioiden S, L, T ja W pinta-alat Pickin lausetta käyttäen.

Tehtävä 2. Osoita, että reiällisen hilamonikulmion N pinta-ala on

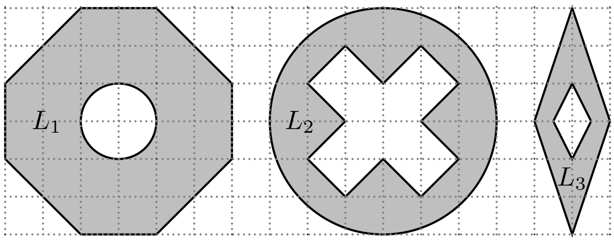
$$\text{ala}(N) = I + \frac{B}{2} - 1 + n,$$

missä n on reikien lukumäärä.

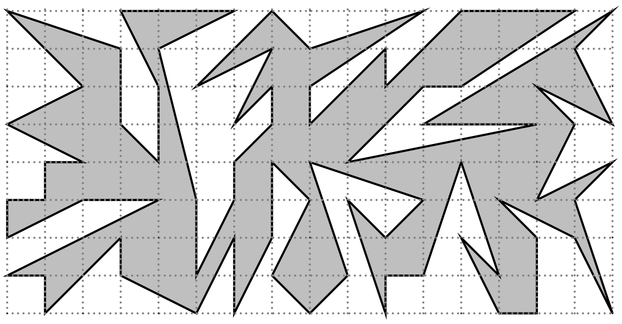
Tehtävä 3. Laske seuraavien reiällisten hilamonikulmioiden N_1 ja N_2 pinta-alat käyttämällä Pickin lauseen yleistystä. Tarkista tuloksesi hilamonikulmioihin sisältyvien yksikköneliöiden ja suorakulmaisten 1-kateettisten kolmioiden lukumäärien perusteella.



Tehtävä 4. Laske seuraavien kuvioiden L_1, L_2 ja L_3 pinta-alat.



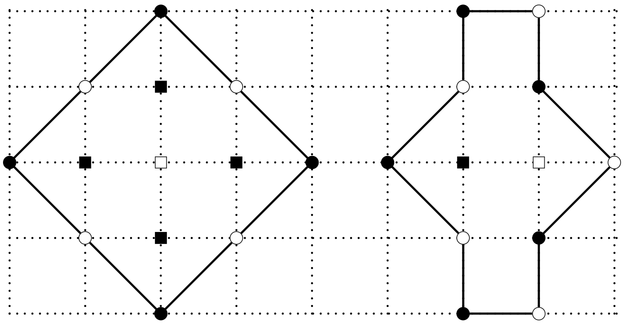
Tehtävä 5. Laske seuraavan hilamonikulmion pinta-ala. Laske pinta-ala myös käyttämättä Pickin lausetta!



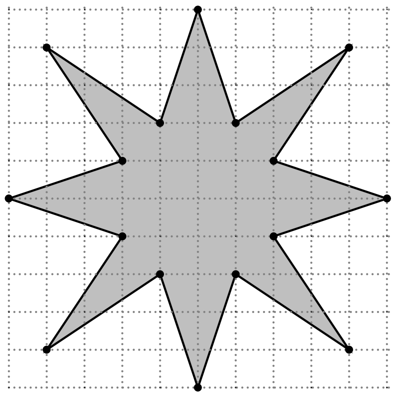
Tehtävä 6. Osoita Pickin lausetta käyttäen, että suorakulmaisen tasakylkisen hilakolmion pinta-ala on $k^2/2$, missä k on kyljen pituus.

Tehtävä 7. Tutkitaan hilasuunnikasta Q, jonka vierekkäiset kulmat ovat 45° ja 135°. Osoita Pickin lausetta käyttäen, että $\text{ala}(Q) = \text{kanta} \cdot \text{korkeus}$.

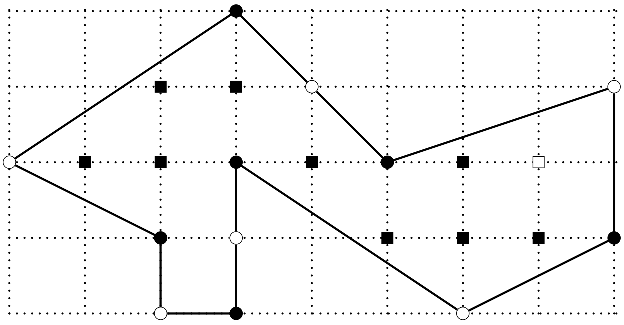
Tehtävä 8. Laske seuraavien hilamonikulmioiden pinta-alat.



Tehtävä 9. Laske seuraavan tähtikuvion pinta-ala.



Tehtävä 10. Laske seuraavan 10-kulmion pinta-ala.



Viitteet

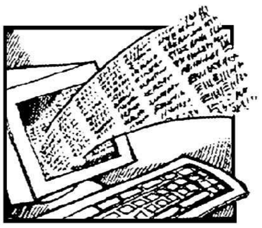
Davis, Tom, Pick's Theorem, http://www.geometer.org/mathcircles/pick.pdf.

Korhonen, Hannu, Lisäys monikulmion pinta-alan laskemiseen, Solmu 1/2010.

Koskenoja, Mika, Monikulmion pinta-ala koululaisille, Solmu 1/2009.

Koskenoja, Mika, Monikulmion pinta-ala ylioppilaille, Solmu 3/2009.

Lehtinen, Matti, Pickin lause, Suomen matematiikan olympialaisvalmennusmateriaalia, http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/kirjallisuus/pick.pdf



Kokemuksia matematiikan hyödyntämisestä teollisuudessa

Erkki Heikkola ja Pasi Tarvainen
Numerola Oy, Jyväskylä

Johdantoa

Matemaattiset ja laskennalliset menetelmät ovat keskeinen työkalu teollisuuden tutkimus- ja kehitystoiminnassa, ja niiden merkitys on jatkuvassa kasvussa. Tietokoneiden laskentakapasiteetin ja ohjelmistotyökalujen kehitys on mahdollistanut aiempaa edistyneempien matemaattisten menetelmien ja algoritmien hyödyntämisen eri teollisuusalojen sovelluksissa. Matematiikan ja siihen perustuvan tietokonelaskennan menetelmiä ja teollisia/kaupallisia sovelluksia käsittelevä ala, teollisuusmatematiikka, alkaa olla jo vakiintunut käsite.

Viime vuosina on tehty monia laajoja selvityksiä teollisuusmatematiikan ja laskennallisten tieteiden kehittämiseksi. Niiden lähtökohtana on ollut laskennallisten menetelmien kasvava tarve yhteiskunnan eri aloilla sekä havaitut puutteet alan koulutuksessa ja tieteellisen tietämyksen välittymisessä. Päätavoitteita on ollut hakea keinoja alan koulutuksen, tutkimuksen ja teollisuusyhteistyön kehittämiseksi. Esimerkiksi OECD julkaisi vuonna 2008 raportin ”Mathematics in Industry”, jossa käsitellään teollisuusmatematiikan alaa ja sen kehitysnäkymiä Euroopassa [1]. Vuoden 2009 alkupuolella taas julkaistiin raportti Yhdysvalloissa tehdystä alan kansainvälisestä selvityksestä [2]. Myös Suomessa opetusministeriön asettama työryhmä on tehnyt selvityksen laskennallisten tieteiden kansallisesta kehittämisestä [3]. Näiden raporttien pohjalta saa kattavan kuvan alan näkymistä ja kehitystarpeista.

Osallistuimme elokuussa 2009 Euroopan tiedesäätiön rahoittamaan workshopiin Wroclawissa Puolassa. Workshop liittyi hankkeeseen ”Forward Look on Mathematics and Industry”, ja sen tarkoituksena oli koota yliopistojen ja yritysten näkemyksiä ja kokemuksia teollisuusmatematiikan koulutuksen kehittämiseksi Euroopassa. Tämän artikkelin sisältö perustuu siellä pitämäämme esitelmään. Lähes saman esityksen pidimme myös lokakuussa Helsingin yliopiston matematiikan laitoksella järjestetyssä teollisuusmatematiikan päivässä sekä marraskuussa Tampereen teknillisellä yliopistolla järjestetyssä laskennallisten tieteiden seminaarissa.

Laskennallisen teknologian palvelut

Numerola Oy on laskennallisten tieteiden asiantuntijayritys. Tarjoamme matemaattiseen mallinnukseen, optimointiin ja laskennallisiin menetelmiin perustuvia konsultointi- ja ohjelmistokehityspalveluja. Yrityksen palveluksessa on tällä hetkellä 17 matematiikan, ohjelmistokehityksen ja insinööritieteiden asiantuntijaa, joista 7 on suorittanut tohtorin tutkinnon omalla alallaan. Suuri osa työntekijöistä on opiskellut Jyväskylän yliopiston matematiikan laitoksella erikoistuen numeerisen analyysin ja tieteellisen laskennan menetelmiin. Nykyinen palvelukonseptimme on toteutettu yhteistyössä kuopiolaisen Kuava Oy:n kanssa, ja kutsumme kokonaisuutta Laskennallisen teknologian palveluiksi.

Olemme jakaneet laskennallisen teknologian palveluiden toiminnot ja osaamisen kolmeen osa-alueeseen: Mallinnus ja optimointi, tekninen laskenta ja ohjelmistoratkaisut.

Mallinnus ja optimointi sisältää ilmiöiden, laitteiden ja prosessien matemaattisen mallinnuksen joko luonnonlakeihin perustuvien yhtälöiden tai empiiristen mittausaineistojen perusteella. Muodostettuja malleja käytetään edelleen apuvälineinä prosessien simuloinnissa, ohjauksessa ja optimoinnissa. Mallinnukseen ja optimointiin perustuvassa suunnittelussa suunnittelutyökalut automatisoidaan yhdistämällä matemaattiset menetelmät, luonnonlait ja tuotteen teknologiset ominaisuudet.

Teknisessä laskennassa laitteiden ja prosessien toimintaa tarkastellaan mallinnusohjelmistoilla. Voimme esimerkiksi arvioida laitteiden virtausteknistä toimivuutta, mallintaa akustisia ja sähkömagneettisia aaltoja ja tehdä suurien mittausaineistojen tai signaalien analyysia. Teknisten laskentaohjelmistojen avulla voimme tarjota nopeita ongelmanratkaisuja teollisuuden tarpeisiin.

Laskennallinen teknologia on viime vuosina edennyt yhä selvemmin monimutkaisista simuloinnin yleisohjelmistoista kohti räätälöityjä toimiala- ja sovelluskohtaisia ratkaisuja. Tällä tavoin simuloinneista saadaan tavoiteltu hyöty nopeasti ilman yleisohjelmistojen edellyttämää erityisosaamista ja henkilöstöresursseja. Ohjelmistoratkaisuissa kehitämme laskennallisiin malleihin ja menetelmiin perustuvia räätälöityjä ohjelmistotuotteita, joita asiakas voi hyödyntää mm. tuotekehityksessä, tuotannon suunnittelussa, koetoiminnan tehostamisessa tai myynnin apuvälineenä. Nämä voivat olla esimerkiksi tuotesuunnittelun tueksi toteutetut simulaattorit tai olemassaolevaan järjestelmään lisäominaisuuksia tuovat liitännäisohjelmistot.

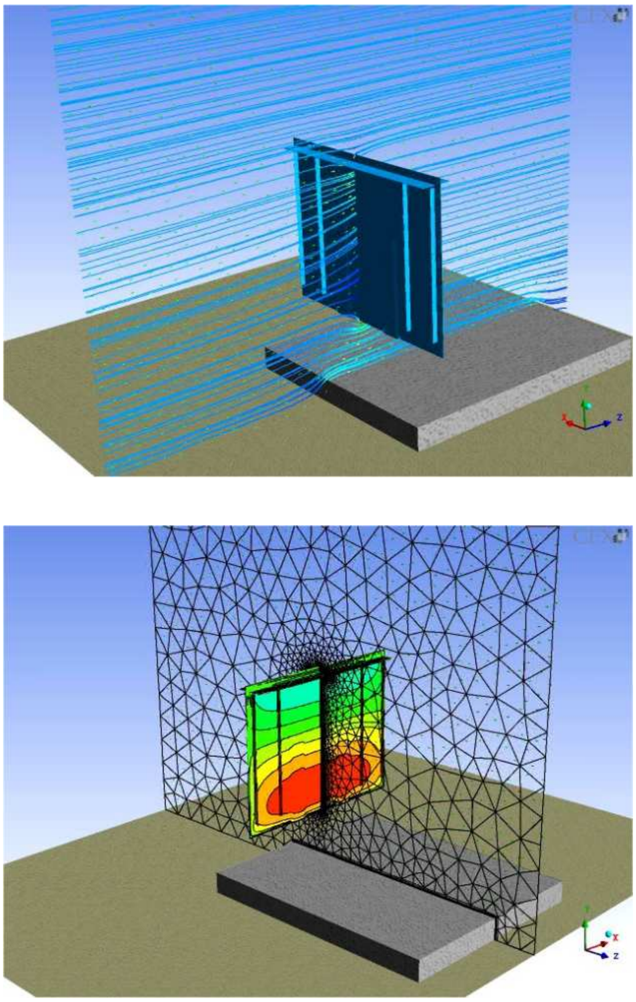
Palvelukokonaisuuden tavoitteena on tuottaa mallinnus- ja simulointityökaluja laajasti yritysten erilaisiin liiketoimintaprosesseihin sekä tuotteiden elinkaaren eri vaiheisiin.

