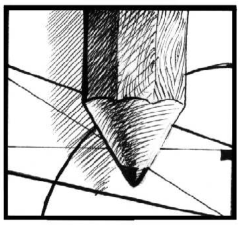
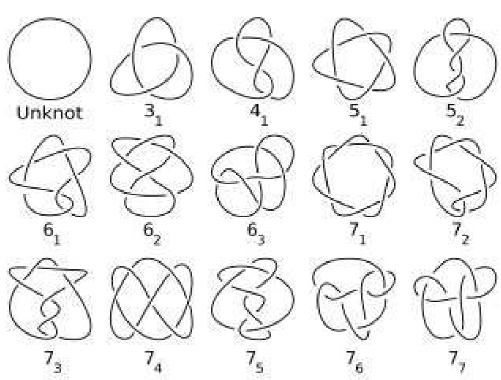


Solmuja taiteessa ja matematiikassa

Vadim Kulikov
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Why knot?

Modernien matemaattisten ongelmien ratkaisut ovat usein saavuttamattomia suurelle yleisölle. Jopa kuuluisa geometrialuonteinen Poincarén hypoteesin ratkaisu on sisällöltään varmaankin pysynyt mysteerinä monelle uutisten seuraajalle. Ratkaisusta puhumattakaan usein jo itse ongelman ymmärtäminen vaatii matemaattista ammattitaitoa. Toisaalta jos ongelma on yksinkertaisesti esitettävissä, sen ratkaisukin on yleensä pinnallinen. Pinnallisella en tarkoita välttämättä helppoa, vaan sellaista, joka ei tuo mukanaan uusia menetelmiä, ideoita tai syvällisempää ymmärrystä.



Kuva 1: Solmuja.

Solmuteoria on mielestäni erilainen. Se on kuin matematiikan poikkileikkaus useassa suunnassa. Solmuteorian ongelmat ovat helposti esitettävissä: alkuvaiheessa ei tarvita juuri minkäänlaisia matemaattisia valmiuksia. Sen sijaan solmuteorian ongelmien ratkaisuja löytyy usein vain syvällisistä matematiikan osa-alueista kuten algebra, topologia, differentiaaligeometria, analyysi, verkkoteoria ja jopa laskettavuuden teoria ja tietojenkäsittelytiede. Niin kuin matematiikalla yleensä, solmuteorialla on sovelluksia; sovellusaloja ovat mm. biologia (DNA- ja proteiinimolekyylien solmuttuminen) ja fysiikka [12, 8].

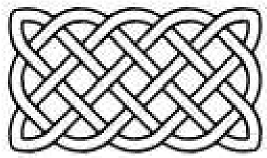
Tässä artikkelissa esitän erään solmuteorian menetelmän, väritysinvariantin. Ennen sitä kuitenkin leikitään vähän solmuilla. Lukija voi hypätä suoraan kappaleeseen *Solmut ja kysymykset*, jos haluaa.

Miten keltit piirsivät solmunsa?

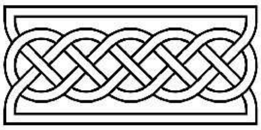
Nykyisessä Isossa-Britanniassa varhaiskeskiajalla eläneet keltit olivat kiinnostuneita solmuista ja käyttivät niitä paljon kirjojensa ja arvoesineittensä koristeluun. Heidän motiivinsa oli ilmeisesti esteettinen.[1] Kuvissa 2–5 on esimerkkejä kelttien piirtämistä solmuista ja niiden jäljennöksistä.

[1] Kelttien kulttuuri juontaa juurensa jo pronssikauteen. Lisää kelteistä ja heidän taiteestaan löydät viitteistä [2, 5, 6] ja tietenkin Wikipediasta.

Kuva 2: Kelttisolmu.



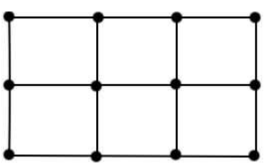
Kuva 3: Kelttien solmuja (a).



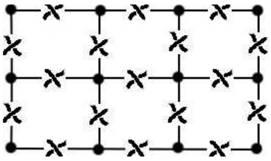
Kuva 4: Kelttien solmuja (b).

Kuva 5: Kelttien solmuja (c).

