

Lukualueiden laajentamisesta

Tuomas Korppi

1 Poleeminen johdanto

Opettaja! Oletko opettanut lukualueiden laajentamista koskevat asiat väärin? Lue tämä ja päivitä tietämystäsi. Aina aika-ajoin törmää nimittäin seuraavaan kolmeen uskomukseen:

1. Reaaliluvut täyttävät lukusuoran.
2. Uskomuksesta (1) seuraa, että jos lukualuetta laajennetaan reaalilukujen ulkopuolelle, täytyy mennä lukusuoran ulkopuolelle, kompleksitasoon.
3. Lukualuetta ei voida enää laajentaa kompleksiluvuista.

Tässä kirjoitelmassa osoitamme uskomukset (2) ja (3) perusteettomaksi.

Kysymys siitä, täyttävätkö reaaliluvut lukusuoran on nähdäkseni filosofinen. Reaaliluvut ovat harvinaisen käyttökelpoinen systeemi, ja tämän johdosta lukusuora yleensä samaistetaan reaalilukujen joukon kanssa. Tässä tehdään kuitenkin nähdäkseni aito valinta. Mitään sen syvällisempää syytä sille, että juuri reaalilukuja pidetään koko lukusuorana ei ole. Tässä kirjoitelmassa todistetaan systeemin $\mathcal{M}$ olemassaolo, joka periaatteessa kelpaa lukusuoraksi siinä missä reaaliluvutkin.

Reaaliluvut voidaan karakterisoida seuraavilla aksioomilla:

Kunta-aksioomat

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ kaikilla a, b, c .
2. $0 + a = a$ kaikilla a .
3. Kaikilla a on olemassa b , jolle $a + b = 0$.

4. $a + b = b + a$ kaikilla a, b .
5. $(ab)c = a(bc)$ kaikilla a, b, c .
6. $1a = a$ kaikilla a .
7. Kaikilla a , $a \neq 0$, on olemassa b , jolle $ab = 1$.
8. $ab = ba$ kaikilla a, b .
9. $a(b + c) = ab + ac$ kaikilla a, b, c .
10. $0 \neq 1$.

Järjestysaksioomat

1. $a \leq a$ kaikilla a .
2. Kaikilla a, b, c pätee: Jos $a \leq b$ ja $b \leq c$, niin $a \leq c$.
3. Kaikilla a, b pätee: Jos $a \leq b$ ja $b \leq a$ niin $a = b$.
4. Kaikilla a, b pätee: $a \leq b$ tai $b \leq a$.
5. Kaikilla a, b, c pätee: Jos $a \leq b$ niin $a + c \leq b + c$.
6. Kaikilla a, b pätee: Jos $0 \leq a, b$ niin $0 \leq ab$.

Supremum-aksiooma

Kaikilla lukujärjestelmän epätyhjillä osajoukoilla A pätee: Jos joukolla A on yläraja, joukolla A on pienin yläraja.

Koska reaalitylukujen järjestelmää ei voida laajentaa kaikki yllämainitut aksioomat säilyttäen, täytyy ainakin jostain niistä luopua reaalitylukujen järjestelmää laajennettaessa. Kunta-aksioomat kodifioivat tavalliset laskulait, ja näin niiden voidaan katsoa kuuluvan ”lukujärjestelmän olemukseen”. Jos siis haluamme laajentaa lukualuetta, emme halua luopua niistä. Järjestysaksioomat sanovat, että luvut voidaan järjestää suoran kaltaiseksi olioksi, vieläpä niin, että laskutoimitukset ovat yhteensopivia järjestyksen kanssa. Jos haluamme romuttaa uskomuksen (2), haluamme säilyttää nämä aksioomat. Ainoaksi hylättäväksi aksioomaksi jää siis supremum-aksiooma.

Kompleksiluvut toteuttavat kunta-aksioomat, mutteivat järjestys- tai supremum-aksioomaa. Jos haluamme romuttaa uskomuksen, ettei lukualuetta voi enää laajentaa kompleksiluvuista, nähdäkseni riittääkin osoittaa, että laajennus voidaan tehdä kunta-aksioomat säilyttäen. Kompleksilukujen kunnalla on kuitenkin sellainen hieno ominaisuus, että jokaisella (ei-vakio)polynomilla on nollakohta. Laajentaessamme kompleksilukuja haluammekin säilyttää tämän ominaisuuden.

