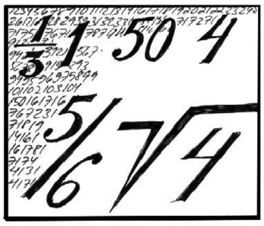

Täydellisyyttä etsimässä

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Kungliga Tekniska Högskolan, Tukholma

Johdanto

Jatketaanpa Solmussa 2/2010 aloitettuja tekijäfunktioon liittyviä harjoituksia. Tällä kertaa keskitytään hieman toisenlaiseen tekijäfunktioon kuin aikaisemmin, nimittäin luvun n kaikkien positiivisten tekijöiden summaan

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Tästä eteenpäin tämän tekstin aikana oletetaan sanan *tekijä* viittaavan vain positiivisiin tekijöihin. Jos luvun n alkutekijähajotelma on $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, niin

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= (1 + p_1 + \cdots + p_1^{\alpha_1}) \cdots (1 + p_k + \cdots + p_k^{\alpha_k})\\ &= \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.\end{aligned}$$

Tämän todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi. Tavallisen tekijäfunktion $d(n) = \sum_{d|n} 1$ yläraja on varsin pieni: $d(n) \ll n^{\varepsilon}$ millä tahansa positiivisella ε, mutta samaa ei funktiosta σ voi sanoa, sillä

$$\sigma(n) = n + \sum_{d|n,\ d<n} d.$$

Voimmekin nyt keskittyä aivan toiseen ongelmaan: Milloin luvun n sitä itseään pienempien positiivisten tekijöiden summa on sama kuin luku itse, eli milloin pätee $\sigma(n) = 2n$? Tällaisia lukuja kutsutaan *täydellisiksi luvuiksi*. Esimerkiksi luku 28 on täydellinen luku: Sen positiiviset tekijät ovat 1, 2, 4, 7, 14 ja 28, ja

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \cdot 28.$$

Selvästi siis täydellisiä lukuja on olemassa (ainakin yksi kappale). Seuraavat kysymykset ovatkin: Onko näitä enemmän? Onko näitä peräti paljon? Pilataan heti jännitys kertomalla loppuratkaisu:

1. Parillisia täydellisiä lukuja on olemassa, ja niiden muoto tunnetaan täysin. Sen sijaan ei tiedetä, onko niitä äärettömän vai äärellisen paljon.

2. Parittomia täydellisiä lukuja ei oleteta olevan olemassa. Valitettavasti tätä ei ole vielä todistettu (useista yrityksistä huolimatta ja vaikka jotkut itse uskovatkin tämän todistaneensa).

Parilliset täydelliset luvut

Kuten edellä todettiin, parillisten täydellisten lukujen tilanne on varsin selkeä. Selvennetään ensin parillisten täydellisten lukujen muoto ja jutustellaan sen jälkeen enemmän niiden etsimisestä.

Lause 1. *Jos $2^p - 1$ on alkuluku, niin $2^{p-1}(2^p - 1)$ on parillinen täydellinen luku.*

Todistus. Tämän väitteen todistus on hyvin helppo lasku. Alkuluvun ainoat tekijät ovat luku 1 ja luku itse. Siispä

$$\sigma\left(2^{p-1}(2^p - 1)\right) = \sigma\left(2^{p-1}\right)\sigma\left(2^p - 1\right) = (2^p - 1) \cdot 2^p,$$

mikä todistaa väitteen. □

Toinen suunta on aavistuksen hankalampi kuin edellinen, mutta kuitenkin vielä varsin helppo:

Lause 2. *Kaikki parilliset täydelliset luvut ovat muotoa $2^{p-1}(2^p-1)$, jossa 2^p-1 on alkuluku.*

Todistus. Olkoon $2^h d$ parillinen täydellinen luku, ja olkoon d pariton. Nyt

$$\sigma(2^h d) = \sigma(2^h)\sigma(d) = (2^{h+1}-1)\sigma(d).$$

Jotta kyseinen luku voi olla täydellinen, on pädettävä

$$2^{h+1}d = (2^{h+1}-1)\sigma(d).$$

Siispä $2^{h+1}-1 \mid d$. Kirjoitetaan $d = \left(2^{h+1}-1\right)k$. Nyt $\sigma(d) \geq 2^{h+1}k$, missä yhtäsuuruus vallitsee, jos ja vain jos $k=1$ ja $2^{h+1}-1$ on alkuluku, eli

$$\begin{aligned} 2^{h+1}\left(2^{h+1}-1\right)k = 2^{h+1}d &= (2^{h+1}-1)\sigma(d) \\ &\geq (2^{h+1}-1)2^{h+1}k, \end{aligned}$$

missä yhtäsuuruus vallitsee vain edellä mainituilla ehdoilla. Koska puolet kuitenkin ovat yhtäsuuret (helppo sievennys), niin yhtäsuuruuden on vallittava. Tämä todistaa väitteen. □

Nyt siis tiedämme millaisia parilliset täydelliset luvut ovat. Esimerkiksi aiemmin esimerkkinä käytetty luku 28 on tätä muotoa:

$$28 = 4 \cdot 7 = 2^{3-1} \cdot (2^3-1).$$

Koska jokainen parillinen täydellinen luku vaatii ihan ikioman alkuluvun muotoa 2^p-1, seuraava luonnollinen kysymys on, miten paljon tällaisia alkulukuja, eli niin kutsuttuja Mersennen alkulukuja, on olemassa. Ensimmäiseksi todettakoon, että jotta tällainen luku voi olla alkuluku, on luvun p oltava alkuluku (helppo harjoitustehtävä). Aikoinaan jopa uskottiin tämän olevan riittävä kriteeri, mutta valitettavasti M_{11}, eli luvun p arvolla 11 saatava Mersennen luku ei ole alkuluku:

$$M_{11} = 2047 = 23 \times 89.$$

Lopulta Mersennen alkuluvut ovat varsin harvassa, eli läheskään kaikilla alkuluvuilla p ei luku M_p ole alkuluku. Toisaalta ei kuitenkaan tiedetä, onko tällaisia alkulukuja äärettömän paljon vai ei. Yleinen otaksuma tuntuu olevan, että niitä on äärettömästi, mutta varsin harvassa.

