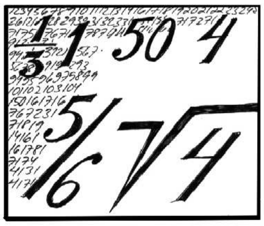

Erehtyikö Douglas Adams?

Markku Halmetoja
Mäntän lukio

Osmo Pekonen luo artikkelissaan [1] mielenkiintoiselta näyttävän yleiskatsauksen uusimman matemaattisen fysiikan erääseen tutkimuskohteeseen ja sen edellyttämään matematiikkaan. Maallikko ei tosin ymmärrä kummastakaan juuri muuta kuin sen, että kokonaisluku 26 näyttää sukeutuvan esiin mitä yllättävimmistä yhteyksistä. Moni asia näyttäisi viittaavan siihen, että maailmankaikkeus on 26–ulotteinen, mutta meille tuntemattomat ulottuvuudet ovat käpertyneet Planckin mittakaavaan pienemmiksi kuin 10^{-35} m. Pekonen lisää loistavalla tyylillään lukua 26 puoltavaan todistetaakkaan myös matemaattisen vitsin, joka on käsillä olevan kirjoituksen varsinainen aihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} = 26.$$

Tällä summalla ei tietenkään ole mitään tunnettua yhteyttä korkeampaan fysiikkaan, mutta se on omana itsenään kiinnostava. Miten se voidaan todistaa? Miksi se ylimalkaan on kokonaisluku? Ovatko mahdollisesti kaikki summat

$$\mathcal{S}_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{2^n}, \quad k \in \mathbb{N},$$

kokonaislukuja? Riittääkö koulumatematiikka näiden asioiden selvittämiseen?

Vastaus löytyy hieman epätodennäköisestä suunnasta, nimittäin todennäköisyyslaskennasta. Olkoon X diskreetti satunnaismuuttuja, jonka todennäköisyysjakauma on

X	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	$x_\imath$	$\ldots$
p	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	$p_\imath$	$\ldots$

Todennäköisyyslaskennan perusteiden mukaan jakauman kaikkien todennäköisyyksien summa on

$$\sum_{\imath} \mathrm{P}\left(X = x_\imath\right) = \sum_{\imath} p_\imath = 1.$$

Sovelletaan tätä eräiden kolikonheittoon liittyvien satunnaisilmiöiden yhteydessä. Heitetään aluksi kolikkoa, kunnes saadaan klaava. Olkoon satunnaismuuttuja X_0 tähän tarvittavien heittojen lukumäärä. Selvästi X_0:n arvojoukko on $\mathbb{Z}_+$, ja koska heitot ovat toisistaan riippumattomia, on

$$\mathrm{P}(X_0 = n) = \underbrace{\left(\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \tfrac{1}{2}\right)}_{(n-1)\ \mathrm{kpl}} \cdot \tfrac{1}{2} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n.$$

Kaikkien todennäköisyyksien summa on

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_0 = n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 1.$$

Siis

$$\mathcal{S}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^0}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 1.$$

Tämä on tietenkin tavallinen geometrinen sarja. (Summia, joissa on ääretön määrä yhteenlaskettavia, kutsutaan sarjoiksi.) Sen suppeneminen ja summa on nyt todistettu todennäköisyyslaskennan kautta. Aktiivinen lukija voi pohtia, voisiko jotakin vinkuraista kolikkoa heittämällä laskea yleisemmän summan

$$\mathcal{S}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in]0,1[.$$

Uusitaan koe heittämällä kolikkoa, kunnes saadaan toinen klaava. Olkoon satunnaismuuttuja X_1 tarvittavien heittojen lukumäärä. Tämä muuttuja saa arvon n, jos $(n-1)$:llä heitolla saadaan tasan yksi klaava ja viimeisellä heitolla toinen klaava. Klaavojen määrä tietyssä heittosarjassa on binomijakautunut, joten

$$\mathrm{P}\left(X_1 = n\right) = \binom{n-1}{1} \tfrac{1}{2} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \tfrac{1}{2} = \binom{n-1}{1} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n.$$

Kahden klaavan saamiseen tarvitaan vähintään kaksi heittoa. Merkitsemällä todennäköisyyksien summa ykköseksi saadaan