2 Apuneuvoja logiikasta

Ensimmäisen kertaluvun aakkosto tarkoittaa kokoelmaa relaatiosymboleja (jolla jokaisella on paikkalukunsa), funktiosymboleja (joilla jokaisella on paikkalukunsa) sekä vakiosymboleja.

Aakkoston kanssa yhteensopiva malli tarkoittaa jonoa $\mathcal{M} = (M, R_0, \dots, R_n, f_0, \dots, f_{n'}, c_0, \dots, c_{n''})$, missä M on joukko, $R_0, \dots, R_n$ ovat relaatioita joukossa M siten, että jokaista aakkoston relaatiosymbolia vastaa relaatio, jonka paikkaluku on sama kuin aakkoston symbolin, $f_0, \dots, f_{n'}$ ovat funktioita $M^{m_i} \rightarrow M$ siten, että jokaista aakkoston funktiosymbolia vastaa funktio, jonka paikkaluku on sama kuin funktiosymbolin, ja $c_0, \dots, c_{n''}$ ovat vakiosymboleja vastaavia joukon M alkioita.

Koska haluamme esitellä teoreemoja, joissa puhutaan lauseista, meidän täytyy antaa tarkka määritelmä niille lauseille, joista teoreemamme puhuvat.

Aakkoston ensimmäisen kertaluvun kaava tarkoittaa kaavaa, joka saadaan muodostettua käyttäen aakkoston symboleja, merkkejä $(,), =$ (yhtäsuuri), $\forall$ (kaikilla), $\exists$ (on olemassa), $\neg$ (ei), $\vee$ (tai), $\wedge$ (ja), $\Rightarrow$ (implikoi), $\Leftrightarrow$ (ekvivalentti) sekä muuttujasymboleja, joita voidaan sitoa kvanttoreilla.

Ensimmäisen kertaluvun kaavassa ajatellaan, että muuttujat saavat arvoikseen pelkästään joukon M alkioita, eivät esimerkiksi joukon M osajoukkoja. Näin ollen $\forall x$ tarkoittaa $\forall x \in M$ ja $\exists x$ tarkoittaa $\exists x \in M$.

Ensimmäisen kertaluvun lause tarkoittaa ensimmäisen kertaluvun kaavaa, jossa jokainen muuttuja on sidottu kvanttorilla. Jos $\mathcal{M}$ on malli, joka on yhteensopiva aakkoston kanssa, ja ℓ on ensimmäisen kertaluvun lause, voi ℓ olla tosi tai epätosi mallissa $\mathcal{M}$.

Esimerkki aakkostosta on $+, \times, 0, 1, \leq$, missä $+$ ja $\times$ ovat kaksipaikkaisia funktiosymboleja, $\leq$ on kaksipaikkainen relaatiosymboli, ja $0, 1$ ovat vakiosymboleja. Esimerkki tämän aakkoston kanssa yhteensopivasta mallista on $(\mathbb{R}, +, \times, 0, 1, \leq)$, missä $+, \times, 0, 1, \leq$ ovat reaalityökalujen tavanomaisia operaattoreita, relaatio ja alkioita.

Esimerkkejä ensimmäisen kertaluvun lauseista ovat nyt reaalityökalujen kunta-aksioomat sekä järjestysaksioomat. Nämä nimittäin voidaan kirjoittaa

ensimmäisen kertaluvun lauseelle sallittuja merkkejä käyttäen. Esimerkiksi distributiivisuusaksiooma voidaan kirjoittaa

$$\forall x \forall y \forall z (x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z))$$

ja käänteisalkion olemassaolo lauseena

$$\forall x ((\neg(x = 0)) \Rightarrow \exists y (x \times y = 1)).$$

Supremum-aksioomaa, jossa kvantifioidaan reaalilukujen joukon osajoukkojen yli, ei voida kirjoittaa ensimmäisen kertaluvun lauseena.

Kaikki reaalilukujen kunta-aksioomat sekä järjestysaksioomat ovat tosia mallissa $(\mathbb{R}, +, \times, 0, 1, \leq)$. Esimerkkejä epätosista lauseista ovat $1 + 1 + 1 = 1 + 1$ sekä $\exists x \exists y ((1 \leq x) \wedge (0 \times y = x))$.