Esimerkkejä teollisuusprojekteista

Esittelemme tässä muutaman esimerkin toteuttamistamme teollisuusmatematiikkaa hyödyntävistä projekteista. Tarkoituksena on havainnollistaa, miten matematiikkaa voidaan hyödyntää monipuolisesti yritysten liiketoiminnassa, ei pelkästään tuotesuunnittelussa.

Aaltovoimala

Numerola on kehittänyt laskennallista teknologiaa, jolla voidaan simuloida aaltovoimalajärjestelmää. WaveRoller-aaltovoimala on suomalaisen AW-Energy Oy:n kehittämä pohja-aaltoa hyödyntävä voimalakonsepti. Laite koostuu pohja-aallon kaappaavasta ”siivestä” ja siihen hydraulisylinterin kautta kytketystä hydrauligeneraattorista. Numerolan kehittämä simulointimalli perustuu Ansys CFX:llä ja Numerolan Numerrin-ohjelmistolla toteutettuun ajasta riippuvaan virtaus-rakenne -malliin. Lisäksi kehitystyössä hyödynnetään Numerolan data-analyysiin kehittämää Datain-ohjelmistoa. Simulointimallin avulla voidaan mm. arvioida eri konstruktioiden tehontuottoa ja optimoida koko systeemin säätöä.



Kuva 1: Kuvassa on visualisoitu tietyllä ajanhetkellä virtauksen virtaviivoja ja laskentaverkkoa yhdellä poikkitasolla sekä painetta siiven pinnalla.

Mallin lisäksi Numerola on toteuttanut AW-Energylle simulaattorin meren pohja-aaltoa energian tuotannossa hyödyntävän siiven toiminnan analysointiin. Simulaattori

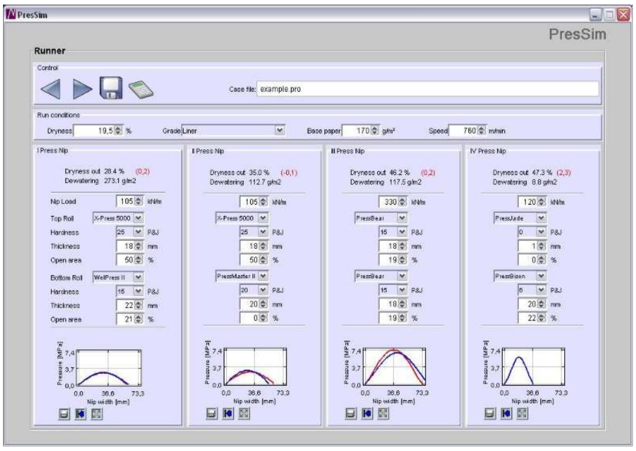
- mahdollistaa aaltovoimalan erilaisten siipikonstruktioiden toiminnan analysoinnin annetuissa meriolosuhteissa,
- sisältää helppokäyttöisen toiminnon eri siipikonstruktioiden vertailuun,

- sisältää monipuolisen tulosten visualisoinnin.

Ohjelmisto on käytössä AW-Energyn tuotekehitysyksikössä Helsingissä.

Paperikonesimulaattorit

Numerola on toteuttanut Metso Paper Oy:n Service-liiketoimintayksikölle PresSim-simulaattorin paperikoneen puristinkonstruktioiden tarkasteluun. Ohjelmisto sisältää monipuolisia mallinnukseen ja simulointiin perustuvia ominaisuuksia kuten eri puristinkonseptien tarkka ja havainnollinen vertailu ja käyttökohteen mukainen optimointi. Simulaattori on toiminut Metso Paperin markkinoinnin tukena, ja sen avulla on voitu tarjota entistä paremmin sekä asiakasta että Metso Paperia hyödyttäviä ratkaisuja.



Kuva 2: Näkymä PresSim-simulaattorista.

Paperikoneiden laadunvalvonnan tueksi Numerola on toteuttanut Metso Paperille säätöjärjestelmään integroidun optimointiohjelmiston. Ohjelmiston avulla useaa paperikoneen kontrollisuuretta voidaan säätää parhaan laatukompromissin ja toimintaikkunan löytämiseksi. Ohjelmisto on osa paperikoneen jälkikäsittely-yksikön automaattista säätöjärjestelmää, ja se on otettu käyttöön Metso Paperin konetoimitusten yhteydessä mm. Skandinaviassa ja Kanadassa.

Datain-ohjelmisto

Esimerkki sovelluskohteesta tai asiakkaasta riippumattomasta työkalusta on kehittämämme Datain-ohjelmisto mittausaineistojen analysointiin. Tavoitteena on ollut toteuttaa helppokäyttöinen työkalu, jolla saa nopeasti selkeän kokonaiskuvan aineistosta. Dataimella voi luoda erilaisia aineistoon perustuvia regressiomalleja ja tehdä malleihin perustuvaa monitavoitteista optimointia. Työkalu on suunnattu erityisesti henkilöille, jotka työskentelevät usein mittausaineistojen parissa, mutta joilla ei ole osaamista tai aikaa perehtyä data-analyysin järeämpiin yleisohjelmistoihin.

Matematiikka ja laskennallinen teknologia teollisuudessa

Matematiikka ja laskennalliset menetelmät tarjoavat monia mahdollisuuksia tukea ja edistää teollista toimintaa. Mallinnuksen avulla voidaan esimerkiksi

- vähentää kalliiden koejärjestelyjen ja prototyyppien tarvetta,
- havaita ja korjata suunnitteluvirheet aikaisessa vaiheessa,
- parantaa koejärjestelyjen laatua ja tehostaa tulosten analysointia,
- optimoida tuotteen ominaisuuksia ja testata uusia ideoita,
- luoda työkaluja markkinoinnin, koulutuksen ja laadunvalvonnan tueksi.

Mallinnus- ja simulointimenetelmien käyttö teollisuudessa on jatkuvassa kasvussa, mutta ne eivät mielestämme ole vielä vakiinnuttaneet asemaansa kaikilla teollisuuden aloilla. Näemme matemaattisen osaamisen hyödyntämisellä vielä suuret kasvun mahdollisuudet teollisuudessa. Menetelmien ja nykyään tarjolla olevien työkalujen soveltaminen vaatii korkeaa asiantuntemusta, erityisosaamista ja resursseja. Suurilla teollisuusyrityksillä on varaa palkata teollisuusmatematiikan ja teknisen laskennan asiantuntijoita, mutta pienemmille yrityksille tämä on usein mahdotonta. Myös simuloinnin integrointi yritysten tuoteprosessin tehokkaaksi työkaluksi on vielä vajavaisesti toimivaa, kuten on todettu VTT:n tekemässä Digitaalinen tuoteprosessi -tutkimusohjelman selvitysraportissa [4].

Yliopistoissa ja tutkimuslaitoksissa on paljon osaamista, joka kuitenkin välittyy huonosti teollisuuteen. Akateemiset julkaisut ja tutkimukset harvoin vastaavat sellaisenaan yritysten tarpeisiin. Ne edustavat alan viimeisintä osaamista, jota harvat osaavat hyödyntää tai ainakaan tehdä sen perusteella kannattavaa liiketoimintaa. Paremmin teollisuudessa hyödynnettävissä olevat perinteisemmät menetelmät taas eivät ole akateemisen tutkimuksen kannalta mielenkiintoisia. Toisaalta teollisuudessa puuttuu osaamista muotoilla ongelmia matemaattiseen muotoon ja esittää niitä tarpeeksi täsmällisesti akateemisen tutkimuksen pohjaksi. Teollisuuden ja yliopistojen suoraa yhteistyötä matematiikan alalla vaikeuttavat erilaiset näkökulmat, tavoitteet ja aikataulut.

Yliopistojen ja teollisuuden välille tarvittaisiin eräänlaisia välittäjiä, jotka ymmärtäisivät molempien osapuolien tarpeita ja edistäisivät vuoropuhelua. Tämä tarve on mainittu esim. OECD:n raportissa. Näkemyksemme mukaan Numerolan kaltaiset asiantuntijayritykset osaltaan toimivat tällaisina välittäjinä. Kokemus tutkimustyöstä ja sen myötä saavutettu akateeminen osaaminen auttavat työskentelemään yliopistojen kanssa ja hyödyntämään edistyneitä matemaattisia tekniikoita teollisten ongelmien ratkaisussa. Lisäksi palveluyritykset tuntevat teollisuuden sovellusaloja ja osaavat suodattaa akateemisesta tiedosta teollisuudelle olennaista tietoa ja jalostamaan sen ymmärrettävään muotoon. Teollisuusprojekteihin liittyy paljon työvaiheita, jotka eivät kuulu yliopistojen toimenkuvaan kuten palvelujen markkinointi, sovelluskehitys, dokumentointi, käyttötuki, jne. Tästä syystä olisi tärkeää, että akateemisen osaamisen ympärille syntyisi liiketoimintaa, joka välittää tehokkaasti osaamista teollisuuteen. Alan palvelutarjonnan myötä myös pienet yritykset, joilla ei ole mahdollisuutta sitoa omaa henkilöstöä matemaattisiin tehtäviin, voivat hyödyntää matemaattista osaamista.

Matematiikan teollisia sovelluksia kehittäviä projekteja vaivaa usein tehottomuus. Ala on uusi ja sen mahdollisuuksia ei teollisuudessa laajasti vielä tunneta. Projektien tavoitteita ei osata tarpeeksi täsmällisesti määritellä ja odotukset matematiikan mahdollisuuksista ovat joskus epärealistisia. Ehkä myös matematiikan osaajien puolelta luvataan enemmän kuin mihin pystytään. Epäonnistumisten myötä motivaatio mallinnustoiminnan hyödyntämiseen ja kehittämiseen helposti katoaa, joten projektien aiempaa tarkempaan suunnitteluun ja tavoitteiden ymmärrettävyyteen pitäisi kiinnittää huomiota. Teollisuusmatematiikan projektien pitäisi tarjota selkeitä vastauksia hyvin määriteltyihin kysymyksiin.

Teollisuusmatemaatikon pätevyysvaatimuksia

Teollisuusmatemaattisten projektien toteutuksessa harvoin riittää yhden henkilön tai osa-alueen osaaminen, vaan tarvitaan useiden eri alojen osaajien yhteistyötä. Laskennalliset tieteet on tieteiden välinen ala, jossa tarvitaan matematiikan lisäksi mm. luonnontieteiden, tilastotieteen, ohjelmistotekniikan ja insinööritieteiden osaamista. Tarkemmat osaamisvaatimukset riippuvat aina tarkasteltavasta sovellusalueesta. Mutta matematiikan ja tietokonelaskennan menetelmien osaaminen on keskeistä teollisuusmatematiikan menestyksekkäälle soveltamiselle. Yksi perusvaatimus, josta ei kannata tinkiä, on perusteellinen ja laadukas peruskoulutus omalla alalla. Esimerkiksi hyvää luonnontieteellistä tai matemaattista peruskoulutusta on helppoa täydentää teollisuussovellusten vaatimalla lisäosaamisella, mutta peruskoulutuksen puutteita on vaikeaa korjata teollisuusprojektien yhteydessä.

Teollisuusmatematiikassa on joitakin aloja tai teemoja, joiden merkitys on viime vuosina huomattavasti kasvanut. Koulutuksen ei ole syytä seurata jokaista viimeisintä trendiä, mutta kasvavat tarpeet esimerkiksi data-analyysin ja peliteollisuuden alalla olisi hyvä huomioida myös teollisuusmatematiikan opetuksessa. Näin on monessa yliopistossa kiitettävästi tehtykin.

Ohjelmistokehityksen tarpeita on tärkeää ymmärtää myös muiden kuin ohjelmistokehittäjien. Matemaattisten mallien ja menetelmien laajamittainen leviäminen teolliseen käyttöön edellyttää, että ne on liitetty helppokäyttöisiin simulaattoreihin ja käyttöliittymiin. Pelkkä ansiokas mallinnus ei riitä. Sovelluskehityksen on tärkeää tuottaa käytettäviä, muunneltavia ja ylläpidettäviä kokonaisuuksia.

Monissa alan asiantuntijayrityksissä kuten Numerolassa ja Kuavassa työntekijöiden koulutustaso on korkea, ja monilla on paljon kokemusta tieteellisestä tutkimustyöstä. Tutkijan tausta ei ole välttämätöntä, mutta usein sen myötä kehittyvät taidot ja ominaisuudet ovat hyödyllisiä. Esimerkiksi kyky hakea uutta tieteellistä tietoa alan matemaattisista julkaisuista on tärkeää. Teollisuuden ongelmat ovat usein erittäin haastavia, ja projektien alkuvaiheessa ei ole aina selvää, pystytäänkö asetettuihin kysymyksiin vastaamaan ja ratkaisuja löytämään. Tarvitaan siis usein tietynlaista tutkijan rohkeutta perehtyä itselle uusiin asioihin ja näkemystä siitä, mistä olennainen tieto voisi löytyä.

Teollisuudessa matematiikan soveltaminen on yleensä ongelmien ratkaisua jollakin tavalla ja harvemmin uuden tieteellisen tiedon tuottamista. Projekteja rajoittavat lyhytjänteiset aikataulut, rahalliset resurssit ja tiukat tavoitemääritykset. Perimmäisenä tavoitteena on yleensä tuottaa rahallista hyötyä yritykselle. Tätä voi olla esimerkiksi ajan tai raaka-aineiden säästyminen, kilpailuedun saavuttaminen tai virheiden välttäminen. Teollisuusmatematiikan koulutuksen olisi hyvä antaa perustietoja projektinhallinnasta ja liiketoiminnasta, koska nämä ovat tärkeitä tekijöitä myös matemaattisen osaamisen kaupallistamisessa. Myös erilaisten yleisten taitojen kuten kirjallinen raportointi, suullinen esiintyminen sekä kielitaito merkitystä ei voi väheksyä, kun matematiikan ja teollisuuden yhteistyötä pyritään kehittämään. Näiden osaamista voisi parantaa esimerkiksi sopivilla matematiikan opetusmenetelmillä.

