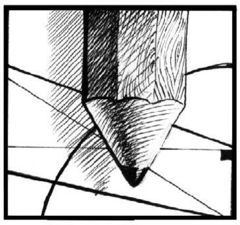


Lukion trigonometriaa

Markku Halmetoja
Mäntän lukio

Lukiossa opiskeltava trigonometrian oppimäärä on viimeisimpien opetussuunnitelmauudistusten myötä näivettynyt kaavakokoelman selailuksi. Eräässä nettikeskustelussa muuan lukion opettaja totesi jopa: ”Sinin ja kosinin yhteen- ja vähennyslaskukaavat kuuluvat siihen alueeseen, jota minä opettajana en viitsi pitää aktiivisessa käyttömuistissa.” Tulevaisuudessa artikkelin [2] edustama trigonometrian osaaminen saattaakin olla poikkeuksellista maamme koululaitoksessa.

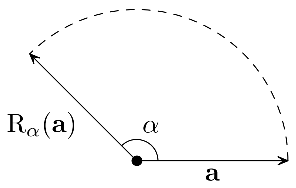
Nykyinen opetussuunnitelma mainitsee trigonometrian osalta tärkeimmiksi opittaviksi asioiksi kosinin ja sinin neliöiden summan ja sen, että tangentti on sinin ja kosinin suhde. Nämä asiat voitaisiin helposti todistaa teräville kulmille jo peruskoulussa, eivätkä ne niinmuodoin tärkeydestään huolimatta sovi lukion trigonometrian kurssin keskeisiksi sisällöiksi. Niiden ja ulkolukuna opittujen derivoimiskaavojen hallitseminen ei anna riittävää pohjaa jatko-opintoihin. Korkeakouluissa joudutaankin useimmiten aloittamaan trigonometrian opiskelu aivan alkeista, mikä hidastaa varsinaisiin opintoihin pääsemistä. Se on tavallaan looginen seuraus siitä, että lukioissa joudutaan nyt opiskelemaan uusina asioina peruskoulun entisen laajan tasokurssin sisältö. Tätä taustaa vasten yllä oleva sitaatti kaikessa järkyttävyydessään on jotenkin ymmärrettävä. Vallalla oleva koulupolitiikka on johtanut siihen, että koulussa opittavan matematiikan määrä ja laatu ovat käänteisessä suhteessa yhteiskunnassa sovellettavan tekniikan määrään ja monimuotoisuuteen. Kauemmin jatkuessaan tämä tilanne johtaa mitä ilmeisemmin asiantuntijapulaan ja joidenkin korkeaan teknologiaan perustuvien järjestelmien romahtamiseen. Uusia rakennuksia sortuu tuuli- ja lumitaakkojen alle jo nyt.

Itsenäiseen opiskeluun kykenevä matematiikasta kiinnostunut lukiolainen, jota jatkossa kutsutaan *aktiiviseksi lukijaksi*, voi Solmun artikkeleita tutkimalla osaltaan korjata tilannetta tai ainakin varmistaa oman jatko-opintokelpoisuutensa. Tämän kirjoituksen myötä hän osallistuu kosinin ja sinin yhteenlaskukaavojen *todistamiseen* ja oppii johtamaan niiden avulla tärkeimmät koulumatematiikassa esiintyvät trigonometristen funktioiden ominaisuudet. Pohjatiedoiksi tarvitaan vektoriopin alkeet, kosinin ja sinin määritelmä yksikköympyrän avulla sekä näiden funktioiden parillisuus ja parittomuus. Käsittelytapa on useimmille aloille riittävä. Tulevat matematiikan pääaineopiskelijat perehtyvät trigonometrisiin funktioihin täsmällisemmin, kun ne määritellään kompleksitasolla päättymättöminä summina, ks. [1]. Se ei kuitenkaan muuta miksikään niitä käytäntöjä ja laskurutiineja, jotka opitaan tämän esityksen perusteella. Samat faktat vain todistuvat eri tavalla, joskin kompleksitasolla näille funktioille avautuu eräitä koulumatematiikalle tavoittamattomissa olevia ominaisuuksia.