Jos A on lausejoukko, ja kaikki joukon A lauseet ovat tosia mallissa $\mathcal{M}$, sanomme, että $\mathcal{M}$ on lausejoukon A malli.

Loogikot ovat kehittäneet päättelysteemejä, joissa ensimmäisen kertaluvun lausejoukoista voidaan todistaa uusia ensimmäisen kertaluvun lauseita. Esimerkki meidän tarpeisiimme kelpaavasta päättelysteemistä löytyy teoksesta Doets [2], liitteestä A. Päättelysteemeillä on seuraava tärkeä ominaisuus: Jos lause saadaan pääteltyä lausejoukon A lauseista, se saadaan pääteltyä äärellisellä askelmäärällä, joten sen päättelyssä vedotaan vain äärelliseen määrään lausejoukon A lauseita.

Ristiriita voidaan määritellä vaikkapa lauseeksi $\exists x (\neg x = x)$.

Seuraava tulos on meidän kannaltamme tärkeä:

Lause 1 *Olko A ensimmäisen kertaluvun lausejoukko. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

1. *Lausejoukosta A ei saada pääteltyä ristiriitaa.*
2. *On olemassa malli $\mathcal{M}$ siten, että kaikki A :n lauseet ovat tosia $\mathcal{M}$:ssä.*

Todistus: Doets [2], Lauseen A 7 mukaan jos lause saadaan pääteltyä A :sta, se on tosi kaikissa niissä malleissa, joissa kaikki A :n lauseet ovat tosia. Oletetaan (2). Koska ristiriitainen lause ei voi olla tosi missään mallissa, lausejoukosta A ei saada pääteltyä ristiriitaa. Siis (2) implikoi väitteen (1).

(1) implikoi (2) on Doets [2], Lause A 9. $\square$

Jos lausejoukosta voidaan päätellä ristiriita, se voidaan tehdä äärellisen monella päättelyaskeleella, joten siinä voidaan vedota vain äärellisen moneen lausejoukon lauseista. Näin ollen saadaan seuraava korollaari:

Korollaari 2 *Olkoon A ensimmäisen kertaluvun lausejoukko. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.*

- *Jokaisella äärellisellä $A_0 \subset A$ on olemassa malli $\mathcal{M}$ siten, että kaikki A_0 :n lauseet ovat tosia $\mathcal{M}$:ssä.*
- *On olemassa malli $\mathcal{M}$ siten, että kaikki A :n lauseet ovat tosia $\mathcal{M}$:ssä.*

Yllä olen määritellyt aakkoston (ja vastaavasti mallin) siten, että se sisältää vain äärellisen määrän relaatio-, funktio- ja vakiosymboleja. Tämä on kuitenkin epäolennaista: Jatkossa oletamme, että nämä joukot voivat olla myös äärettömiä. Kaikki yllämainitut tulokset pätevät myös tässä tapauksessa.

3 Reaalilukualueen laajentaminen

Lähdetään liikkeelle mallista $(\mathbb{R}, +, \times, -, /, \leq)$, joka on yhteensopiva aakkoston $L = (+, \times, -, /, \leq)$ kanssa. (Määritellään nollalla jakaminen mielivaltaisesti, jotta saadaan reaalilukujen systeemi asettumaan ylläkehitettyyn viitekehykseen.) Muodostetaan aakkosto L' lisäämällä aakkostoon L nimi (vakiosymboli) x_r jokaiselle reaaliluvulle r . Olkoon A kaikkien niiden aakkostossa $L' = (+, \times, -, /, \leq, (x_r)_{r \in \mathbb{R}})$ muotoiltujen 1. kertaluvun lauseiden joukko, jotka ovat tosia mallissa $(\mathbb{R}, +, \times, -, /, \leq, (r)_{r \in \mathbb{R}})$.

Olkoon a uusi vakiosymboli. Olkoon L'' aakkosto, joka saadaan, kun aakkostoon L' lisätään uusi vakiosymboli a . Määritellään A' niin, että se saadaan, kun A :han lisätään lauseet $x_r \leq a$ jokaiselle $r \in \mathbb{R}$.