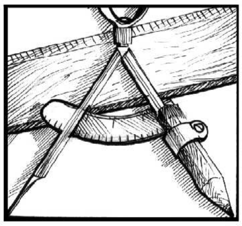
Viitteitä

1. OECD Global Science Forum, Report on Mathematics in Industry, 2008.

2. WTEC Panel Report on International Assessment of Research and Development in Simulation-Based Engineering and Science, 2009.

3. Laskennallisen tieteen kehittäminen Suomessa, Opetusministeriön työryhmämuistioita ja selvityksiä 2007:23.

4. O. Ventä, J. Takalo, P. Parviainen, Digitaalinen tuoteprosessi -selvitysraportti, VTT, 2007.



Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun tehtävät ja ratkaisut 2009

Matemaattisten aineiden opettajien liiton lukion matematiikkakilpailu on kaksiportainen. Kilpailun ensimmäinen kierros on kolmisarjainen, ja sarjojen osallistumisoikeuden määrittelee kilpailijan ikä. Lukuvuoden 2009–10 kilpailun ensimmäinen kierros pidettiin 29. lokakuuta 2009.

Kilpailutehtävät olivat tällaiset:

Perussarja

1. Marjoja myytiin rasioissa, jotka oli hinnoiteltu marjatyypin mukaan. 2 rasiaa vadelmia, 2 rasiaa herukoita ja 1 rasia mustikoita maksoi yhteensä 8 euroa, 1 rasia vadelmia, 3 rasiaa herukoita ja 1 rasia mustikoita maksoi 7,5 euroa ja annos, jossa oli 2 rasiaa vadelmia ja 3 rasiaa mustikoita, maksoi 7 euroa. Kuinka paljon maksoi yhteensä 3 rasiaa vadelmia, 2 rasiaa herukoita ja 3 rasiaa mustikoita?

2. Täydennä alla oleva ruudukko niin, että siinä esiintyvät kaikki luvut $1, 2, \ldots, 16$ ja jokaisen vaaka- ja pystyrivin lukujen summa on sama. Etsi kaikki eri tavat täydentää ruudukko.

4			
9			8
7	2	10	

3. Neliöpohjaisen laatikon pohjalle sijoitetaan kaksi ympyränmuotoista kiekkoa. Kiekkojen säde on r. Mikä on pienin mahdollinen laatikon sivu a?

4. Määritä kaikki tavat lausua 2009 kahden positiivisen kokonaisluvun neliöiden (eli toisten potenssien) erotuksena.

Välisarja

1. Sama tehtävä kuin perussarjan tehtävä 2.

2. Tasakylkisen kolmion korkeusjana halkaisijana piirretään ympyrä. Mihin suhteeseen sen kehä jakaa leikkaamansa sivut, kun kolmion kanta ja korkeus ovat yhtä suuret?

3. Viisi tasavahvaa pelaajaa pelaa keskenään yksinkertaisen sarjan pelejä, jotka päättyvät jommankumman pelaajan voittoon ja joissa molempien voittotodennäköisyys on $\frac{1}{2}$. Pelit ovat keskenään toisistaan riippumattomia. Mikä on todennäköisyys, että kukin voittaa kaksi peliä?

4. Määritä kaikki tavat lausua 2009 kahden positiivisen kokonaisluvun kuutioiden (eli kolmansien potenssien) erotuksena.

Avoin sarja

1. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 10 ja 24. Suuremmalla kateetilla oleva piste keskipisteenä piirretään ympyräviiva, joka sivuaa toista kateettia ja hypotenuusaa. Laske ympyrän säde.

2. Kolmion sivujen pituudet muodostavat geometrisen jonon, jonka suhde on q. Osoita, että $\sqrt{5} - 1 < 2q < \sqrt{5} + 1$.

3. Sama kuin välisarjan tehtävä 4.

4. Osoita, että 10 suomalaista voi soittaa 10 ruotsalaiselle 30 puhelua niin, että

1) kukaan ei soita kellekään kahdesti ja

2) mitkään kaksi suomalaista eivät soita keillekään kahdelle ruotsalaiselle kaikkia mahdollista neljää puhelua.

Tehtävien ratkaisut

Useimpiin tehtäviin löytyy useita ratkaisutapoja ja niiden muunnelmia.

Perussarja 1. Olkoot v, h ja m vadelmien, herukoiden ja mustikoiden rasiahinnat euroina. Tehtävän ehdot voidaan kirjoittaa yhtälöryhmäksi

$$\begin{cases} 2v + 2h + m = 8 \\ v + 3h + m = 7{,}5 \\ 2v \phantom{{}+3h} + 3m = 7 \end{cases}.$$

Kun yhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan $5(v + h + m) = 22{,}5$ eli $v + h + m = 4{,}5$. Tästä ja toisesta yhtälöstä saadaan $2h = 7{,}5 - (h + v + m) = 7{,}5 - 4{,}5 = 3$, joten $h = 1{,}5$. Toisesta yhtälöstä saadaan nyt $3v + 2h + 3m = 3(v + h + m) - h = 3 \cdot 4{,}5 - 1{,}5 = 12$.

Perussarja ja välisarja 2. Ruudukon lukujen summa on

$$1 + 2 + \cdots + 16 = \frac{16 \cdot 17}{2} = 8 \cdot 17 = 4 \cdot 34,$$

joten kunkin vaakarivin ja pystysarakkeen lukujen summa on 34. Vasemman sarakkeen alimpaan ruutuun tulee siis luku 14 ja kolmannen rivin neljänteen ruutuun 15. Oikeanpuoleisen sarakkeen kahden tyhjän ruudun lukujen summa on 11. Lukuparit, joiden osien summa on 11, ovat (1, 10), (2, 9), (3, 8), (4, 7) ja (5, 6). Kaikkien muiden paitsi viimeisen parin luvuista ainakin toinen on jo käytetty. Jää siis selvitettäväksi kaksi mahdollisuutta: 5 on oikean sarakkeen ylin ja 6 alin luku tai 6 ylin ja 5 alin. Jos 5 on ruudukon oikeassa yläkulmassa, ylimmän rivin keskimmäisten lukujen summa on 25, ja luvut löytyvät pareista (9, 16), (10, 15), (11, 14) tai (12, 13). Jälleen vain luettelon viimeinen pari on mahdollinen. Luku 16 ei voi olla alimmassa rivissä, koska $14 + 16 + 6 > 34$. 16 on siis toisessa rivissä. 16 ei voi olla kolmannessa sarakkeessa, koska $12 + 16 + 10 > 34$. Luku 16 on siis toisen rivin toisessa ruudussa. Silloin 1 on saman rivin kolmannessa ruudussa, joten alarivissä keskimmäisissä ruuduissa ovat 2 ja 11. 12 ei voi olla ylärivin toisessa ruudussa, koska tällöin toisen sarakkeen lukujen summa olisi pariton. Ylärivissä on siis oltava järjestyksessä luvut 4, 13, 12 ja 5, ja kun alarivi on 14, 3, 11, 6, tehtävän ehto täyttyy. Yksi mahdollinen järjestys on siis

4	13	12	5
9	16	1	8
7	2	10	15
14	3	11	6

Toinen mahdollisuus on, että ruudukon oikeassa yläkulmassa on 6 ja oikeassa alakulmassa 5. Samoin kuin edellä päätellään, että ylärivin keskimmäisissä ruuduissa on oltava 13 ja 11, että luvun 16 on oltava toisen rivin toisessa ruudussa ja luvun 1 toisen rivin kolmannessa ruudussa, että luvun 12 on oltava alarivin kolmannessa ruudussa; tämän jälkeen lukujen 11, 13 ja 3 paikat määräytyvät, ja ruudukko on

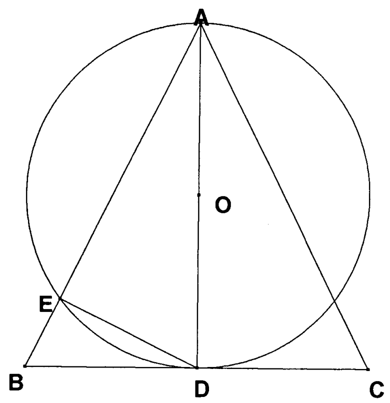
4	13	11	6
9	16	1	8
7	2	10	15
14	3	12	5

Perussarja 3. Kiekot voidaan aina asettaa kiinni toisiinsa. Voidaan siis rajoittua tutkimaan tapausta, jossa kiekot sivuavat toisiaan. Jos kiekkojen keskipisteitä yhdistävä suora muodostaa kulman α toisen neliön sivun, sanokaamme vaakasivun kanssa, niin pystysivujen etäisyyden on oltava ainakin $r + 2r\cos\alpha + r = 2r(1 + \cos\alpha)$ ja vaakasivujen etäisyyden on oltava ainakin $r + 2r\sin\alpha + r = 2r(1 + \sin\alpha)$. Laatikon sivun on oltava suurempi luvuista $2r(1+\cos\alpha)$, $2r(1+\sin\alpha)$. Kun $\alpha = 45^\circ$, molemmat luvut ovat $2r(1+\sqrt{2}/2)$. Kun $\alpha < 45^\circ$, niin $\cos\alpha > \cos 45^\circ$ ja kun $\alpha > 45^\circ$, niin $\sin\alpha > \sin 45^\circ$. Etäisyyksistä suurempi on siis pienin mahdollinen, kun $\alpha = 45^\circ$, joten pienin mahdollinen a on $2r(1 + \sqrt{2}/2)$.

Perussarja 4. Etsitään positiivisia kokonaislukuja x ja y, joille $2009 = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. Lukujen $x + y$ ja $x - y$ on oltava luvun 2009 tekijöitä. Mutta $2009 = 7 \cdot 287 = 7^2 \cdot 41$, ja koska $x + y > x - y$, on x:n ja y:n toteutettava jokin seuraavista yhtälöpareista:

$$\begin{cases} x + y = 2009 \\ x - y = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y = 287 \\ x - y = 7 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y = 49 \\ x - y = 41 \end{cases}.$$

Yhtälöparien ratkaisuiksi saadaan helposti $(x, y) = (1005, 1004)$, $(147, 140)$ ja $(45, 4)$.



Välisarja 2. Olkoon kolmio ABC tasakylkinen, olkoot $BC = 2r$ ja $AD = 2r$ kolmion korkeusjana. Olkoon O AD:n keskipiste ja leikatkoon O-keskinen r-säteinen ympyrä sivun AB pisteessä E. Valitaan mittayksikkö niin, että $EB = 1$. Olkoon $AE = x$. Thaleen lauseen perusteella $\angle AED = 90°$, joten $DE = h$ on kolmion ABD korkeusjana. Suorakulmaisen kolmion tunnetun ominaisuuden (tai yhdenmuotoisten suorakulmaisten kolmioiden AED ja DEB perusteella) tiedetään, että $h^2 = AE \cdot EB = x$. Suorakulmaisesta kolmiosta BDE nähdään, että $x = h^2 = r^2 - 1$ eli $r^2 = 1 + x$. Suorakulmaisesta kolmiosta AED puolestaan saadaan $x^2 + h^2 = 4r^2$. Siis $x^2 + x = 4(x+1)$ eli $x^2 - 3x - 4 = 0$. Tämän toisen asteen yhtälön ainoa positiivinen ratkaisu on $x = 4$. Jakosuhde on siis $4 : 1$.

Välisarja 3. Kukin pelaaja pelaa neljä peliä ja pelejä on yhteensä $\binom{5}{2} = 10$. Olkoon P_1 yksi pelaajista. Todennäköisyys, että P_1 voittaa tasan kaksi peliä, on $\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$. Oletamme, että P_1 voittaa P_2:n ja P_3:n ja että P_2 voittaa P_3:n ja että P_1 häviää pelaajille P_4 ja P_5 ja että P_4 voittaa P_5:n. On käsitelty kuusi peliä. Loppujen neljän pelin on kaikkien päädyttävä määrättyyn lopputulokseen: Kaksi peliä hävinneen P_3:n on voitettava P_4 ja P_5, tämän jälkeen kaksi peliä hävinneen P_5:n on voitettava P_2 ja kaksi peliä hävinneen P_2:n on voitettava P_4. Todennäköisyys, että nämä neljä peliä päättyisivät juuri näin on $\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$. Todennäköisyys, että jokainen pelaaja voittaisi juuri kaksi peliä on siten $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{128}$.