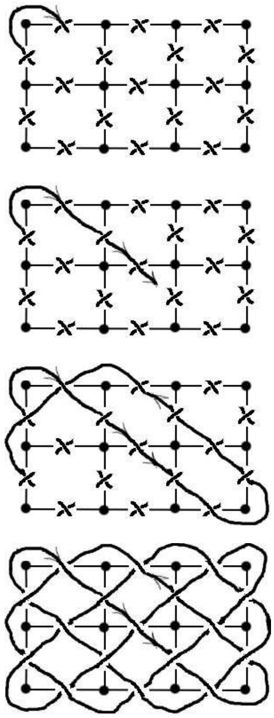
Esitän seuraavaksi algoritmin, jonka avulla voi piirtää kelteille tyypillisiä solmuja. Todennäköisesti keltit itse käyttivät muiden muassa tällaistakin algoritmia. Etenen esimerkin kautta. Tätä varten otetaan mikä tahansa tasoverkko:



Piirretään tasoverkon jokaiseen särmään pieni risteys kuvan  osoittamalla tavalla. Saadaan tämän näköinen kuvio:

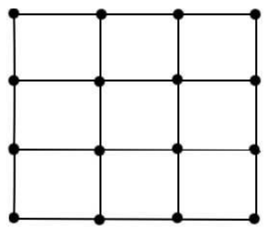


Sen jälkeen lähdetään kynällä yhdistämään näitä risteyksiä vuoron perään. Aina kun lähdetään risteyksestä, etsitään lähin seuraava risteys ja mennään sen läpi:



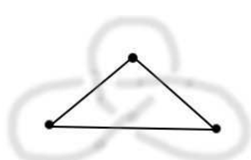
Huomaa tämän ja kuvan 3 solmun yhdenkasvoisuus.

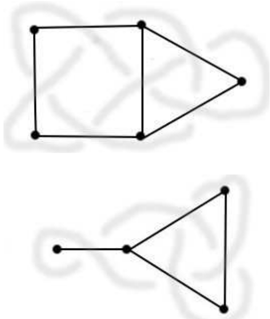
Tällä menetelmällä saadaan lopulta solmu. Voi kuitenkin käydä niin, että kaikki risteykset eivät tule ensimmäisellä kiertokerralla käytyä läpi. Silloin täytyy vain nostaa kynää ja jatkaa jostakin toisesta kohdasta. Näin tulee useampikomponenttinen punos. Jos kynää joutuu nostamaan kerran, kyseessä on *kahden komponentin punos*, jos joutuu nostamaan kaksi kertaa, niin kolmen jne. Tietysti kynää pitää myös nostaa aina, kun menee risteyksen läpi, jottei sotkisi sitä, mutta näitä kynännostoja ei tässä lasketa. Esimerkiksi kuvan 4 solmussa on kaksi komponenttia.



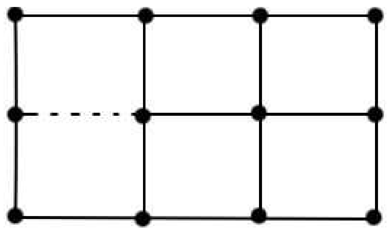
Kuva 6: Monenko komponentin punos tulee tästä verkosta?

Kun on oppinut piirtämään solmuja yksinkertaisista verkoista, voi kokeilla mutkikkaampia verkkoja:

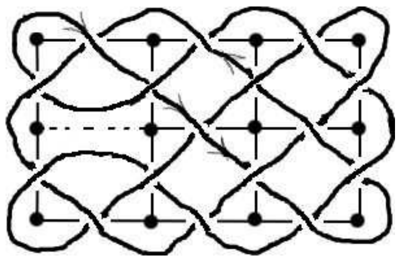




Ja toisaalta verkkoihin voi asettaa ”peilejä”. Tämä tarkoittaa, että solmun viiva ei saa koskaan ylittää peiliä. Seuraavassa on peili merkitty katkoviivalla:



$\Downarrow$



Tehtäviä:

- Monenko komponentin punos tulee 3×3-kokoisesta ruudukkoverkosta kuvassa 6? Yllä nähtiin, että 3×2-kokoisesta tulee 1-komponenttinen.
- Kuinka monen komponentin solmu tulee $m \times n$-kokoisesta ruudukkoverkosta?
- Anna vinkkejä kuvataiteen opettajalle.

Solmut ja kysymykset

Matemaattinen teoria solmuista keskittyy seuraavanlaiseen kysymykseen: mistä voimme päätellä, ovatko kaksi annettua solmua sama solmu vai eri solmuja? Esimerkiksi jos vedän narun päistä eri suuntiin, niin jääkö se solmuun vai avautuuko se? (Narun kitka oletetaan olemattomaksi.) Jos vedetään narua

molemmista päistä, niin se suoristuu. Tämä ei ole yhtä selvää tilanteissa

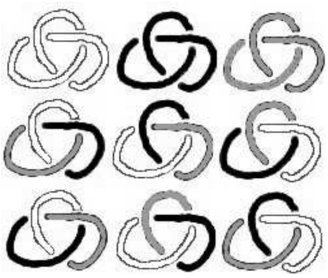
joskin lukija pienen miettimisen jälkeen näkee, miten nämäkin solmut aukeavat. Nämä solmut ovat *ekvivalentteja* triviaalin solmun kanssa (artikkelin alussa olevassa kuvan 1 taulukossa *Unknot* $= 0_1$). Sen sijaan solmu 4_1 ei aukea:

Solmuteoriassa yleensä ajatellaan, että narun päät ovat kiinni toisissaan sen sijaan, että ne sorottaisivat eri suuntiin niin kuin äskeisissä kuvissa. Se ei oleellisesti muuta tarkastelua.