Olkoon A_0 lausejoukon A' äärellinen osajoukko. Muodostetaan malli $\mathcal{M}_0$, jonka perusjoukko on $\mathbb{R}$ ja jossa $+, \times, -, /, \leq$ ovat $\mathbb{R}$:n tavanomaisia operaattoreita ja x_r on tulkittu r :ksi kaikilla $r \in \mathbb{R}$. Koska A_0 voi sisältää vain äärellisen määrän lauseita $x_r \leq a$, voidaan a määritellä suuremmaksi kuin näissä esiintyvät luvut. Siis kaikki A_0 :n lauseet ovat tosia $\mathcal{M}_0$:ssa.

Lause 3 *Lausejoukolla A' on malli $\mathcal{M} = (M, \dots)$, jossa kaikki A' :n lauseet ovat tosia. $\mathcal{M}$ laajentaa reaalilukujen systeemiä.*

Todistus: Edellä osoitetun perusteella jokaisella A' :n äärellisellä osajoukolla on malli. Siis Korollaarin 2 nojalla lausejoukolla A' on malli $\mathcal{M} = (M, \dots)$.

$\mathcal{M}$ laajentaa reaalilukujen systeemiä, koska on olemassa upotus $\mathbb{R} \rightarrow M$. Tässä upotuksessa jokainen reaaliluku r kuvautuu symbolin x_r tulkinnaiksi $\mathcal{M}$:ssä. Koska A' sisältää kaikki mallissa $(\mathbb{R}, +, \times, -, /, \leq, (r)_{r \in \mathbb{R}})$ todet lauseet, A' sisältää myös kaikki todet lauseet tyyppiä $x_r + x_{r'} = x_{r''}$ (ja

vastaavat lauseet operaattoreille $\times, -, /, \leq$.) Näin ollen $\mathcal{M}$:n operaattorit $+, \times, -, /, \leq$ laajentavat reaalilukujen vastaavia operaattoreita. $\square$

Koska A' sisältää kaikki mallissa $(\mathbb{R}, +, \times, 0, 1, \leq)$ todet ensimmäisen kertaluvun lauseet, A' sisältää kaikki kunta- ja järjestysaksioomat. Näin ollen ne ovat tosia myös mallissa $\mathcal{M}$.

Näiden lisäksi M sisältää alkion a , joka on suurempi kuin kaikki reaaliluvut. Koska reaaliluvut eivät sisällä tällaista alkioita, M on reaalilukujen kunnan aito laajennus.

Koska reaaliluvuille pätee $\forall y((0 \leq y \wedge y \neq 0) \Rightarrow (0 \leq 1/y \wedge 1/y \neq 0))$, sama pätee myös $\mathcal{M}$:ssä. Näin ollen $0 \leq 1/a, 1/a \neq 0$. Koska reaaliluvuille pätee myös $\forall y, z(((0 \leq y, z) \wedge (y, z \neq 0) \wedge (y \leq z)) \Rightarrow (1/z \leq 1/y))$, sama pätee myös $\mathcal{M}$:ssä. Näin ollen $1/a \leq 1, 1/a \leq 1/2, 1/a \leq 1/3, \dots$. Siis $1/a$ on infinitesimaalisen pieni alkio ja a on äärettömän suuri alkio.

Olemme yllä tutkineet vain kahta M :n uutta alkioita, a :ta ja $1/a$:ta. Itse asiassa uusia alkioita tulee vaikka kuinka paljon. Näitä ovat esimerkiksi $a+5, 2 \times a, 42 + 1/a, 0 - 1/a$ sekä $1/(a \times a)$. Näistä viimeinen on siitä mielenkiintoinen, että se on paitsi infinitesimaalisen pieni, myös äärettömän paljon pienempi kuin $1/a$, joka jo itsessään on infinitesimaalisen pieni.

Olemme siis saaneet todistettua, että reaalilukujen järjestetty kunta voidaan laajentaa järjestetyksi kunnaksi $\mathcal{M}$, joka sisältää reaalilukujen lisäksi mm. äärettömän suuria ja infinitesimaalisen pieniä alkioita. $\mathcal{M}$ toteuttaa lisäksi sellaisen vahvemman ehdon, että $(\mathbb{R}, +, \times, -, /, \leq, (r)_{r \in \mathbb{R}})$:ssa todet ensimmäisen kertaluvun lauseet ovat tosia $\mathcal{M}$:ssä.