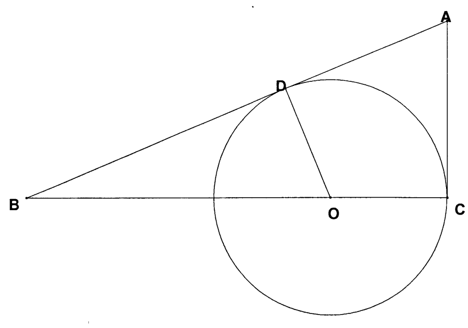
Välisarja 4 ja avoin sarja 3. Koska ratkaistavana on yhtälö $2009 = x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$ ja $2009 = 7^2 \cdot 41 = 7 \cdot 287$, kokonaislukujen x ja y, $x > y$, on toteutettava jokin yhtälöpareista

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 2009 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 + xy + y^2 = 287 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x - y = 41 \\ x^2 + xy + y^2 = 49 \end{cases}.$$

Ensimmäinen pari johtaa yhtälöön $x^2 + x(x-1) + (x-1)^2 = 2009$ eli $3x^2 - 3x = 2008$. Koska 2008 ei ole jaollinen kolmella, yhtälö ei toteudu millään kokonaisluvulla x. Vastaavasti toinen yhtälöpari johtaa yhtälöön $x^2 + x(x-7) + (x-7)^2 = 287$ eli $3x^2 - 21x + 49 = 7 \cdot 41$. Siis x^2 on jaollinen 7:llä. Mutta silloin x on jaollinen 49:llä samoin kuin $21x$:kin. Yhtälön oikea puoli ei ole jaollinen 49:llä, joten yhtälöllä ei ole kokonaislukuratkaisua. Jos viimeisellä yhtälöparilla olisi ratkaisu, jossa x on positiivinen kokonaisluku, niin $x \geq 41$ ja $x^2 + xy + y^2 \geq 41^2 > 49$. Ratkaisua ei siis ole. Tehtävässä kysyttyjä tapoja kirjoittaa luku 2009 ei siis ole olemassa.



Avoin sarja 1. Olkoon suorakulmaisessa kolmiossa ABC C suoran kulman kärki ja $AC = 10$, $BC = 24$. Silloin $AB^2 = 4 \cdot (5^2 + 12^2) = 4 \cdot 169 = 26^2$, joten $AB = 26$. Olkoon O sivun BC piste ja sivutkoon r-säteinen O-keskinen ympyrä Γ AC:tä ja AB:tä. Koska $BC \perp AC$, Γ sivuaa AC:tä pisteessä C. Olkoon D Γ:n ja AB:n yhteinen piste. Silloin $OD \perp AB$. Tangenttien leikkauspisteen ja sivuamispisteiden väliset janat ovat yhtä pitkät, joten $AD = AC = 10$. Siis $BD = 26 - 10 = 16$. Suorakulmaiset kolmiot ABC ja BOD ovat yhdenmuotoiset. Siis $\frac{r}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{12}$ ja $r = \frac{16 \cdot 5}{12} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$.

Avoin sarja 2. Kolmion sivut ovat a, qa ja q^2a. Oletetaan ensin, että $q \geq 1$. Kolmion pisin sivu on lyhempi kuin kahden muun summa. Siis $aq^2 < a + aq$ eli $q^2 - q - 1 < 0$. Epäyhtälössä on yhtälö, kun $q = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$, joten epäyhtälö on voimassa, vain kun $1 \leq q < \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Siis $2 \leq 2q < 1 + \sqrt{5}$. Oletetaan sitten, että $0 < q < 1$. Nyt a on kolmion pisin sivu, joten $a < aq + aq^2$ eli $q^2 + q - 1 > 0$. Epäyhtälössä on yhtälö, kun $q = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$, joten epäyhtälö on voimassa vain kun $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) < q < 1$ eli $-1 + \sqrt{5} < 2q < 2$. Luku q toteuttaa siis tehtävässä ilmoitetun kaksoisepäyhtälön.

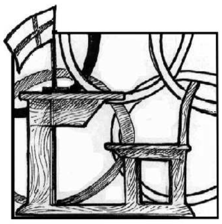
Avoin sarja 4. Riittää, että kuvailee jonkin tavan järjestää soitot niin, että tehtävän ehto toteutuu. Olkoon suomalaiset $S_0, S_2, \ldots, S_9$ ja ruotsalaiset $R_0, R_1, \ldots, R_{10}$. Soittakoon suomalainen S_i ruotsalaisille R_i, R_{i+1} ja R_{i+3}, missä indeksit luetaan mod 10. Puheluja on

$3 \cdot 10 = 30$, eikä kukaan suomalainen soita kellekään ruotsalaiselle kahdesti, joten ehto 1) täyttyy. Ehdon 2) voimassaolon todistamiseksi riittää, kun tarkastellaan kaaviota, johon on merkitty kaikki puhelut:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 & S_9 \end{matrix} \\
\begin{matrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
x & x & & x & & & & & & \\
 & x & x & & x & & & & & \\
 & & x & x & & x & & & & \\
 & & & x & x & & x & & & \\
 & & & & x & x & & x & & \\
 & & & & & x & x & & x & \\
 & & & & & & x & x & & x \\
x & & & & & & & x & x & \\
 & x & & & & & & & x & x \\
x & & x & & & & & & & x
\end{pmatrix}
\end{array}.$$

Jos jotkin kaksi suomalaista S_i ja S_k soittaisivat kahdelle ruotsalaiselle R_m ja R_n kaikki neljä mahdollista puhelua, kaaviossa olisi rivien m ja n sekä sarakkeiden i ja k määrittämän suorakaiteen kaikissa kärjissä x. Kaaviota riveittäin tarkastamalla näkee kuitenkin, että siinä ei ole yhtään sellaista suorakaidetta, jonka kaikissa kärjissä olisi x.

Lehdessä Tiedetoimittaja 4/08 kerrotaan, mitä professori Phillipp Slusallek, Saksan tekoälyn tutkimuskeskuksen tiedejohtaja ja tietokonegrafiikan professori Saarlandin yliopistossa ajattelee alan opiskelijoista je heidän menestyksensä yhteydestä menestykseen matematiikan opinnoissa. ”Slusallekin mukaan uusia opiskelijoita riittää. Ongelma vain on se, että toisena vuonna ainoastaan osa jatkaa alan opiskeluja. Olemme huomanneet, että hyvä menestys matematiikan opinnoissa kertoo hyvästä menestyksestä tietojenkäsittelytieteen opinnoissa, Slusallek sanoo. Esimerkiksi taitava tietokoneiden kanssa näprääjä ei välttämättä ole hyvä alan teorian opiskelija. Matemaattisesti lahjakkaiden opiskelijanuorukaisten lisäksi Slusallek kaipaa alalle enemmän nuoria naisopiskelijoita. Tuntuu kuin menettäisimme kokonaan puolet ikäluokasta, Slusallek valitti.”



Mitä todistaminen on ja ei ole – erään kilpailutehtävän opetuksia

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Syksyn 2009 Lukion matematiikkakilpailun ensimmäisen kierroksen avoimen sarjan tehtävä 2 oli seuraava:

”Kolmion sivujen pituudet muodostavat geometrisen jonon, jonka suhde on q. Osoita, että $\sqrt{5}-1 < 2q < \sqrt{5}+1$*.”*

Osallistuin kilpailuvastausten arviointiin, ja seuraavat sinänsä triviaalit havainnot kuvaavat mielestäni jonkin verran matematiikan kulmakiven, loogisen päättelyn, osaamisen ongelmallisuutta ja sitä, että pitkänkin ”matematiikan” laskentopainotteisesta opetuksesta se paljolti loistaa poissaolollaan. Kilpailun osallistujien voi arvella edustavan yleensä lukiolaisten matematiikan osaamisen kärkipäätä.

Tehtävä oli ajateltu ratkaistavaksi suunnilleen näin: jos kolmion sivut ovat a, qa ja q^2a ja jos $q \geq 1$, niin q^2a kolmion pisimpänä sivuna on lyhempi kuin kahden muun sivun yhteispituus. q toteuttaa siis epäyhtälön $q^2 < 1+q$. Tämä epäyhtälö ratkaistaan totutulla tavalla; epäyhtälön ratkaisu on ylöspäin aukeavan paraabelin q^2-q-1 nollakohtien $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ rajaama väli, mutta oletus $q \geq 1$ rajaa ratkaisujoukoksi välin $\left[1,\ \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right]$. Jos taas $q < 1$, niin kolmion pisin sivu on a ja kolmioepäyhtälö johtaa epäyhtälöön $1 < q+q^2$. Tämän yhtälön ratkaisuja ovat ylöspäin aukeavan paraabelin q^2+q-1 nollakohtien $q = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ rajaaman suljetun välin komplementin luvut. Lisäehdon $0 < q < 1$ mukaisesti ratkaisuja ovat väliin $\left(\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1),\ 1\right)$ kuuluvat luvut q. Todistus on valmis. Jakoa $q \geq 1$, $q < 1$ ei tietenkään tarvitse tehdä. Molempien kolmioepäyhtälöiden $q^2 < 1+q$ ja $1 < q+q^2$ on joka tapauksessa toteuduttava ja q:n on kuuluttava yhtälöiden ratkaisujoukkojen leikkaukseen, joka juuri on tehtävässä todistettavaksi vaadittu ehto.

Melko useat kilpailijat vastasivat suunnilleen näin: ”Jos $q = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, niin

$$q^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1+q.$$

Mutta ”kolmiossa”, jonka sivut ovat a, qa ja q^2a, pisin sivu on yhtä pitkä kuin lyhempien sivujen summa, eli kolmio onkin janaksi surkastunut eikä siis ole kolmio. Samoin, jos $q = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, niin

$$q^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1-q.$$

Kolmiossa, jonka sivut ovat a, qa ja q^2a pisin sivu a on yhtä pitkä kuin sivujen qa ja q^2a summa, joten tämäkin kolmio surkastuu epäkolmioksi. Koska väitetyn q:ta koskevan epäyhtälön ääripäissä ei saada kolmiota, on väitös todistettu!”

Mutta mitä tässä onkaan todistettu? Että tehtävän kolmioita määrittävä parametri ei saa arvoja $\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}$. Tämä on tosin askel oikeaan suuntaan: väitteenhän todistaisi se, että *epäyhtälöt* $q \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ja $q \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ovat asetetussa tilanteessa mahdottomia.

Muutamat kilpailijat esittivät huomattavasti sofistikoituneemman ratkaisuehdotuksen. ”Voimme olettaa, että kolmiossa ABC on $AB = 1$, $BC = q$ ja $CA = q^2$. Jos $\angle ABC = \beta$, niin kosinilauseen mukaan $q^4 = q^2 + 1 - 2q\cos\beta$ eli

$$\cos\beta = \frac{-q^4+q^2+1}{2q} = f(q).$$

Tarkastellaan funktiota $f(q)$. Kun $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, niin

$$f(q) = \frac{-\frac{7+3\sqrt{5}}{2} + \frac{3+\sqrt{5}}{2} + 1}{1+\sqrt{5}} = -1$$

ja kun $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, niin

$$f(q) = \frac{-\frac{7-3\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} + 1}{-1+\sqrt{5}} = 1.$$

Lisäksi

$$\begin{aligned} f'(q) &= \frac{(-4q^3+2q)(2q) - 2(-q^4+q^2+1)}{4q^2} \\ &= \frac{-3q^4+q^2-1}{2q^2}. \end{aligned}$$

Etsitään derivaatan nollakohtia: sijoitus $q^2 = t$ palauttaa ongelman toisen asteen yhtälöön $-3t^2 + t - 1 = 0$; tämän yhtälön diskriminantti on $1 - 12 < 0$, joten nollakohtia ei ole. Derivaatta säilyttää merkkinsä ja $f(1) = -\frac{3}{2}$, joten derivaatta on kaikkialla negatiivinen. f on siis aidosti vähenevä funktio, joten

$$-1 = f\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) < f(q) < f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 1,$$

kun $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Johtopäätös: näillä q:n arvoilla $-1 < \cos\beta < 1$, joten kolmio on olemassa.”

Miksi tämä ei ole tehtävän ratkaisu? Tietysti siksi, että todistettava väite oli muotoa ”kun parametrista q riippuva kolmio on olemassa, niin parametri q kuuluu tiettyyn väliin”. Yllä osoitettiin vain, että jos parametri kuuluu väliin, kolmio saattaa olla olemassa; ainakaan kosinilauseen yhden osion kanssa ei jouduta ristiriitaan. Sen sijaan yllä oleva lasku olisi mainiosti antanut mahdollisuuden epäsuoraan todistukseen. Jos oletettaisiin, että kolmio olisi olemassa ja parametri q olisi tehtävässä annetun välin ulkopuolella, funktion f monotonisuus antaisi seurauksen $\cos\beta \geq 1$ tai $\cos\beta \leq -1$, jotka kumpikin olisivat ristiriidassa oletuksen kanssa.

Kosinilausetta hyödynsi myös seuraava kaunis ratkaisu. Siinä kolmio ABC on sama kuin edellä, ja $\angle CAB = \alpha$.

”Koska $\cos\alpha < 1$, niin kosinilauseen perusteella $q^2 = q^4 + 1 - 2q^2\cos\alpha > q^4 + 1 - 2q^2$. Siis $q^4 - 3q^2 + 1 < 0$. Sijoitetaan $q^2 = t$ ja ratkaistaan epäyhtälö $t^2 - 3t + 1 < 0$. Vasemman puolen nollakohdat ovat

$$t = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Epäyhtälö toteutuu siis, kun

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} < t < \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Mutta

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$$

ja

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2,$$

joten q on vaaditussa välissä.”

Tässä on kaikki kohdallaan, vaikka ensin voi epäilyttää se, että eri relevanttien kolmioepäyhtälöiden tarkastelua vaativia tilanteita $q < 1$ ja $q > 1$ ei käsitellä erikseen. Onnellinen valinta on ollut tarkastella keskimmäisen sivun vastaista kulmaa. Se lähestyy nollaa kummassakin surkastumispäässä, ja johtaa molempien reunojen löytymiseen samasta epäyhtälöstä.