Parittomat täydelliset luvut

Parittomille täydellisille luvuille voi todistaa kaikenlaisia lystikkäitä ominaisuuksia varsin alkeellisesti. Kyseenalaista tietenkin on, onko näillä ominaisuuksilla mitään todellista merkitystä, mutta kertovat ne ainakin siitä, että jos pariton täydellinen luku on olemassa, niin sen on oltava varsin jännittävän muotoinen. Aloitetaan hyvin yksinkertaisella väitteellä:

Lause 3. *Neliö ei voi olla pariton täydellinen luku.*

Todistus. Todistuskin on hyvin yksinkertainen. Jotta n voisi olla täydellinen luku, olisi kaikkien sen tekijöiden summan oltava parillinen (jotta $\sigma(n)=2n$). Kuitenkin tekijöiden summa voidaan laskea esimerkiksi seuraavasti:

$$\sigma(n) = \sqrt{n} + \sum_{d<\sqrt{n}}\left(d + \frac{n}{d}\right) \equiv \sqrt{n} \equiv 1 \pmod 2.$$

Väite onkin nyt selvä. □

Osoitetaan nyt, että jossain mielessä luku ei kuitenkaan voi kovin paljon poiketa neliöstä:

Lause 4. *Jos pariton täydellinen luku on olemassa, niin se on muotoa qd^2, missä q on alkuluku (joka jakaa tai ei jaa lukua d).*

Todistus. Olkoon luvun n alkutekijähajotelma

$$n = p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}.$$

Nyt

$$\sigma(n) = (1 + p_1 + \cdots + p_1^{\alpha_1})\cdots(1 + p_k + \cdots + p_k^{\alpha_k}).$$

Huomaamme, että jos α_i on pariton, niin $(1 + p_i + \cdots + p_i^{\alpha_i})$ on parillinen. Kuitenkin $2n$ on vain kerran jaollinen luvulla 2 (eli se ei ole millään suuremmalla kakkosen potenssilla jaollinen), jolloin myös $\sigma(n)$ saa olla vain kerran jaollinen luvulla 2. Täten vain yksi tekijöistä $(1 + p_i + \cdots + p_i^{\alpha_i})$ voi olla parillinen. Väite on todistettu. □

Tarkennetaanpa nyt edellistä tulosta:

Lause 5. *Jos $n = qd^2$ on pariton täydellinen luku, niin $q \equiv 1 \pmod 4$.*

Todistus. Olkoon luvun n alkutekijähajotelma

$$q^\beta p_1^{2\alpha_1}\cdots p_k^{2\alpha_k}.$$

Nyt

$$\sigma(n) = \sigma\left(q^\beta\right)\sigma\left(p_1^{2\alpha_1}\cdots p_k^{2\alpha_k}\right).$$

Muistetaan nyt, että $q^2 \equiv 1 \pmod 4$. Jos olisi $q \equiv 3 \pmod 4$, niin olisi $\sigma\left(q^\beta\right) = 1 + q + \cdots q^\beta \equiv 0 \pmod 4$, mikä ei ole mahdollista. Tämä todistaa väitteen. □

Todistetaan ihan lopuksi vielä pieni tulos alkutekijöiden lukumäärään liittyen, eli että niitä on oltava paljon:

Lause 6. *Parittomalla täydellisellä luvulla on oltava vähintään pienimmän alkutekijän verran erisuuria alkutekijöitä.*

Todistus. Olkoon luvun n alkutekijähajotelma $p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$. Jos pätee

$$2p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdots\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1},$$

niin arvioimalla ylöspäin oikeaa puolta saadaan

$$2p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}<\frac{p_1^{\alpha_1+1}}{p_1-1}\cdots\frac{p_k^{\alpha_k+1}}{p_k-1},$$

eli

$$2<\frac{p_1}{p_1-1}\cdots\frac{p_k}{p_k-1}.$$

Huomatkaamme nyt, että funktio

$$g(x)=\frac{x}{x-1}$$

on laskeva, kun $x>1$ (epäileväiset lukijat voivat derivoida ja päätyä samaan johtopäätökseen). Voimme myös päättää, että

$$p_1<p_2<\cdots<p_k.$$

Siispä

$$\begin{aligned}2&<\frac{p_1}{p_1-1}\cdots\frac{p_k}{p_k-1}\\&<\frac{p_1}{p_1-1}\cdot\frac{p_1+1}{p_1}\cdots\frac{p_1+k-1}{p_1+k-2}=\frac{p_1+k-1}{p_1-1}.\end{aligned}$$

Loppu onkin varsin helppo lasku:

$$2(p_1-1)<p_1+k-1,$$

joten $p_1-1<k$, mikä todistaakin väitteen. $\square$

Tulosta koulusi ilmoitustaululle Solmun etusivulta `http://solmu.math.helsinki.fi`

– Solmun juliste

– Monikielisen matematiikkaverkkosanakirjan juliste