Yhteen- ja vähennyslaskukaavat

Trigonometristen funktioiden käsittely tulisi perusmääritelmien jälkeen aloittaa kosinin ja sinin yhteenlaskukaavojen johtamisella. Seuraava yksinkertainen esitys on vanhasta lukion oppikirjasta [4]. Olympiavalmennussivuilla [5] voi tutustua perinteisempään tapaan johtaa nämä kaavat.

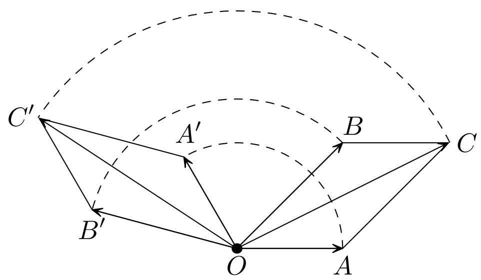
Määritellään nollavektorista eroaville vektoreille kuvion 1 osoittama suunnatun kulman α suuruinen kierto $\boldsymbol{a} \mapsto \mathrm{R}_\alpha(\boldsymbol{a})$ vektorin alkupisteen ympäri.



Kuvio 1.

Sovitaan erikseen, että $\mathrm{R}_\alpha(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Suunnikkaan sivut ja lävistäjä kiertyvät yhtä paljon,

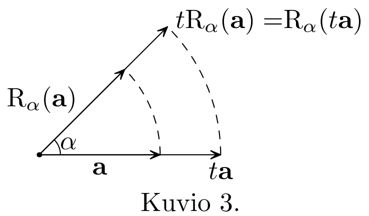


Kuvio 2.

joten vektorien summa kiertyy termeittäin. Siis

$$\mathrm{R}_\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathrm{R}_\alpha(\boldsymbol{a}) + \mathrm{R}_\alpha(\boldsymbol{b}).$$

Vektorin kierron ja venytyksen järjestys voidaan vaihtaa,



Kuvio 3.

eli jos $t \in \mathbb{R}$, niin

$$\mathrm{R}_\alpha(t\boldsymbol{a}) = t\mathrm{R}_\alpha(\boldsymbol{a}).$$

Aktiivinen lukija voi piirtää negatiivista t:n arvoa vastaavan kuvion.

On ilmeistä, että kaksi peräkkäin suoritettua kiertoa voidaan yhdistää laskemalla kulmat yhteen ja että peräkkäisten kiertojen järjestys voidaan vaihtaa. Siis

$$\mathrm{R}_\alpha\big(\mathrm{R}_\beta(\boldsymbol{a})\big) = \mathrm{R}_{\alpha+\beta}(\boldsymbol{a}) = \mathrm{R}_{\beta+\alpha}(\boldsymbol{a}) = \mathrm{R}_\beta\big(\mathrm{R}_\alpha(\boldsymbol{a})\big).$$

Lisäksi on selvää, että

$$\mathrm{R}_{\pi/2}(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{j} \quad \text{ja} \quad \mathrm{R}_{\pi/2}(\boldsymbol{j}) = -\boldsymbol{i}.$$