Kun halutaan todistaa, että kaksi solmua ovat eri, mukaan tulee matemaattinen päättely. Kaikki edellisessä kappaleessa esiintyneet solmut ovat keskenään eiekvivalentteja (lukuun ottamatta taulukon solmua 3_1): tämä voidaan todistaa erilaisilla solmuteorian menetelmillä. Esitän yhden.

Solmujen värittäminen

Otetaan solmu ja kolme väriä: m=musta, h=harmaa ja v=valkoinen. Kun solmu on piirretty paperille risteyksineen, koostuu kuva (kaavio) yhtenäisistä paloista, kaarista, jotka menevät alituksesta alitukseen. Väritetään solmun kaavion kaaret väreillä m, h ja v. Sanotaan, että väritys on *hyvä*, jos jokaisessa risteyksessä törmää joko kolme eri väriä tai vain yksi väri. Annettuun solmukaavioon k liitetään luku $v(k)$, joka kertoo, kuinka monta hyvää väritystä solmulla on. Esimerkiksi kolmiapilasolmulla niitä on yhdeksän:



Luku $v(k)$ siis lasketaan kaaviosta k, joka esittää jotakin solmua s. Entä jos otetaan saman solmun toinen kaavio k_0 ja lasketaan $v(k_0)$? Matemaatikko Ralph Hartzler Fox, joka ensimmäisenä määritteli solmujen värityksen, todisti, että silloin saadaan aina sama luku kunhan kaaviot esittävät samaa solmua[2], eli $v(k) = v(k_0)$. Siis kaaviolla  on myös yhdeksän hyvää väritystä. Tämä antaa tavan todistaa, milloin kaksi solmua ovat eri: jos kahdesta kaaviosta k_1 ja k_2 saadaan eri väritysluvut, $v(k_1) \neq v(k_2)$, niin tiedetään, että kaaviot k_1 ja k_2 esittävät eri solmuja. Triviaalilla solmulla on vain kolme hyvää väritystä: se voidaan värittää vain yhdellä värillä kerrallaan. Koska $3 \neq 9$, seuraa tästä, että kolmiapilasolmu on epätriviaali.

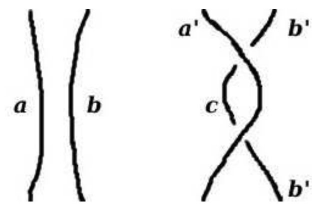
Nyt jää todistettavaksi, että väritysluku tosiaan pysyy samana saman solmun eri kaavioissa. Tutkitaan aluksi kolmea tapaa muuttaa solmun kaaviota muuttamatta itse solmua:

Kuvissa on esitetty solmukaavion jokin pieni osa-alue, ja ajatuksena on, että koko muu kaavio pysyy siirrossa muuttumattomana ja alueen sisällä oleva osa muuttuu siirron osoittamalla tavalla. Näitä siirtoja kutsutaan Reidemeisterin siirroiksi keinon 1920-luvulla esittäneen saksalaisen topologin Kurt Reidemeisterin mukaan. Viittaamme niihin siirtoina Ω_1, Ω_2 ja Ω_3 samassa järjestyksessä kuin kuvassa. Nämä vaikuttavat ehkä satunnaisesti valituilta siirroilta, jotka solmulle voi tehdä ("ilman saksia ja liimaa"), mutta todellisuudessa ne ovat vähän enemmän: saman solmun *mitkä tahansa* kaksi kaaviota voidaan muuttaa toisikseen käyttämällä pelkästään näitä kolmea siirtoa. Lukija voi vakuuttua tästä intuitiivisesti katsomalla sähköjohdon varjoa. Alkuperäinen saksankielinen todistus tälle löytyy artikkelista [9], ja vähän selkeämpi, modernimpi ja englanninkielinen esitys kirjasta [3].

Näytetään, että kaavioilla, jotka eroavat toisistaan yhdellä tällaisella siirrolla, on aina sama määrä hyviä värityksiä.

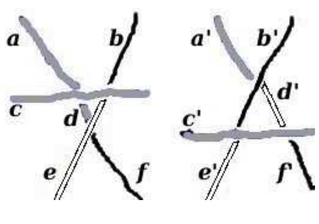
Jos kaaviossa esiintyy lenkki, joka on Reidemeisterin siirron Ω_1 mukainen, niin siinä esiintyvät kaaret (kaksi kappaletta) ovat saman väriset, koska risteyksessä kohtaa vain kaksi eri kaarta. Siis jos kaavio D on saatu kaaviosta D' tällä siirrolla, niin jokainen D:n väritys vastaa yksikäsitteisesti sitä D':n väritystä, jossa lenkki on väritetty sillä värillä, jolla vastaava kaari on väritetty D:ssä, ja toisin päin.