4 Kompleksilukualueen laajentaminen

Kompleksilukualueen laajentaminen tehdään samoin kuin reaalilukualueen laajentaminenkin. Lähdetään siis liikkeelle mallista $(\mathbb{C}, +, \times, -, /, (c)_{c \in \mathbb{C}})$ sekä mallin kanssa yhteensopivasta aakkostosta L . Muodostetaan L' lisäämällä L :ään uusi vakiosymboli a . Olkoon A kaikkien mallissa $(\mathbb{C}, +, \times, -, /, (c)_{c \in \mathbb{C}})$ tosien ensimmäisen kertaluvun lauseiden joukko. Muodostetaan A' lisäämällä A :han lause $\neg(a = x_c)$ jokaiselle $c \in \mathbb{C}$.

Lause 4 *On olemassa malli $\mathcal{N} = (N, \dots)$, jossa kaikki lausejoukon A' lauseet ovat tosia. $\mathcal{N}$ laajentaa kompleksilukujen systeemiä.*

Todistus: Osoitetaan samaan tapaan kuin reaalilukujen tapauksessakin, että A' :lla on malli $\mathcal{N} = (N, \dots)$, jossa kaikki A' :n lauseet ovat tosia.

Osoitetaan samaan tapaan kuin reaalilukujen tapauksessakin, että $\mathbb{C}$ voidaan upottaa $\mathcal{N}$:ään, ja $\mathcal{N}$:n laskutoimitukset laajentavat kompleksilukujen laskutoimituksia. $\square$

Koska $\neg(a = x_c)$ on tosi $\mathcal{N}$:ssä kaikilla $c \in \mathbb{C}$, a :ta ei vastaa mikään kompleksiluku, joten $\mathcal{N}$ on kompleksilukujen kunnan aito laajennus.

Koska kompleksiluvut toteuttavat kunta-aksioomat, ja $\mathcal{N}$ ja kompleksiluvut toteuttavat samat aakkostossa $(+, -, \times, /, (x_c)_{c \in \mathbb{C}})$ muotoillut ensimmäisen kertaluvun lauseet, myös $\mathcal{N}$ toteuttaa kunta-aksioomat.

Osoitetaan vielä, että $\mathcal{N}$:ssä jokaisella (ei-vakio)polynomilla on nollakohta. Olkoon $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Osoitetaan, että jokaisella astetta n olevalla polynomilla on nollakohta. $(\mathbb{C}, +, \times, -, /, (x_c)_{c \in \mathbb{C}})$:ssä pätee

$$\forall z_0, z_1, \dots, z_n (z_n \neq 0 \Rightarrow \exists y (z_0 + (z_1 \times y) + (z_2 \times y \times y) + \dots + (z_n \times y \times \dots \times y) = 0)).$$

Näin ollen sama lause pätee myös $\mathcal{N}$:ssä, ja jokaisella (ei-vakio)polynomilla on nollakohta.

Algebrassa voidaan todistaa seuraava: Olkoon K kunta ja $P(x)$ polynomi, joka ei ole nollapolynomi ja jonka kertoimet ovat K :ssa. Jos $k \in K$ on polynomin $P(x)$ nollakohta, $x - k$ on polynomin $P(x)$ tekijä. Todistus löytyy teoksesta Adams [1], Teoreema 5.5. Näin ollen $\mathcal{N}$:ssä jokainen (ei-vakio)polynomi voidaan jakaa ensimmäisen asteen tekijöihin.

5 Lopuksi

Tässä kirjoitelmassa olemme käsitelleet pelkästään kysymystä, *voidaanko* lukualueita laajentaa. Kokonaan toinen kysymys on se, että *onko niitä järkevää* laajentaa. Jos emme oleta malleilta $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ muuta kuin yllä on esitetty, niillä ei liene muuta käyttöä kuin olla esimerkkeinä siitä, että laajentaminen voidaan tehdä.

Sini-, kosini- ja eksponenttifunktioita ei esimerkiksi välttämättä voida määritellä $\mathcal{M}$:n ja $\mathcal{N}$:n alkioille. Jos nämä halutaan määritellä, on esimerkiksi lähdettävä mallista $(\mathbb{R}, +, \times, -, /, \leq, \sin, \cos, \exp, (r)_{r \in \mathbb{R}})$ ja laajennettava sitä samaan tapaan kuin edellä.