Mielenkiintoista laskentoa lapsille ja opettajillekin

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Teuvo Aittokallio: Patikkaretkiä matematiikan maisemaan. Matikkaretket 2009. 299 s. 30 e + postikulut 5 e.

Teuvo Aittokallion kirjan ottaa käteensä melko ennakkoluuloisena. Kustannusyhtiö on kirjoittajan perheyhtiö, kielentarkastajana on kirjoittajan miniä, kansi on levoton kaksine maisema- ja ihmiskuvineen joiden päälle on liimattu keltainen aurinko, jota koristaa kolmio ympäri- ja sisäänpiirrettyine ympyröineen, eikä selkämyksestä löydy kirjan nimeä. Tekstiä selaamalla huomaa, että euron merkit ovat jääneet tulostumatta ja ajatusviivat ovat tavuviivan mittaisia. Kaksi ensimmäistä virkettä päättyy huutomerkkiin. Amatöörityötä siis.

Mutta ulkoasu voi pettää. Aittokallion kirja on itse asiassa mitä mainioin opas laskennon ja matematiikan monitahoiseen maailmaan. Sen kohderyhmänä ovat alakoululaiset, siis nyttemmin poistuneen ala-asteen oppilaat ja heidän vanhempansa. Ilman muuta lisään tähän ainakin alakoulunopettajat, siis luokanopettajat ja sellaisiksi opiskelevat.

Kirjan ensimmäinen puolisko on Perusosa, joka kattaa suurin piirtein koulussakin opetettavan laskennon. Aittokallio lähtee liikkeelle laskemisesta, perustelee kymmenjärjestelmän sekä peruslaskutoimitukset ja etenee murtolukuihin ja päättymättömiin desimaalilukuihin. Aivan oppikirjan johdonmukaisuutta ei tavoitella, onhan samat asiat yritetty jo koulussa oppia, tai yritetään. Hän ei arkaile ottaa esiin ”pidemmälle ehtineiden” asioita: kirjainlaskento, potenssimerkintä, vektorit ja alkeellinen mittateoriakin tulevat luontevasti esiin kohdillaan. Hauskoja asioita otetaan esiin ja mikä tärkeintä, perustellaan kunnolla, mutta helppotajuisesti. Juuri näin matematiikkaa voidaan opettaa kiinnostavasti: on aina sellaista, joka ei vielä ehkä aukea, mutta se on siellä odottamassa. Aittokallion laskento ei ole ”leiki, laula ja puuhaile jotain kivaa” -toimintaa, vaan ihan oikeaa tavaraa. Ja perusasenne on realistinen: vaikka matematiikka on kivaa ja innostavaa, niin kertotaulua on oikeasti päntättävä (Aittokallion oma ilmaus), kunnes se on painunut selkäytimeen.

Kirjan puolivälistä alkaa Matikkaekspertit-osio, johon on koottu monenlaisia mielenkiintoisia lastuja matematiikan eri aloilta. Osa on toki kovinkin vaikeita, mutta niiden kautta käy ainakin selväksi, että matematiikka jatkuu kauas oppikirjan ja opetussuunnitelman ulkopuolelle. ”Pulmanurkka”-osassa on laskennollisia ajanvietetemppuja ja ongelmia. Tehtäviin annetaan ratkaisut kirjan lopussa. Loppuun on vielä laadittu noin 400 sanan suomalais-englantilainen sanasto, joka sisältää runsaasti sanoja aloilta, joita ei itse kirjassa käsitellä. Kirja suosittelee lukuisia englanninkielisiä verkkosivuja – niiden lukijat saattaisivat kaivata käännösapua englannista suomeen.

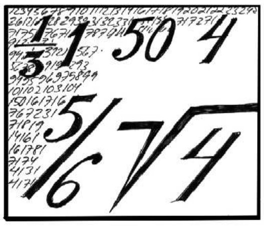
Aittokallion teksti on leppoisaa ja sujuvaa, sopivasti vitseilläkin höystettyä, ja kirjoittajan persoona, omat kokemukset ja innostuneisuus tulevat miellyttävästi esiin. Joskus pedagogiset huomiot saattavat vaikuttaa kohderyhmää ajatellen turhiltakin. Virheitä saattaa löytää, mutta niitä on silmiinpistävän vähän. Muutamin paikoin kirja on työkirjamainen: käyttäjää pyydetään täyttämään puuttuvia kohtia. Tämä ei ehkä ole ollut paras ratkaisu kirjan mahdollista uusiokäyttöä ajatellen.

Esipuheessaan Aittokallio arvelee kirjansa antavan ainekset noin sataan matematiikkakerhotuntiin. En arvioi luvun paikkansapitävyyttä, mutta se on selvää, että kerhonpitäjältä ei sanottava lopu, jos kirja on käsillä.

Mutta mielenkiintoinen kysymys. Miksi kirja on omakustanne? Eikö tällaiselle lastenkulttuurin alalla merkittäväksi teoksi luonnehdittavalle julkaisulle löytynyt kaupallista kustantajaa ja sen levitysmahdollisuuksia? Kirjaa voi nyt tilata kustantajalta osoitteesta `www.matikkaretket.fi`.

Olli Rehn kertoi jo pohtivansa uuden komission haasteita. Siinä tavoitteena on edelleenkin raskas salkku talous- ja ulkoasioiden laajalta kentältä. ”Olen lukenut pitkän matematiikan ja perehtynyt todennäköisyyslaskentaan ja optimointiin”, Rehn kertoi.

Helsingin Sanomat 21.11.2009

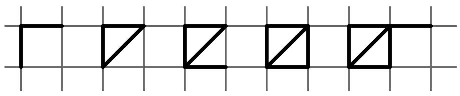


Peruskoulun matematiikkakilpailun alkukilpailu

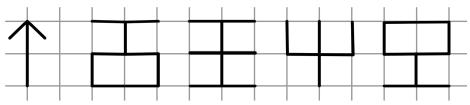
Lukuvuoden 2009–10 Matemaattisten aineiden opettajien liitto MAOL:in valtakunnallisen Peruskoulun matematiikkakilpailun ensimmäinen kierros pidettiin 4. marraskuuta 2009. Työskentelyaikaa oli vain 50 minuuttia.

Kilpailutehtävät olivat seuraavanlaiset:

1. a) Piirrä jonon seitsemäs kuvio.



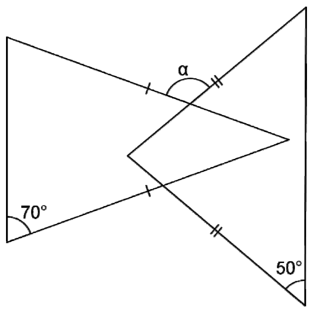
b) Piirrä jonon seuraava kuvio. Minkä säännön mukaan jono muodostuu?



2. Laske a) kuinka monta grammaa (g) on unssissa (oz.), b) kuinka monta unssia (oz.) on paunassa (lb.), c) kuinka monta grammaa (g) on paunassa (lb.).

3. Laske lukujen 1 ja $\dfrac{1}{999\,999\,999\,999}$ summa, erotus ja osamäärä.

4. Päättele, kuinka suuri on kulma α. Kannat ovat yhdensuuntaisia.



5. Piirrä ympyrä, jonka säde on kuusi ruutua. Jaa sen kehä kahdeksaan yhtä suureen osaan. Piirrä kahdeksan puoliympyrän kaarta, joiden toinen päätepiste on yksi jakopisteistä ja toinen on ympyrän keskipiste. Piirrä selkeä kuva käyttäen harppia. Tummenna muodostuneista alueista joka toinen. Kuinka suuri osa tummennettu alue on ympyrän pinta-alasta? Perustele.

6. Laske puuttuvien lukujen summa. Ruudukossa pitää jokaisella pystyrivillä, jokaisella vaakarivillä ja jokaisessa pienessä $3 \cdot 3$-ruudukossa olla luvut 1, 2, 3, …, 9, jokainen vain yhden kerran.

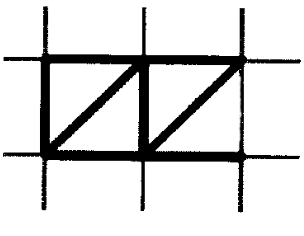
7. Neliön kärkipisteet ovat ruutuviivojen leikkauspisteissä ja sivun pituus on viisi pituusyksikköä eli ruudun sivua. Yksi kärki keskipisteenä piirretään ympyrä, joka kulkee keskipisteenä olevan kärjen vastaisen kärjen kautta. Kuinka monen ruutuviivojen leikkauspisteen kautta ympyrän kehä kulkee? Piirrä kuva. Tarkasta tuloksesi laskemalla.

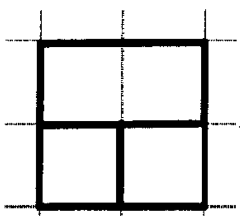
8. Nettiyhteisössä on tyttöjä ja poikia. Jokaisella tytöllä on kaverina neljä tyttöä ja viisi poikaa. Jokaisella pojalla on kaverina kolme poikaa ja seitsemän tyttöä. a) Onko nettiyhteisössä enemmän poikia vai tyttöjä? Perustele. b) Mikä on nettiyhteisön pienin mahdollinen henkilömäärä? Perustele.

Ratkaisuja

Seuraavat, osin saivarteluakin sisältävät ratkaisut ovat Solmun toimituksen. Niiden perusteella ei tule tehdä päätelmiä palkintoraadin arvioista eikä siitä, kuinka perusteellinen työ varsin niukan vastausajan puitteissa olisi mahdollista.

1. Tehtävä on samanlainen kuin ns. älykkyystesteissä tavallinen "mikä on jonon seuraava jäsen?" Tällaiseen tehtävään ei ole täsmällistä matemaattista ratkaisua. Positiivisten kokonaislukujen joukossa määritelty funktiohan ei määräydy pelkästään joukossa $\{1, 2, \ldots, n\}$ saamiensa arvojen perusteella, jos muuta informaatiota ei ole annettu. "Luonnollisenoloinen" vastaus kohdassa a) on tietenkin ylemmän kuvan figuuri ja kohdassa b), jossa kuviot voi hahmottaa numeroiksi 1, 2, 3, 4 ja 5 asetettuna seläkkäin yhteen peilikuviensa kanssa, esimerkiksi oheinen kahta kuutosta markkeeraava kuvio.



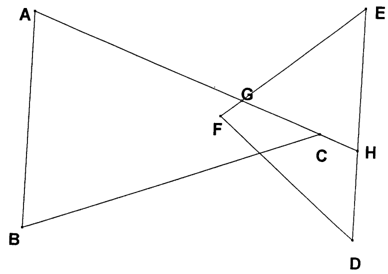


2. Jos etiketti on rehellinen, niin $\frac{3}{4}$ lb $= 340$ g $= 12$ oz. Tästä nähdään, että 1 lb $= 16$ oz $= \frac{4}{3} \cdot 340$ g $= 453\,\frac{1}{3}$ g. Lisäksi 1 oz $= \frac{340}{12}$ g $= 28\,\frac{1}{3}$ g. [Koska (tavallinen) unssi on noin 28,35 g ja pauna eli naula 453,59 g, etiketti on rehellinen.]

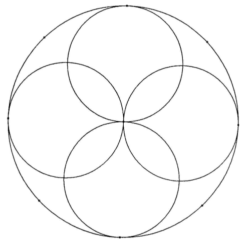
3. Kysytyt luvut ovat

$$1\,\frac{1}{999\,999\,999\,999},\ \frac{999\,999\,999\,998}{999\,999\,999\,999}\ \text{ja}\ 999\,999\,999\,999.$$

4. Kuvan merkinnöistä päätellään, että kolmiot ABC ja DEF ovat tasakylkisiä. Leikatkoon suora AC EF:n pisteessä G ja DE:n pisteessä H. Koska kolmio DEF on tasakylkinen, $\angle FED = 50°$. Koska $AB \| DE$ ja kolmio ABC on tasakylkinen, niin $\angle EHG = \angle CAB = 70°$. Koska kolmion kulman vieruskulma on kolmion kahden muun kulman summa, nähdään kolmiosta HEG, että $\alpha = \angle AGE = 70° + 50° = 120°$.



5. Tehtävän sanamuoto on hiukan väljä, kun se ei tarkemmin määrittele puoliympyränkaarien asemaa. Eräs tehtävän ehdot täyttävä kuvio olisi viereinen ylempi ympyräkuvio. "Joka toinen alue" on mielekäs, kun piirretään kuvio alemman mallin mukaan. Silloin tietysti kaikki kahdeksan aluetta ovat sama-alaisia, ja 45° kierto origon ympäri vaihtaa varjostetun ja varjostamattoman alueen toisikseen. Kummankin ala on siis puolet ympyrän alasta.



6. Jos tehtävän sudokulla on ratkaisu, tehtävän vastaukseksi riittävä informaatio on esimerkiksi vaakarivejä koskeva. Jokaisen vaakarivin lukujen summaksi on tultava $1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$, joten koko ruudukon lukujen summa on $9 \cdot 45 = 5 \cdot 81 = 405$. Kun esillä olevien lukujen summa on (vaakariveittäin laskettuna) $21+12+19+13+19+14+8+9+24 = 139$, puuttuvien lukujen summa on $405 - 139 = 266$.