Oletetaan, että D on saatu kaaviosta D' siirrolla Ω_2 siten, että D':n risteyksiä on enemmän kuin D:n. Kaaviossa D' on myös enemmän kaaria kuin kaaviossa D. Kuvassa 7 on esitetty tämä tilanne. Kaari c on uusi. Oletetaan, että D:n väritys on annettu ja yritetään määrätä D':n väritys. Väritetään ne solmun kaaret, jotka eivät osallistu siirtoon, samalla tavalla molemmissa kaavioissa, kaari a' väritetään samalla värillä kuin a, ja b' sekä b'' väritetään molemmat samalla värillä kuin b. Tällöin myös c:n väri määräytyy yksikäsitteisesti. Toisaalta jos on annettu D':n väritys, huomataan, että väistämättä b' ja b'' ovat saman värisiä (seuraa hyvän värityksen määritelmästä). Tällä värillä voidaan värittää b ja a':n värillä a. Näin saadaan molemminsuuntainen yksi yhteen -vastaavuus (bijektio) D:n värityksien ja D':n värityksien välille, mistä seuraa, että niitä on yhtä monta.



Kuva 7: Reidemeisterin siirto Ω_2 säilyttää värityksien lukumäärän.

Kuvassa 8 on esitetty kolmannen siirron tapaus. En selitä sitä tässä sen enempää, vaan haastan lukijan todistamaan itse, että tällainen muutos kaaviossa ei muuta hyvien värityksien lukumäärää.



Kuva 8: Reidemeisterin siirto Ω_3 säilyttää värityksien lukumäärän.

Osoitimme, että hyvien värityksien määrä ei muutu Reidemeisterin siirroissa, mistä seuraa, että väritysten määrä ei muutu, vaikka kaavioon sovellettaisiin mikä tahansa äärellinen määrä Reidemeisterin siirtoja, mikä

[2]Tällaisia funktioita niin kuin v kutsutaan *solmuinvarianteiksi*, eng. invariant tarkoittaa muuttumatonta.

tarkoittaa ylempänä mainitun tuloksen valossa, että saman solmun millä tahansa kahdella kaaviolla on sama määrä hyviä värityksiä.

Tehtäviä:

- Täydennä yllä oleva todistus.
- Laske $v(3_1)$ ja $v(4_1)$ (katso kuva 1) osoittaaksesi, että solmut 3_1 ja 4_1 ovat eri solmuja. Tee sama solmuille 7_5 ja 7_7.
- Voiko väritysinvariantin avulla todistaa, että 4_1 ja 0_1 ovat eri solmuja? Entä 5_1 ja 5_2?
- Osoita, että aina pätee $v(k) = 3^n$ jollakin $n \in \mathbb{N}$.

Viiteluettelossa on viitattujen kirjojen lisäksi hyviä kirjoja solmuteoriassa alkuun pääsemiseksi ja kiinnostavia popularisoituja artikkeleja.

Viitteet

[1] Colin C. **Adams**: *The Knot Book – An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*, AMS 2004.

[2] George **Bain**: *Celtic Art: The Methods of Construction*, Dover Publishing, New York, 1973, ISBN 0-486-22923-8.

[3] G. **Burde** and H. **Zieschang**: *Knots*, de Gruyter Studies in Mathematics 5, Berlin, New York, 1985.

[4] R. H. **Crowell**, R. H. **Fox**: *Introduction to knot theory*, Springer; 1st edition (October 8, 1984).

[5] Miranda **Green**: *Symbol and Image in Celtic Religious Art*, Published 1989 by Routledge.

[6] Simon **James**: *Keltit. (Exploring the world of the celts, 1993.)* Suomennos: Tarja Kontro. Helsingissä: Otava, 2005, ISBN 951-1-19271-X.

[7] Louis H. **Kauffman**: *On Knots*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1987.

[8] Louis H. **Kauffman**: *Knots and Physics*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1993.

[9] Kurt **Reidemeister**: *Elementare Begründang der Knotentheorie*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 5 (1926), 24–32.

[10] C. **Dietrich-Buchecker** and J.-P. **Sauvage**: *A synthetic molecular trefoil knot*, Angew. Chem. 28(2):189–192.

[11] Alexei **Sossinsky**: *Solmut. Erään matemaattisen teorian synty* (Suom. Osmo Pekonen).

[12] De Witt **Sumners**: *Lifting the Curtain: Using Topology to Probe the Hidden Action of Enzymes* `http://www.ams.org/notices/199505/sumners.pdf`