Samanlaisia, mutta tarkemmin tarkoitustaan vastaamaan konstruoituja malleja kuin $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ käytetään Abraham Robinsonin *epästandardissa analyysissä*. Myös näissä malleissa pätevät kaikki reaalilukujen (kompleksilukujen) systeemissä todet ensimmäisen kertaluvun lauseet, ja ne sisältävät

reaalilukujen (kompleksilukujen) lisäksi infinitesimaalisen pieniä ja äärettömän suuria lukuja. Epästandardissa analyysissä voidaan monia analyysin asioita uudelleenmääritellä infinitesimaalisen pienten lukujen avulla raja-arvotarkastelujen sijaan. Esimerkiksi funktio on jatkuva, jos ja vain se vie infinitesimaalisen lähellä toisiaan olevat pisteet infinitesimaalisen lähelle toisiaan.

Epästandardissa analyysissä ei myöskään tule vastaan tilannetta, jossa jokin reaalifunktio olisi määrittelemätön laajennetun kunnan alkioille: Jokaisella reaalifunktiolla on epästandardi vastineensa.

Epästandardi analyysi infinitesimaaleineen on kuitenkin teema, josta voidaan olla useaa mieltä. Jotkut kokevat sen hyödylliseksi, mutta monien mielestä sen käyttö vain mutkistaa asioita eikä mahdollista mitään sellaista, mitä ei voisi tehdä standardityökaluilla.

6 Pähkinöitä

1. Olkoon $\mathcal{M}$ kuten edellä, ja olkoon $z \in M$, $0 \leq z$. Olkoon $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen $y \in M$, $0 \leq y$, jolle $y^n = z$.
2. Olkoon $\mathcal{M}$ kuten edellä. Osoita, että joukolla $\mathbb{R} \subset M$ ei ole pienintä ylärajaa.
3. Olkoon $\mathcal{M}$ kuten edellä. Muodostetaan joukko $M \times M$, ja määritellään siellä laskutoimitukset $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ ja $(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$. Osoita, että näin saadaan kunta. (Yritä keksiä fiksumpi ratkaisu kuin kaikkien aksioomien tarkastaminen käsin.) Osoita, että tässä kunnassa jokaisella (ei-vakio)polynomilla on nollakohta.
4. Olkoon A kaikkien mallissa $(\mathbb{R}, +, -, \times, /, \leq, (r)_{r \in \mathbb{R}})$ tosien lauseiden joukko. Muodostetaan A' lisäämällä A :han lause $a \neq x_r$ jokaiselle $r \in \mathbb{R}$. Olkoon $\mathcal{M} = (M, \dots)$ lausejoukon A' malli. Osoita, että M :ssä on äärettömän suuria ja infinitesimaalisen pieniä alkioita (ts. alkioita, jotka ovat suurempia kuin kaikki reaaliluvut, ja alkioita, jotka ovat nollaa suurempia mutta kaikkia positiivisia reaalilukuja pienempiä).
5. Osoita, että Lauseissa 3 ja 4 systeemit $\mathcal{M} = (M, \dots)$ ja $\mathcal{N} = (N, \dots)$ voidaan valita niin, että $|M| > |\mathbb{R}|$ ja $|N| > |\mathbb{C}|$, missä $|\cdot|$ on joukon mahtavuus.

7 Pähkinöiden ratkaisut

(1) Olkoon $n \in \mathbb{N}, n > 0$. Koska reaalilukujen joukossa pätee

$$\forall z(0 \leq z \Rightarrow$$

$$\exists y(0 \leq y \wedge y \times \cdots \times y = z \wedge \forall y'((0 \leq y' \wedge y' \times \cdots \times y' = z) \Rightarrow y' = y)))$$

(tulot kaavassa otetaan n kertaa), sama pätee mallissa $\mathcal{M}$, joten jokaisella $z \in M, 0 \leq z$, on olemassa yksikäsitteinen $y \in M, 0 \leq y$, jolle $y^n = z$.

(2) Olkoon y joukon $\mathbb{R}$ yläraja. Osoitetaan, että y ei ole joukon $\mathbb{R}$ pienin yläraja. Olkoon $r \in \mathbb{R}$. Koska $r + 1 \leq y, r = (r + 1) - 1 \leq y - 1$. Siis $y - 1$ on joukon $\mathbb{R}$ yläraja, ja näin ollen y ei ole joukon $\mathbb{R}$ pienin yläraja.