Jos sattuisi niin, että sudokulla ei olisi ratkaisua, ei tehtävälläkään olisi [silloin tällöin sattuu aikakauslehdissä silmiin sudokuja, jotka ovat virheellisiä – useimmiten, vaikkei aina, virhe osoittautuu ratkaisijan tekemäksi]. Ratkaisun olemassaolon varmistamiseksi olisi siis sudoku ratkaistava. Sudoku todellakin ratkeaa, sen ratkaisu on

5	9	3	7	6	2	1	4	8
6	7	3	3	8	1	5	2	9
8	1	2	9	5	4	7	3	6
3	5	9	6	2	8	4	1	7
2	6	8	1	4	7	5	9	3
1	4	7	5	9	3	8	6	2
4	8	5	2	3	9	6	7	1
9	2	1	4	7	6	3	8	5
7	3	6	8	1	5	2	9	4

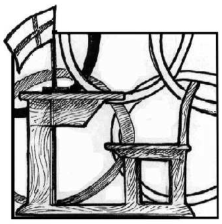
7. Tämänkin tehtävän sanamuoto saattaa näyttää hiukan väljältä, kun neliön asentoa ruudukossa ei ole yksilöity. Voidaan olettaa, että neliön yksi kärki on origo ja pituusyksikkö on ruudukon neliön (sillä neliöitähän ruudut lienevät) sivu. Kaksi neliön kärkeä on silloin sellaisissa pisteissä (x, y), joiden etäisyys origosta on 5 eli joille pätee $x^2 + y^2 = 25$. Tällaisia pisteitä ovat $(\pm 5, 0)$, $(0, \pm 5)$ ja $(\pm 4, \pm 3)$ ja $(\pm 3, \pm 4)$. Erilaisia tehtävän toteuttavia neliöitä on kaikkiaan 12. Jokaisen lävistäjän pituuden neliö on $5^2 + 5^2 = 50$, joten kaikkiin neliöihin liittyy sama origokeskinen ympyrä. Tällä ympyrällä olevien ruutuviivojen leikkauspisteet (x, y) toteuttavat kaikki ehdon $x^2 + y^2 = 50$. Kokeilemalla nähdään, että ainoat kokonaislukuparit, jotka yhtälön toteuttavat, ovat $(\pm 5, \pm 5)$ (4 kpl) ja $(\pm 1, \pm 7)$ (4 kpl) sekä $(\pm 7, \pm 1)$ (4 kpl). Pisteitä on siis 12.

8. Olkoon poikia p kappaletta ja tyttöjä t kappaletta. Tehtävässä ei ilmoitettu kaveruuden molemminpuolisuutta. Ilman tätä tietoa tehtävällä ei ole ratkaisua: samat seitsemän tyttöä voivat olla kavereina esim. sadalle pojalle, ja tytöillä on kullakin omat muutamat kaverinsa toisten tyttöjen ja poikien joukossa, samoin pojilla poikien joukossa. Jos kuitenkin kaveruus on molemminpuolista, voidaan ”kaveruus” tulkita esim. kaveriparia yhdistäväksi viivaksi. Viivoja on $7p = 5t$, joten $p < t$. Lisäksi p on jaollinen 5:llä ja t 7:llä. Pojasta poikaan kulkevia viivoja on $\frac{3p}{2}$, koska jokaisesta pojasta lähtee kolme tällaista viivaa, ja jokainen viiva tulee lasketuksi kahdesti, kerran kummankin päänsä kohdalla. Tämä merkitsee sitä, että p on parillinen luku, joten $p \geq 10$ ja siis $t \geq 14$. Osoitetaan, että 24 henkilön nettiyhteisö toteuttaa vaaditut ehdot. Jaetaan kymmenen poikaa kahdeksi viiden pojan joukoksi P_1 ja P_2 ja 14 tyttöä kahdeksi seitsemän tytön joukoksi T_1 ja T_2. Jos joukon P_1 jokaisen pojan kavereina ovat kaikki T_1:n tytöt ja joukon P_2 jokaisen pojan kavereina kaikki joukon T_2 tytöt, niin poikien ja tyttöjen välinen kaveruusehto toteutuu. Jos kummassakin tyttöjoukossa erikseen kaveruus toteutuu esimerkiksi oheisen kaavion mukaan, tyttöjen tuttavuusehto täyttyy:

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} &
\left(\begin{array}{ccccccc}
 & x & & x & x & & x \\
x & & x & & x & x & \\
 & x & & x & & x & x \\
x & & x & & x & & x \\
x & x & & x & & x & \\
 & x & x & & x & & x \\
x & & x & x & & x &
\end{array}\right)
\end{array}.$$

Poikien kaveruusehto puolestaan täyttyy esimerkiksi silloin, kun kaveruudet järjestyvät tällaisen kaavion mukaan:

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} &
\left(\begin{array}{cccccccccc}
 & x & & & x & & & & & x \\
x & & x & & & x & & & & \\
 & x & & x & & & x & & & \\
 & & x & & x & & & x & & \\
 & & & x & & x & & & x & \\
 & & & & x & & x & & & x \\
x & & & & & x & & x & & \\
 & x & & & & & x & & x & \\
 & & x & & & & & x & & x \\
x & & & x & & & & & x &
\end{array}\right)
\end{array}.$$



Uusi koulukohtainen syventävä kurssi ja oppikirja lukioihin

Sirkka-Liisa Eriksson ja Terhi Kaarakka
Matematiikan laitos, Tampereen teknillinen yliopisto

Kirja: Sirkka-Liisa Eriksson, Miika Huikkola, Terhi Kaarakka, Erkki Pirttimäki, Risto Silvennoinen ja Lasse Vehmanen, **Matematiikka tieteiden kuningatar ja palvelija**, MFKA-Kustannus Oy, 2009.

Kurssin ja oppikirjan lähtökohdat

Keväällä 2006 Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan laitoksella aloitettiin yhteistyössä lukioiden kanssa kehitellä lukioihin uutta syventävää kurssia ja siihen liittyvää oppikirjaa, jonka sisällöt soveltuisivat myös ammattikorkeakouluihin. Yhteistyökouluiksi ilmoittautuivat Pirkaanmaalta ja Matemaattisten Aineiden Opettajien Liiton MAOL ry:n tilaisuuksien kautta Etelä-Tapiolan lukio, Helsingin Suomalaisen Yhteiskoulun lukio, Hervannan lukio, Kaurialan lukio, Tampereen normaalikoulun lukio ja Valkeakosken lukio.

Kurssin tarkoituksena on tuoda lisää innostusta ja merkitystä matematiikan oppimiseen lukioissa ja ammattikorkeakouluissa. Lähtökohtana on myös helpottaa siirtymistä lukiosta matematiikan yliopisto-opintoihin. Tähän on suuri tarve, sillä nykyisin matematiikkaa tarvitsevien yliopisto- ja ammattikorkeakouluopiskelijoiden määrä on voimakkaasti kasvanut.

Matematiikka lukiossa on muuttunut yhä enemmän erilaisten malliesimerkkien tarkasteluiksi ja laskutehtävien ratkaisemiseksi. Tästä seuraa ongelmia, kun lukiolaiset hakeutuvat jatko-opintoihin. Matematiikka yliopistoissa tai teknillisissä yliopistoissa ei ole vain laskutehtävien ratkaisemista, vaan keskeistä on myös teorian ja sen käsitteiden hyvä ymmärtäminen ja tuloksien välisien yhteyksien oivaltaminen. Teknillisissä yliopistoissa matematiikan perusvalmiudet annetaan tiiviinä pakettina parin ensimmäisen vuoden aikana, jotta ammattiaineille saataisiin hyvä pohja. Tämä vaatii opiskelijoilta kykyä omaksua asioita nopeasti ja pohjatietojen heikkous vaikeuttaa opiskelua merkittävästi. Monet sovellukset pohjautuvat pitkällekin menevälle matemaattiselle teorialle.

Yhtenä ratkaisuna ongelmaan on kurssi, joka toimii siltana korkeamman asteen opiskelun ja lukion välillä. Hyvä siltakurssi ei vain kertaa vanhaa opittua, vaan antaa suuntaa myös tulevista sisällöistä. Perusvalmiuksien lisäksi sen tarkoituksena on kasvattaa kiinnostusta matematiikkaan, jotta oppiminen onnistuisi ja opiskelu olisi mielekästä. Tähän olemme työssämme pyrkineet.

Kurssin kuvaus

Matematiikka tieteiden kuningatar ja palvelija on lukion loppuvaiheen opiskelijoille suunnattu kurssi. Kurssin tavoitteena on lisätä innostusta matematiikkaan esittämällä matematiikan ajankohtaisia sovellusesimerkkejä nuoria kiinnostavista asioista ja parantaa heidän perustaitojaan yliopistojen ja teknillisten yliopistojen opintoihin. Samalla kurssi täydentää ja syventää aiemmilla kursseilla opittuja asioita. Kurssilla esitellään sovelluksiin liittyvää matematiikkaa ja niiden teoreettisia taustoja, mm. Googlen toimintaperiaate, GPS-paikannus, tietokonegrafiikka ja MP3-pakkaustekniikka.

Kirjan kirjoittamisesta ja kurssin sisällöistä vastaavat matematiikan peruskursseja luennoineet henkilöt professori Sirkka-Liisa Eriksson (projektin johtaja), DI Miika Huikkola, lehtori Terhi Kaarakka, pt. tuntiopettaja Erkki Pirttimäki, lehtori Risto Silvennoinen ja lehtori Lasse Vehmanen. Kirjan kirjoittajien lisäksi kurssin tekemisessä ja kommentoimisessa ovat aktiivisesti olleet mukana opettajat Sarpa Heino (Hervannan lukio), Ville Hynönen (Helsingin Suomalaisen Yhteiskoulun lukio), Sinikka Järvi (Valkeakosken lukio), Jukka Männistö (Tampereen normaalikoulun lukio), Sakari Salonen (Kaurialan lukio), Ulla Sorri (Hervannan lukio) ja Marja Voipio (Etelä-Tapiolan lukio). Projektitutkijoina mukana ovat olleet Virve Pihlava-Lahtinen ja Lauri Judin sekä sihteerinä Tiina Sävilahti.

Kurssia ja oppikirjaa on kokeiltu 2008–2009 yhteistyökouluissa. Projektin rahoitti Teknologiateollisuuden 100-vuotissäätiö ja projekti on mukana opetushallituksen Tiede- ja teknologiahankkeessa.

Kurssin aiheita ovat:

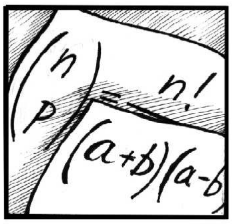
- Differentiaalilaskenta työkaluna
  derivaatta, differentiaaliyhtälöt, mallinnusta
- Matematiikan perusteista
  lause, todistaminen, induktio, joukkojen mahtavuus
- Kompleksilukujen joukko
  laskutoimitukset, geometriset ominaisuudet, eksponenttiesitys
- Matriisilaskentaa
  laskutoimitukset, lineaariset yhtälöryhmät, ominaisarvot, tekniikan sovelluksia

Ensimmäinen aihe kertaa differentiaalilaskentaa ja sen lisäksi se antaa teoreettisia perusteita esimerkiksi seuraaville malleille: populaation "luonnollinen" kasvu, Englannin Stonehenge-monumentin luota löytyneiden puuesineiden ikä, korkoa korolle jatkuvana prosessina. Toisessa aiheessa kuvataan matematiikkaa tieteenä ja esitellään matemaattisia peruskäsitteitä ja selvitetään muun muassa, mitä reaaliluvut ovat ja miten ne eroavat rationaaliluvuista. Kompleksilukujen joukko on tason pistejoukko, joka laajentaa reaalilukujen lukujoukkoa tason geometristen ominaisuuksien avulla. Tämä aihe näyttää, kuinka tarkasti jo tällä tasolla pystymme luomaan matemaattista teoriaa. Matriisilaskenta antaa keinoja käsitellä useiden rivien ja sarakkeiden muodostamia taulukkoja, joita tarvitaan esimerkiksi mallinnettaessa internet-hakukoneita, GPS-paikannusta, tietokonegrafiikkaa ja MP3-pakkaustekniikkaa.

Ei-kaupallisia tietokoneohjelmia SciLab tai Octave tai vastaavia kaupallisia ohjelmia, kuten MatLab ja Maple, voidaan käyttää kirjan ohessa ja osassa esimerkeistä on annettu ohjeita tähän. Maolilta voi saada kirjaan liittyvänä oheismateriaalina SciLab-ohjelman käyttöoppaan ja harjoitustehtävien ratkaisuja.

Kokeilukouluissa tehtiin kurssiin osallistuneille kurssikysely. Vastanneita oli 45. Asteikolla 1–5 kurssista pidettiin keskiarvolla 3,8. Pohjatiedot koettiin riittäviksi (ka. n. 3,7) ja työmäärä sopivaksi (ka. n. 3,9). Opiskelijoiden mielestä kurssilla opituista asioista tulee olemaan hyötyä jatkossa (ka. n. 3,9). Kurssi valittiin matematiikan taitojen parantamiseksi (ka. n. 4,1).

Kirjaan on tehty korjauksia ja muutoksia kyselyn järjestämisen jälkeen. Tehtäviä on lisätty ja joitakin tehtäviä muokattu. Asiasisältöjä on paranneltu ja täydennetty. Tietokone-esimerkkejä on lisätty ja tietokoneella suoritettavien tehtävien määrää on lisätty.



Oliko vuosi 2009 sittenkin tylsä?