Suoritetaan seuraavaksi kulman α suuruinen kierto kantavektoreille $\boldsymbol{i}$ ja $\boldsymbol{j}$. Kosinin ja sinin määritelmien mukaan

$$\mathrm{R}_\alpha(\boldsymbol{i}) = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \sin\alpha\,\boldsymbol{j},$$

ja edellä todettuja laskusääntöjä soveltaen

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_\alpha(\boldsymbol{j}) &= \mathrm{R}_\alpha\big(\mathrm{R}_{\pi/2}(\boldsymbol{i})\big) \\
&= \mathrm{R}_{\pi/2}\big(\mathrm{R}_\alpha(\boldsymbol{i})\big) \\
&= \mathrm{R}_{\pi/2}\big(\cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \sin\alpha\,\boldsymbol{j}\big) \\
&= \cos\alpha\,\mathrm{R}_{\pi/2}(\boldsymbol{i}) + \sin\alpha\,\mathrm{R}_{\pi/2}(\boldsymbol{j}) \\
&= \cos\alpha\,\boldsymbol{j} - \sin\alpha\,\boldsymbol{i}.
\end{aligned}$$

Kierretyt kantavektorit ovat siis

$$\begin{cases} \mathrm{R}_\alpha(\boldsymbol{i}) = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \sin\alpha\,\boldsymbol{j} \\ \mathrm{R}_\alpha(\boldsymbol{j}) = \cos\alpha\,\boldsymbol{j} - \sin\alpha\,\boldsymbol{i}. \end{cases}$$

Yhtälöstä

$$\mathrm{R}_{\alpha+\beta}(\boldsymbol{i}) = \mathrm{R}_\beta\big(\mathrm{R}_\alpha(\boldsymbol{i})\big)$$

saadaan nyt helposti (aktiivinen lukija suorittaa yksityiskohdat) yhteenlaskukaavat

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \end{cases}$$

ja niistä edelleen kosinin parillisuutta ja sinin parittomuutta soveltaen vähennyslaskukaavat

$$\begin{cases} \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \end{cases}$$

On käsittämätöntä, että opetussuunnitelmista vastaavat henkilöt ovat ”unohtaneet” näin hienon ja keskimääräiselle pitkän matematiikan opiskelijalle helposti avautuvan tavan perustella nämä tärkeät kaavat. MAOLkin kannattaa ulkolukua ja kaavakokoelmasta lunttaamista vastauksessaan ns. π:n päivän kirjeeseen: ”Oikean, ongelman ratkaisemisessa tarvittavan tiedon etsiminen laajasta tietokokoelmasta on hyödyllinen taito, joka on syytä oppia lukiossa.” (Ks. [6] ja [7].) Eikö kuitenkin olisi hyödyllisempää oppia *ymmärtämään* matematiikkaa perusteista lähtevien ja loogisesti etenevien esitysten kautta?

Aktiivinen lukija pystyy nyt johtamaan lähes kaikki keltaisen kirjan trigonometrian kaavat. Melkein vitsinä voi esimerkiksi todeta, että kosinin vähennyslaskukaavasta seuraa

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \cos(\alpha - \alpha) = \cos 0 = 1.$$

Ainakin kaksinkertaisen kulman kosini ja sini sekä komplementti- ja suplementtikulmien kosinit ja sinit kannattaa katsoa välittömästi, sillä joitakin niistä käytetään seuraavissa esimerkeissä ilman erillistä mainintaa. Myös tangentin yhteen- ja vähennyslaskukaava on hyvä selvittää itselleen, sillä viimeksi mainittuun perustuu mm. kahden suoran välisen kulman laskeminen analyyttisen geometrian kurssilla. Sanomattakin on selvää, että tätä laskutapaa ei mitenkään voi perustella tuolla kurssilla.

Esimerkkejä

Seuraavia tehtäviä voisi epäilemättä ratkaista symboliseen laskemiseen kykenevällä laskimella, mutta tuolloin suoritukseen saattaisi jäädä kohtia, joita ratkaisija ei ymmärrä. Laskin toimisi siinä tapauksessa kuten tiibetiläinen rukousmylly: sitä vain pyöritetään ja rukous kieppuu korkeuksiin ilman, että pyörittäjällä on selvää käsitystä sen sisällöstä. Oppimisen kannalta on siis parempi johtaa itse tarvittavat välitulokset.

Esim. 1 Määritettävä funktion $f(x) = \sin x \sin(a+x)$ suurin ja pienin arvo.