(3) Kompleksilukujen distributiivisuusaksiooma voidaan kirjoittaa reaalilukuja koskevana lauseena

$$\forall x \forall y \forall x' \forall y' \forall x'' \forall y''$$

$$((x, y) \times ((x', y') + (x'', y'')) = (x, y) \times (x', y') + (x, y) \times (x'', y'')),$$

missä laskutoimitukset on määritelty kaavoilla $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ ja $(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$. Kaikki muut kunta-aksioomat voidaan kirjoittaa samaan tapaan. Näistä lauseista voidaan vielä purkaa auki edellä annettujen laskutoimitusten määritelmien avulla parien laskutoimitukset niin, että saadaan reaalilukujen yhteen- ja kertolaskusta puhuvia lauseita. Näin saadaan lauseet $L_1, \dots, L_n$, jotka ovat ekvivalentteja parien kunta-aksioomien kanssa. Koska kompleksiluvut toteuttavat kunta-aksioomat, lauseet $L_1, \dots, L_n$ ovat tosia mallissa $(\mathbb{R}, +, \times, -, /, (r)_{r \in \mathbb{R}})$. Koska $L_1, \dots, L_n$ ovat ensimmäisen kertaluvun lauseita aakkostossa $(+, \times, -, /, (x_r)_{r \in \mathbb{R}})$, ne ovat tosia mallissa $\mathcal{M}$. Mutta $L_1, \dots, L_n$ ovat ekvivalentteja parien kunta-aksioomien kanssa, joten tehtävässä annettu systeemi on kunta.

Se, että jokaisella (ei-vakio)polynomilla on nollakohta todistetaan samaan tapaan.

(4) Jos $r \leq a$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$, on a äärettömän suuri ja $1/a$ infinitesimaalisen pieni.

Jos $a \leq r$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$, on $0 - a$ äärettömän suuri ja $1/(0 - a)$ infinitesimaalisen pieni.

Jäljellä on siis tapaus, jossa on olemassa reaaliluvut r_1, r_2 siten, että $r_1 \leq a$ ja $a \leq r_2$. Tässä tapauksessa joukko $B = \{r \in \mathbb{R} \mid r \leq a\}$ on epätyhjä ja reaalilukujen joukossa ylhäältä rajoitettu (koska r_2 on sen yläraja). Näin ollen B :lla on supremum r_0 reaalilukujen joukossa, kun rajoitutaan tutkimaan pelkästään reaalilukujen suuruusjärjestystä. Nyt sekä $r_0 \leq a$ että $a \leq r_0$ ovat mahdollisia. Helposti kuitenkin nähdään, että lukujen r_0 ja a välissä ei

ole yhtään reaalilukua. Näin ollen myöskään lukujen $a - r_0$ ja 0 välissä ei ole yhtään reaalilukua. (Jos välissä olisi reaaliluku c , reaaliluku $r_0 + c$ olisi lukujen r_0 ja a välissä.)

Jos $0 \leq a - r_0$, määritellään $b = a - r_0$, ja jos $a - r_0 \leq 0$, määritellään $b = r_0 - a$. Nyt b on infinitesimaalisen pieni positiivinen luku, ja siis $1/b$ on äärettömän suuri.

(5) Osoitamme kompleksilukuja koskevan väitteen. Väite reaaliluvuille todistetaan samalla tavalla.

Olkoon I joukko, jolle $|I| > |\mathbb{C}|$, ja $(y_i)_{i \in I}$ kokoelma uusia vakiosymboleja. Olkoon L' ja A' kuten luvun ”Kompleksilukualueen laajentaminen” alussa. Muodostetaan aakkosto L'' lisäämällä aakkostoon L' symbolit $y_i, i \in I$. Muodostetaan lausejoukko A'' lisäämällä lausejoukkoon A' lauseet $y_i \neq y_{i'}$, missä $i, i' \in I, i \neq i'$.

Nähdään helposti, että jokaisella lausejoukon A'' äärellisellä osajoukolla on malli, joten lausejoukolla A'' on malli $\mathcal{N} = (N, \dots)$. Koska kaikilla $i, i' \in I, i \neq i'$, pätee $y_i \neq y_{i'}$, kaikkia y_i :tä vastaavat eri N :n alkiot. Siis $|N| \geq |I| > |\mathbb{C}|$.

Viitteet

- [1] Adamson, I.T., *Introduction to Field Theory*, University Mathematical Texts, 1964.
- [2] Doets, Kees, *Basic Model Theory*, CSLI Publications, 1996.