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Solmussa 3/2009 julkaistiin parikymmentä koululaiskilpailutehtävää, joita yhdisti luku 2009, ja toivottiin niihin lukijoiden ratkaisuja. Solmun postilaatikon ei voi sanoa pullistelleen palautteen määrästä. Iloisen poikkeuksen muodosti **Matti Leinonen** Espoosta, joka lähetti melkein kaikkiin tehtäviin oikean ratkaisun. Useimmat seuraavista ratkaisuista noudattavat Leinosen suuntaviivoja.

Ratkaisuissa käytetään lukuteorian ja logiikan kurssista tuttua lukukongruenssiformalismia. Muutaman tehtävän ratkaisussa turvaudutaan Eulerin ϕ-funktion ominaisuuteen, joka ei kuulu Suomessa lukioissa opiskeltavan lukuteorian kurssin piiriin. Tulos sinänsä on melko helppo muotoilla: jos n on positiivinen kokonaisluku, niin $\phi(n)$:llä merkitään niiden lukujen k, $1 \le k \le n-1$, lukumäärää, joilla ei ole muuta yhteistä tekijää luvun n kanssa kuin 1. Siis esimerkiksi $\phi(3) = 2$ ja $\phi(8) = 4$. Luvulla $\phi(n)$ on seuraava merkillinen ominaisuus: jos a:lla ja n:llä ei ole yhteisiä tekijöitä, niin luku $a^{\phi(n)} - 1$ on jaollinen n:llä. – Tämän asian sinänsä melko yksinkertaiseen todistukseen palataan Solmussa myöhemmin.

Mutta nyt 2009-tehtävien ratkaisut.

1. Olkoon $D = \underbrace{111\ldots1}_{2009\text{ kpl}}$. Koska $A = 10^{2009} - 1 = 9D$ ja $B = \frac{4}{9}(10^{2009} - 1)$, niin $AB = \frac{4}{9}\left(10^{2009} - 1\right)^2 = \frac{4}{9}\left(10^{4018} - 2 \cdot 10^{2009} + 1\right) = 4D \cdot 10^{2009} - 4D$. Siis

$$C = \underbrace{444\ldots4}_{2009\text{ kpl}}\underbrace{000\ldots0}_{2009\text{ kpl}} - \underbrace{444\ldots4}_{2009\text{ kpl}} = \underbrace{444\ldots4}_{2008\text{ kpl}}3\underbrace{555\ldots5}_{2008\text{ kpl}}6.$$

Viimeinen luku saadaan normaalilla ”vähennyslaskulla allekkain”. C:n numeroiden summa on siis $2008 \cdot (4 + 5) + 3 + 6 = 2009 \cdot 9 = 18081$.

2. Koska luvuilla n ja $n+1$ ei ole yhteisiä tekijöitä, yhtälö voi toteutua vain, jos $2009 = 7^2 \cdot 41$ on jaollinen luvulla n^2. Tämä on mahdollista, jos $n = 1$ tai $n = 7$. Jos $n = 1$, niin $m = 4018$. Jos $n = 7$, $m = 8 \cdot 41 = 328$.

3. a) Koska $10^k \equiv 1 \mod 9$ kaikilla k, tehtävän luku on modulo 9 sama kuin $1^2 + 2^2 + \cdots + 2009^2$. Nyt $(9k+1)^2 + (9k+2)^2 + \cdots + (9(k+1))^2 \equiv 1 + 4 + 0 + 7 + 7 + 0 + 4 + 1 + 0 = 24 \equiv 6 \mod 9$ ja koska $2009 = 223 \cdot 9 + 2$ ja $223 \equiv 7 \mod 9$, $1^2 + 2^2 + \cdots + 2009^2 \equiv 223 \cdot 6 + 2008^2 + 2009^2 \equiv 7 \cdot 6 + 1 + 4 \equiv 2$ mod 9. Mikään neliöluku ei ole 2 modulo 9, joten väite on tosi.

b) Samasta syystä kuin edellisessä kohdassa tutkittava luku on modulo 9 sama kuin $1 + 2 + \cdots + 2009 = 1005 \cdot 2009 \equiv 6 \cdot 2 \equiv 3$. Mikään neliöluku ei ole 3 modulo 9.

4. Pelin voittaa aina jompikumpi pelaajista. Pelaajalla B on seuraavanlainen voittostrategia: 1) Jos jossain neliössä on kolme keltaista sivua ennen B:n vuoroa, hän värittää tämän neliön neljännen sivun ja voittaa. 2) Jos tätä mahdollisuutta ei ole, B värittää sivun, joka on symmetrinen ruudukon keskipisteen suhteen sen sivun kanssa, jonka A viimeksi väritti. Osoitetaan, että ellei B voi tehdä askelta 1), hän voi aina tehdä askeleen 2). Ellei näin olisi, A olisi edellisellä siirrollaan voittanut eli värittänyt neljännen sivun eräästä neliöstä; olkoon tämä neliö $CDEG$ ja olkoon A:n viimeksi värittämä sivu CD. Tällöin B on värittänyt sivuista DE, EF ja FC viimeksiväritetyn, esimerkiksi DE:n, sillä jos tämä olisi ollut A:n värittämiä, olisi B:n ollut mahdollista käyttää askelta 1) sen vuoron jälkeen, jona A väritti kolmannen sivun. Tarkastellaan nelikulmion $CDEF$ symmetrianelikulmiota $C'E'D'F'$ (ruudukon keskipisteen suhteen). Koska B on aina värittänyt symmetrisen sivun, A oli viimeistä edellisellä vuorollaan värittänyt $D'E'$:n. Mutta koska CF ja FE jo olivat väritetyt, niin olivat myös $C'F'$ ja $F'E'$. A:n viimeistä edellisen siirron jälkeen B olisikin voittanut värittämällä $C'D'$:n! Oletus, että A voittaa, johtaa siis ristiriitaan. – Sama päättely voidaan soveltaa myös tilanteeseen, jossa $ABCD$ on ruudukon keskimmäinen ruutu.

5. Oppilas ottaa ensin a_1 palaa ja pilkkoo ne. Nyt hänellä on $7 - a_1 + 7a_1 = 7 + 6a_1$ palaa. Kun hän valitsee niistä a_2 ja pilkkoo ne seitsemään osaan, hänellä on $7 + 6a_1 - a_2 + 7a_2 = 7 + 6(a_1 + a_2)$. Induktiolla nähdään, että palojen määrä on aina $7 + 6k$. Jos olisi $7 + 6k = 2009$, olisi $2002 = 6k$. Koska 2002 ei ole jaollinen kolmella, tämä tilanne ei voi toteutua.

6. Jos (x, y, z) on yhtälön ratkaisu, niin $99(x+y+z) \le 2009 \le 101(x+y+x)$. Koska $\dfrac{2009}{99} < 21$ ja $\dfrac{2009}{101} > 19$, on oltava $x + y + z = 20$. Kun tehtävän yhtälö kirjoitetaan muotoon $100(x+y+z)+z-x = 2009$, nähdään, että $z = x + 9$. Yhtälöstä $x + y + z = 20$ saadaan nyt $2x+y = 11$. Koska $y \ge 1$, on oltava $1 \le x \le 5$. Kun annetaan x:lle arvot 1, 2, 3, 4, 5 saadaan yhtälön ratkaisut (1, 9, 10), (2, 7, 11), (3, 5, 12), (4, 3, 13) ja (5, 1, 14).

7. Laskemista helpottaa havainto $\sqrt{2010 \pm 2\sqrt{2009}} = \sqrt{2009 \pm 2\sqrt{2009} + 1} = \sqrt{\left(1 \pm \sqrt{2009}\right)^2} = \sqrt{2009} \pm 1$. Koska $1 + \sqrt{2009}$ on yhtälön $x^2 + ax + b = 0$ ratkaisu, on $2010 + 2\sqrt{2009} + a\left(1 + \sqrt{2009}\right) + b = 0$. Koska a ja b ovat kokonaislukuja ja $\sqrt{2009}$ on irrationaaliluku, on oltava $(a + 2)\sqrt{2009} = 0$ eli $a = -2$. Tästä seuraa $b = -2008$. Yhtälön $x^2 - 2x - 2008 = 0$ juurien summa on 2; kun toinen juuri on $1 + \sqrt{2009}$, toisen juuren on oltava $1-\sqrt{2009}$. $\sqrt{2009}-1$ ei voi olla yhtälön ratkaisu.

8. Oletetaan ensin, että $0 < n < 53$. Vasemmanpuolinen epäyhtälö on triviaalisti tosi ja oikeanpuolinen on yhtäpitävä epäyhtälön $2009 \le (53 - n)^2$ eli epäyhtälön $\sqrt{2009} < 53 - n$ kanssa. Nyt $44^2 = 1936 < 2009 < 2025 = 45^2$. Epäyhtälö ei toteudu, kun $53 - n \le 44$ eli $n \ge 9$, mutta toteutuu, kun $53 - n \ge 45$ eli $n \le 8$. Olkoon sitten $53 < n$. Epäyhtälö on nyt yhtäpitävä epäyhtälön $(n - 53)^2 < 2009 < 53(n - 53)$ kanssa. Oikeanpuolisen epäyhtälön nojalla $n > \dfrac{2009 + 53^2}{53} = 90\,\dfrac{48}{53}$, joten $n \ge 91$. Vasemmanpuolisen epäyhtälön nojalla $n < 53 + \sqrt{2009} = 97 + (\sqrt{2009} - 44)$. Koska viimeinen suluissa oleva erotus on positiivinen, mutta < 1, $n \le 97$. Epäyhtälön toteuttavat siis luvut 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 91, 92, 93, 94, 95, 96 ja 97.

9. Koska $2009 = 223 \cdot 9 + 2$, tehtävässä tarkastelluissa luvuissa on ainakin 224 numeroa. Etsitään pienintä ehdot täyttävää lukua 224-numeroisten lukujen joukosta, ts. tarkastellaan lukuja $x = \overline{c_{223}c_{222}\dots c_1c_0}$, missä $0 \le c_k \le 9$. Jotta numerosumma 2009 saavutettaisiin, on oltava $c_{223} \ge 2$. Jos olisi $c_{223} = 2$, kaikki muut numerot olisivat yhdeksikköjä. Silloin $x = 3\cdot 10^{223} - 1$. Koska Fermat'n pienen lauseen nojalla $10^6 \equiv 1 \pmod 7$ ja 222 on jaollinen kuudella, niin $10^{223} = 10 \cdot 10^{222} \equiv 10 \equiv 3 \pmod 7$. Siten $3 \cdot 10^{223} - 1 \equiv 9 - 1 \equiv 1 \pmod 7$, joten x ei ole jaollinen 7:llä eikä siis varmasti myöskään luvulla $2009 = 7^2 \cdot 41$. Oletetaan sitten, että olisi $c_{223} = 3$. Tällöin luvun muut numerot ovat yhdeksikköjä, paitsi että joukossa on yksi kahdeksikko. Siis

$$x = 3\underbrace{999\dots9}_{222-i\text{ kpl}}8\underbrace{99\cdots9}_{i\text{ kpl}} = 4 \cdot 10^{223} - 1 - 10^i.$$

Helppo lasku osoittaa, että luvut 10, 10^2, 10^3, 10^4 ja 10^5 ovat modulo 41 kongruentteja lukujen 10, 18, 16, 37 ja 1 kanssa. Näin ollen $10^{5k+l} \equiv 10^l \pmod{41}$, joten $4\cdot 10^{223} \equiv 4\cdot 16 \equiv 23 \pmod{41}$ ja $x \equiv 22 - 10^i \pmod{41}$. Edellisen perusteella x ei ole jaollinen 41:llä eikä siis myöskään 2009:llä.

Jatketaan yritystä. Oletetaan, että $c_{223} = 4$. Muut numerot ovat yhdeksikköjä, paitsi että mukana on joko kaksi kahdeksikkoa tai yksi seitsemän. Joka tapauksessa $x = 5 \cdot 10^{223} - 1 - 10^i - 10^j$, missä voi olla $i = j$. Nyt saadaan $x \equiv 38 - (10^i + 10^j) \pmod{41}$. x on jaollinen 41:llä, jos $\{i, j\} = \{0, 4\} \pmod 5$. Tästä nähdään, että $i \ne j$ ja $i, j \le 220$. Mahdollisimman pienen luvun löytämiseksi tutkitaan tapausta $j = 220$. Silloin on oltava $i \equiv 4 \pmod 5$. Pyritään löytämään sellainen i, että x on jaollinen 49:llä. Alussa mainitun Eulerin lauseen perusteella tiedetään, että $10^{\phi(49)} = 10^{42} \equiv 1 \pmod{49}$. Jos d on pienin positiivinen kokonaisluku, jolle $10^d \equiv 1 \pmod{49}$, niin d on luvun $\phi(49) = 42$ tekijä. Lasketaan modulo 49: $10^1 \equiv 10$, $10^2 \equiv 2$, $10^3 \equiv 20$, $10^6 \equiv 400 \equiv 8$, $10^7 \equiv 80 \equiv 31$, $10^{14} \equiv 31^2 = 961 \equiv 30$ ja $10^{21} \equiv 31 \cdot 30 = 930 \equiv 48$. Pienin k, jolla $10^k \equiv 1 \pmod{49}$ on siis 42. Nyt $x \equiv 5 \cdot 10^{13} - 10^{10} - 1 - 10^i \equiv 31 - 10^i \pmod{49}$. x on jaollinen 49:llä, jos $10^i \equiv 31 \equiv 10^7 \pmod{49}$. Tämä on mahdollista, jos $i \equiv 7 \pmod{42}$. Mutta on myös oltava $i \equiv 4 \pmod 5$. Molemmat ehdot täyttää vain luku $i = 49$. Kysytty luku on siis

$$x = 4998\underbrace{999\dots9}_{170\text{ kpl}}8\underbrace{999\dots9}_{49\text{ kpl}}.$$

10. Tehtävä oli epätarkasti muotoiltu. Kun se luetaan, niin kuin se oli Solmussa 3/2009 kirjoitettu, ratkaisu on tietysti 2007. Ei ole ongelma konstruoida 2007 eri yksikkösäteistä ympyrää, jotka kaikki sisältävät samat kaksi pistettä. Tehtävän laatijan tarkoitus oli ilmeisesti kuitenkin, että punaiset pisteet olisivat niiden sinipistekeskisten yksikköympyröiden *kehällä*. Ratkaistaan tehtävä tässä versiossa. Olkoon pisteistä punaisia p kappaletta ja sinisiä $s = 2009 - p$ kappaletta. Jokainen punainen pistepari voi olla enintään kahdella yksikkösäteisellä ympyrällä. Pistepareja on $\binom{p}{2}$, joten sinisiä pisteitä voi olla enintään $2 \cdot \binom{p}{2} = p(p-1)$ kappaletta. Siis $p + p(p-1) = p^2 \geq 2009$, joten $s \leq 2009 - \sqrt{2009} < 2009 - 44 = 1965$. Siis $s \leq 1964$. Tämä s:n arvo saavutetaan esimerkiksi niin, että valitaan janalta, jonka pituus on alle 2, 45 eri pistettä. Pisteparit määrittävät $44 \cdot 45 = 1980$ eri yksikkösäteistä ympyrää, joista jokaisella on tasan yksi pistepari. Valitaan näistä jotkin 1964 ympyrää. Niiden keskipisteet kelpaavat tehtävän sinisiksi pisteiksi.