Ratk. Ensimmäiseksi ehkä tulee mieleen sinin yhteenlaskukaavan soveltaminen jälkimmäiseen tekijään, mutta se johtaisi ilmeisesti alkuperäistä hankalampaan ongelmaan. Hieman parempi ajatus on laskea funktion derivaatta

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \sin(a+x) + \sin x \cos(a+x) \\ &= \sin(a+2x), \end{aligned}$$

ja ratkaista tehtävä normaalina ääriarvotehtävänä. Derivaattaa ei kuitenkaan tarvita, jos huomaa, että kahden sinin tulo saadaan kosinin vähennys- ja yhteenlaskukaavoista:

$$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta.$$

Sijoittamalla tähän $\alpha = a + x$ ja $\beta = x$ saadaan

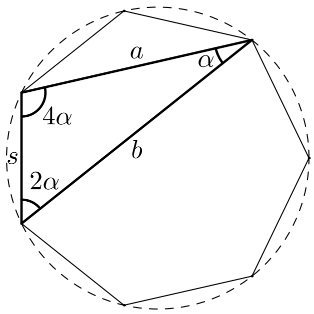
$$f(x) = \tfrac{1}{2}\big(\cos a - \cos(a+2x)\big),$$

mistä tulos jo näkyykin.

Esim. 2 Osoitettava, että säännöllisen 7-kulmion sivun s ja eripituisten lävistäjien a ja b välillä vallitsee yhtälö

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{s}.$$

Ratk. Tämän 70-luvun ylioppilastehtävän trigonometrinen ratkaisu on suoraviivainen sinilauseen sovellus, jonka yksityiskohdissa tosin tarvitaan tiettyä näppäryyttä. Sijoittamalla 7-kulmio ympyrän sisään nähdään kehäkulmia



Kuvio 4.

vastaavien kaarien avulla, että sivu ja lävistäjät muodostavat kolmion, jonka kulmat ovat α, 2α ja 4α. Sinilauseen avulla saadaan

$$\frac{\sin 2\alpha}{a} = \frac{\sin\alpha}{s} \quad \text{ja} \quad \frac{\sin 4\alpha}{b} = \frac{\sin\alpha}{s},$$

josta edelleen

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{s}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin 4\alpha}\right).$$

Oikealla oleva sulkulauseke on siis osoitettava ykköseksi ehdolla $7\alpha = \pi$. Kirjoitetaan se aluksi muotoon

$$\frac{\sin\alpha(\sin 4\alpha + \sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha \sin 4\alpha}.$$

Tämä ilmeisesti yksinkertaistuu, jos onnistutaan laskemaan osoittajassa oleva sinien summa. Tarvittava aputulos saadaan sinifunktion yhteen- ja vähennyslaskukaavoista:

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y.$$

Yhtälöparista

$$\begin{cases} x + y = 4\alpha \\ x - y = 2\alpha \end{cases}$$

seuraa $x = 3\alpha$ ja $y = \alpha$, joten

$$\sin 4\alpha + \sin 2\alpha = 2\sin 3\alpha\cos\alpha.$$

Niinpä

$$\begin{aligned} \frac{\sin\alpha(\sin 4\alpha + \sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha\sin 4\alpha} &= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha\sin 4\alpha} \\ &= \frac{\sin 2\alpha\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha\sin 4\alpha} \\ &= \frac{\sin 3\alpha}{\sin 4\alpha} \\ &= \frac{\sin(\pi - 4\alpha)}{\sin 4\alpha} = \frac{\sin 4\alpha}{\sin 4\alpha} = 1, \end{aligned}$$

ja väite on todistettu.