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=2}^{\infty} \binom{n-1}{1} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \left(\tfrac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Tästä seuraa (soveltamalla raja-arvon laskusääntöjä äärellisiin osasummiin)

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_0,$$

ja edelleen

$$\mathcal{S}_1 = 1 + \mathcal{S}_0 = 1 + 1 = 2.$$

Jatketaan samalla tavalla. Heitetään kolikkoa, kunnes saadaan kolmas klaava. Satunnaismuuttuja X_2 on tähän tarvittavien heittojen lukumäärä. Vähintään kolme heittoa tarvitaan, ja todennäköisyys, että X_2 saa arvon n, on

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X_2 = n\right) &= \binom{n-1}{2} \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-3} \cdot \tfrac{1}{2} \\ &= \binom{n-1}{2} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Kuten edellisessäkin tapauksessa

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{n=3}^{\infty} \binom{n-1}{1} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-1)(n-2)}{2} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(n-2)}{2} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Tästä seuraa

$$2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 - 3n + 2\right) \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \mathcal{S}_2 - 3\mathcal{S}_1 + 2\mathcal{S}_0,$$

ja edelleen

$$\mathcal{S}_2 = 2 + 3\mathcal{S}_1 - 2\mathcal{S}_0 = 2 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 6.$$

Tämä maistuu varmaan jo puulta, mutta heitetään edelleen kolikkoa, kunnes saadaan neljäs klaava. Satunnaismuuttuja X_3 olkoon tähän tarvittavien heittojen lukumäärä. Vähintään neljä heittoa tarvitaan. Kuten edellä

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X_3 = n\right) &= \binom{n-1}{3} \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-4} \cdot \tfrac{1}{2} \\ &= \binom{n-1}{3} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=4}^{\infty} \binom{n-1}{3} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Summaus voidaan aloittaa arvosta $n = 1$ alkaen, sillä kolme ensimmäistä termiä ovat nollia. Siis

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n, \end{aligned}$$

mistä seuraa

$$\begin{aligned} 6 &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(n-2)(n-3) \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \\ &= \mathcal{S}_3 - 6\mathcal{S}_2 + 11\mathcal{S}_1 - 6\mathcal{S}_0, \end{aligned}$$

ja lopulta

$$\mathcal{S}_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} = 26.$$

Summan $\mathcal{S}_k$ laskemiseksi saadaan samantapainen yhtälö kuin yllä nähdyt. Jos edeltävät summat ovat kokonaislukuja, niin myös $\mathcal{S}_k$ on kokonaisluku. Koska alkupään summat ovat kokonaislukuja, seuraa induktioperiaatteesta, että kaikki nämä summat ovat kokonaislukuja.

Aktiivinen lukija voi siis täydentää taulukkoa

$\mathcal{S}_0$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	...
1	2	6	26	...

kokonaisluvuilla kuinka pitkälle tahansa, tai ainakin vastata Mensa-tyyppiseen kysymykseen: *Mikä on lukujonon 1, 2, 6, 26, ... seuraava termi?*

Miten tämä kaikki liittyy Douglas Adamsiin? Hänen mainio teoksensa [2] huipentuu lukuun 42 tavalla, jota ei tässä ole tarpeen lähemmin selittää, jotta lukukokemus olisi täydellinen niille, jotka eivät vielä ole tätä kirjaa lukeneet. Luku 42 edustaa monille humoristista pakotietä ahdistuksesta, jota kaatuvat tietokoneet ja päättömästi toimivat ohjelmistot aiheuttavat. Jos Adams olisi sattumoisin valinnut maagiseksi luvukseen 26, niin hän olisi saanut satiiriinsa ripauksen maailmankaikkeuden syvimmästä olemuksesta. Mutta onnistuiko hän tässä sittenkin? Jos korostetaan lukujen esittämisen paikkamerkintää hakasuluilla, esimerkiksi $35 = [3][5]$, niin lukujen 26 ja 42 välille löytyy yhteys:

$$26 = [2][6] = [4-2][4+2].$$

Kiitos dosentti Osmo Pekoselle artikkelin [1] erillispainoksesta.

Viitteet

[1] Osmo Pekonen, *Miksi maailmankaikkeutta on väitetty 26–ulotteiseksi?*, Arkhimedes 1, 1992.

[2] Douglas Adams, *Linnunradan käsikirja liftareille*, WSOY 1989.