11. Tässä tehtävässä vuosiluvut ovat vain silmänlumeena. Olkoot a ja b mitä hyvänsä positiivisia lukuja ja olkoon $A = \sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{b+\sqrt{a}}$ ja $B = \sqrt{a+\sqrt{a}} + \sqrt{b+\sqrt{b}}$. Silloin

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 = 2\sqrt{ab + a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + \sqrt{ab}} \\ -2\sqrt{ab + a\sqrt{b} + b\sqrt{a} + \sqrt{ab}}. \end{aligned}$$

Koska $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} - a\sqrt{b} - b\sqrt{a} = (a-b)(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0$ ja neliöjuurifunktio on kasvava, on $A^2 \geq B^2$. Jos $a \neq b$, erisuuruus on aito. Tehtävän kahdesta luvusta edellinen on suurempi. (Ero ei ole suuri: alle 3 sadasmiljoonasosaa.)

12. Koska $f(0) = 0$, välttämätön ehto sille, että funktion f jakso olisi 3π on $\cos(3\pi n) \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot 2009\pi}{n^2}\right) = 0$. Tämä toteutuu vain, jos $\sin\left(\frac{3 \cdot 2009\pi}{n^2}\right) = 0$ eli jos $\frac{3 \cdot 2009\pi}{n^2} = k\pi$ jollain kokonaisluvulla k. Luvun $3 \cdot 2009 = 3 \cdot 7^2 \cdot 41$ on oltava jaollinen luvulla n^2. Tämä on mahdollista vain, jos $n = 1$ tai $n = 7$. On helppo nähdä, että 3π todella on funktioiden $\cos(x)\sin(2009x)$ ja $\cos(7x)\sin(41x)$ jakso.

13. Asetetaan ruudukko niin, että kunkin ruudun keskipiste on kokonaislukukoordinaattinen piste, ruudukon keskipiste on $(0, 0)$ ja oikea yläkulma on $(1004, 1004)$; nimetään ruutu sen keskipisteen mukaan. Eräs tapa täyttää ruudukko tehtävän ehtojen mukaisesti on asettaa ykköset ruutuihin, joiden keskipisteet ovat suorilla $y = x + 1004$ ja $y = x - 1005$, ja täyttää kukin vaakarivi ykkösestä oikealle peräkkäisin luvuin. Ruudukon oikean laidan tultua vastaan jatketaan täyttöä samalta riviltä vasemmasta laidasta. Ruudussa $(-502, 502)$ on ykkönen. Ruudun etäisyys keskeltä on 502 (siihen pääsee 502:lla kuninkaan siirrolla, joista jokainen tapahtuu vinottain). Voidaan helposti laskea, että etäisyys jokaiseen muuhun ykkösruutuun on suurempi kuin 502. Osoitetaan sitten, että jokaisessa numeroiden sijoittelussa on ainakin yksi ykkösruutu, jonka etäisyys keskeltä on enintään 502. Ruudukon ylimmillä 502 rivillä ja alimmilla 502 rivillä on yhteensä 1004 ykköstä, samoin ruudukon 502 vasemmanpuolisimmassa sarakkeessa ja 502 oikeanpuolisimmassa sarakkeessa on yhteensä enintään 1004 ykköstä. Ainakin yksi ykkönen on silloin alueella, joka ei sisälly kumpaankaan edellä kuvattuun, eli siinä 1005×1005-neliössä, jonka keskipiste on keskimmäinen ruutu. Tämän neliön jokaisen ruudun etäisyys keskeltä on enintään 502.

14. Olkoon $f(x) = (x-A)(x-B)(x-C)$, missä A, B ja C ovat kokonaislukuja. Jos $|f(34)| = |34-A||34-B||34-C|$ on alkuluku, niin tulon kolmesta tekijästä kaksi on ykkösiä ja kolmas on alkuluku. Voidaan olettaa, että $|34-A| = |34-B| = 1$ ja $|34-C|$ on alkuluku. Luvut 32, 33, 35 ja 36 ovat yhdistettyjä. Siis $C \geq 3$. Nyt $|ABC| \geq 33^2 \cdot 3 = 3267 > 2009$. Tehtävän muut ehdot täyttävä polynomi ei siis täytä ehtoa $|c| \leq 2009$. Tehtävässä vaadittua polynomia ei ole olemassa.

15. Oletetaan, että $F_{20} + 2009 = x^2$ jollain $n \geq 0$ ja kokonaisluvulla $x \geq 0$. Jos $n \geq 41$, niin $F_{20}(n)$ on jaollinen luvulla $n(n-20)(n-40)$. Koska $-20 \equiv 1 \mod 3$ ja $-40 \equiv 2 \mod 3$, $n(n-20)(n-40) \equiv n(n+1)(n+2) \equiv 0 \mod 3$. Koska $2009 \equiv 2 \mod 3$, $x^2 = F_{20}(n) + 2009 \equiv 2 \mod 3$. Tämä on mahdotonta, koska neliöluku on aina $\equiv 0$ tai $\equiv 1 \mod 3$. Tarkastellaan sitten tapauksia $21 \leq n \leq 40$. Nyt $F_{20} = n(n-20)$. Saadaan $2009 = x^2 - n^2 + 20n = x^2 - (n-10)^2 + 100$ eli $23 \cdot 83 = 1909 = x^2 - (n-10)^2 = (x-n+10)(x+n-10)$. Koska $x^2 \geq 2009$, $x \geq 44$, ja $x + n - 10 > x - n + 10 > 44 - 40 + 10 > 1$, ainoa mahdollisuus on

$$\begin{cases} x + n - 10 &= 83, \\ x - n + 10 &= 23. \end{cases}$$

Tästä ratkaistaan $n = 40$, $x = 53$. Jos sitten $n \leq 20$, niin $F_{20}(n) = n$. Yhtälön $n + 2009 = x^2$ ainoa ratkaisu on nyt $n = 16$, $x = 45$. Tehtävällä on siis kaksi ratkaisua $n = 40$ ja $n = 16$.

16. Luvuilla 40 ja 2009 ei ole yhteisiä tekijöitä. Voidaan käyttää hyväksi alussa mainittua Eulerin funktiota ϕ. Pätee $40^{\phi(2009)} \equiv 1 \mod 2009$, ($\phi(2009)$:n arvolla ei ole ratkaisun kannalta merkitystä; se sattuu olemaan 1680.) Ainakin, kun $n > \phi(2009)$, $a_n \equiv a_{n-1} + 1 \mod 2009$. Tämä merkitsee, että jonon a_n lukujen jakojäännökset käyvät läpi järjestyksessä kaikki eri mahdolliset arvot jaksollisesti ja äärettömän monta kertaa. Erityisesti jakojäännös 0 tulee jonossa vastaan äärettömän monta kertaa.

17. Jos kahdella aritmeettisella jonolla on sama erotus ja jos niillä on yksikin sama termi, niin jonot jatkuvat tästä termistä alkaen samoina. Ne eivät siis voi olla olennaisesti eri jonoja. Tehtävässä kysytään siis aritmeettisia jonoja, joilla on eri erotus. Jos tehtävän geometrinen jono on b, bq, bq^2, bq^3, $\ldots$, niin $bq^2 = 40 \cdot 2009 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 41$. On kolme mahdollisuutta: $q = 2$, $q = 7$ tai $q = 2 \cdot 7 = 14$. Vastaavasti $b = 2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 41$, $b = 2^3 \cdot 5 \cdot 41$ tai $b = 2 \cdot 5 \cdot 41$. Koska myös b ja bq ovat aritmeettisen jonon jäseniä, $bq - b = b(q-1)$ on jonon erotuksen monikerta. Jos $b(q-1)$ on aritmeettisen jonon erotuksen monikerta, niin $bq^n - b$ on myös erotuksen monikerta (koska $q^n - 1$ on jaollinen $q-1$:llä). Näin ollen olennaisesti erilaisten, tehtävän ehdon täyttävien aritmeettisten jonojen lukumäärä saadaan laskemalla lukujen $b(q-1)$ eri tekijöiden lukumäärä edellä mainituissa kolmessa tapauksessa. Ensimmäisessä tapauksessa $b(q-1) = 2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 41$, toisessa $b(q-1) = 6 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 41 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 41$ ja kolmannessa $b(q-1) = 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 41$. Luvulla $2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 41$ on 24 tekijää, luvulla $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 41$ 40 tekijää ja luvulla $2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 41$ on 16 tekijää. Lukujen suurin yhteinen tekijä on $2 \cdot 5 \cdot 41$; sen 8 tekijää ovat tekijöinä jokaisessa luvussa ja ainoat tekijät, jotka ovat yhteisiä missään kahdessa luvuista. Kolmella luvulla on siis eri tekijöitä kaikkiaan $8 + (24-8) + (40-8) + (16-8) = 64$ kappaletta. Tämä on myös kysytty olennaisesti erilaisten tehtävän ehdon täyttävien aritmeettisten jonojen lukumäärä.

18. Jos käytetään enintään 14:ää postimerkkiä, niin voidaan maksaa enintään $14 \cdot 143 = 2002$ sentin maksuja. Jos käytetään 15:ttä merkkiä, niin maksettavien arvojen on oltava ainakin $15 \cdot 134 = 2010$ senttiä. Kaikki arvot x, $2010 \leq x \leq 2145 = 15 \cdot 143$ voidaan muodostaa 15:stä merkistä. Kaikki arvot, jotka ovat suurempia kuin 2145 senttiä ovat (esimerkiksi) muotoa $x + n \cdot 134$, missä $2010 \leq x \leq 2145$ ja n positiivinen kokonaisluku. Näin ollen suurin arvo, jota merkeistä ei voi muodostaa, on 2009.

19. Olkoon $d \neq 0$ aritmeettisen jonon peräkkäisten termien erotus. Silloin $a_2 = 1 + d$, $a_5 = 1 + 4d$ ja $a_{11} = 1 + 10d$. Koska a_2, a_5 ja a_{11} muodostavat geometrisen jonon, $a_5^2 = a_2 a_{11}$ eli $(1+4d)^2 = (1+d)(1+10d)$ eli $6d^2 = 3d$ eli $d = \dfrac{1}{2}$. Jonon 2009 ensimmäisen termin summa on $2009 \cdot \dfrac{1 + (1 + 1004)}{2} = 1010527$.

20. Yhtälön oikean puolen eksponentissa olevan aritmeettisen jonon summa on $1005 \cdot \dfrac{1 + 2009}{2} = 1005^2$. Koska $121 = 11^2$, todistettava yhtälö on $1005^{2 \ln 11} = 11^{2 \ln 1005}$ eli $e^{(\ln 1005) \cdot 2 \cdot \ln 11} = e^{(\ln 11) \cdot 2 \cdot \ln 1005}$. Koska eksponentit ovat samat, yhtälö on tosi.

Paperisen Solmun lukijalle: Muistathan, että Solmu on ennen kaikkea verkkolehti, paperikopioina julkaistavat numerot ovat sille eräänlainen käyntikortti. Verkosta löytyy paitsi paperikopioina julkaistut aikaisemmat lehdet, myös erittäin paljon sellaista, mitä ei ole julkaistu paperikopioissa. Siellä on materiaalia kouluille alkaen lastentarhatasolta. Alaluokille on laajat unkarilaisvaikutteista matematiikanopetusta käsittelevät tiedostot. Lisäksi on paljon tehtäviä, muutama peli, runsaasti kirjoituksia matematiikan asemasta, laaja tiedosto matematiikan historiasta, matematiikkaan ja yhteiskuntaan liittyviä kirjoituksia. Solmussa on myös kokonaisia kirjoja, kuten K. Väisälän Algebra. Matematiikkadiplomiosio karttuu, I, II, III, IV tehtävät ovat nyt verkko Solmussa. Tutustu Solmun tarjontaan, jota on kartutettu jo yli 10 vuotta!