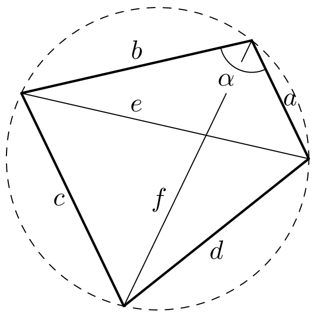
Seuraavassa vielä muutama harjoitus aktiivisen lukijan mietittäväksi.

1. Osoita, että $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$.
2. Määritä funktion $f(x) = a\cos x + b\sin x$ suurin ja pienin arvo.
3. Osoita, että jos $\tan x \in \mathbb{Q}$, niin myös $\cos 2x \in \mathbb{Q}$ ja $\sin 2x \in \mathbb{Q}$.

Jännenelikulmiosta

Edellisen kappaleen harjoituksista selviytyneen aktiivisen lukijan kannattaa myös perehtyä jo mainittuun olympiavalmennussivustolla olevaan järeään trigonometriapakettiin [5]. Katsotaan lopuksi sieltä eräs jännenelikulmion ominaisuus. Tällaisen nelikulmion vastakkaiset kulmat ovat toistensa suplementtikulmia, joten niiden kosinit ovat toistensa vastalukuja. Siksi kosinilauseen avulla on mahdollista löytää sivujen ja lävistäjien välisiä yhtälöitä, joissa kulmat eivät ole eksplisiittisesti mukana. Asetetaan tehtäväksi löytää mahdollisimman yksinkertainen tällainen yhtälö.

Olkoot jännenelikulmion sivut a, b, c ja d sekä lävistäjät e ja f.



Kuvio 5.

Kosinilause antaa e:n neliölle yhtälöt

$$\begin{cases} e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \\ e^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha, \end{cases}$$

joista kosinitermin eliminoimisella saadaan

$$\begin{aligned} e^2(ab+cd) &= a^2cd + b^2cd + c^2ab + d^2ab \\ &= (a^2cd + d^2ab) + (c^2ab + b^2cd) \\ &= ad(ac+bd) + bc(ac+bd) \\ &= (ad+bc)(ac+bd). \end{aligned}$$

Siis

$$e^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{(ab+cd)}.$$

Toisen lävistäjän neliö löytyy mukavimmin näkökulmaa muuttamalla: sijoittamalla edelliseen $a \to b$, $b \to c$, $c \to d$, $d \to a$ ja $e \to f$, saadaan

$$f^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}.$$

Niinpä

$$e^2f^2 = (ac+bd)^2,$$

eli

$$ef = ac + bd.$$

Tämä kaunis tulos on keksijänsä mukaan nimetty *Ptolemaioksen*[1] *lauseeksi*:

Jännenelikulmion lävistäjien tulo on vastakkaisten sivujen tulojen summa.

Lauseen perinteinen, ehkä jopa alkuperäinen, todistus löytyy teoksessa [3]. Aktiivinen lukija miettinee, voisiko Ptolemaioksen lauseen avulla ratkaista edellä esitetyn 7-kulmio-ongelman yksinkertaisemmin!

Viitteet

[1] Pekka Alestalo, *Trigonometriset funktiot*, http://solmu.math.helsinki.fi/2005/1/alestalo.pdf

[2] Juhani Fiskaali, *Heronin ja Brahmaguptan kaavoista*, http://solmu.math.helsinki.fi/2011/2/heron.pdf

[3] Matti Lehtinen, Jorma Merikoski, Timo Tossavainen, *Johdatus tasogeometriaan*, WSOY 2007.

[4] Yngve Lehtosaari, Jarkko Leino, Pekka Norlamo, *Laaja matematiikka 2, kurssit 5–8*, Kirjayhtymä 1983.

[5] http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/kirjallisuus/trig.pdf

[6] http://solmu.math.helsinki.fi/2011/maol.pdf

[7] http://solmu.math.helsinki.fi/2011/MAOLvastaus.pdf

[1] Klaudios Ptolemaios, (n.85–n.165), kreikkalainen astronomi.