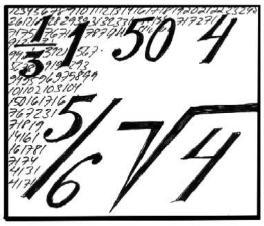

Tuomaksen tehtäviä

Tuomas Korppi

Reaalilukujen järjestelmä tavanomaisine laskutoimituksineen on kaikille tuttu, mutta voidaanko reaaliluvuille määritellä muita laskutoimituksia niin, että tutut laskulait säilyvät, eli hienommin sanottuna saadaan kunta? Tämänkertaisissa tehtävissä pohdimmekin, voidaanko kunnan yhteenlaskuksi valita reaalilukujen kertolasku.

Hiukan teoriaa

Jos K on joukko, periaatteessa mitä tahansa funktiota $K \times K \to K$ voidaan pitää laskutoimituksena joukossa K. Meille tutut laskutoimitukset kuitenkin tottelevat erilaisia laskulakeja, esimerkkinä vaikkapa se, että reaaliluvuille pätee

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Abstraktissa algebrassa tutkitaankin yleensä sellaisia rakenteita, joiden laskutoimitukset toteuttavat erilaisia laskulakeja. Eräs tällainen rakenne on kunta, jonka määrittelemme seuraavaksi.

Viisikko $(K, \oplus, \otimes, \mathbb{O}, \mathbb{I})$ on kunta, jos K on joukko, $\oplus\colon K \times K \to K$, $\otimes\colon K \times K \to K$, ja $\mathbb{O}, \mathbb{I} \in K$, sekä seuraavat aksioomat pätevät.

1. $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ kaikilla $a, b, c \in K$.
2. $\mathbb{O} \oplus a = a$ kaikilla $a \in K$.
3. Kaikilla $a \in K$ on olemassa $b \in K$, jolle $a \oplus b = \mathbb{O}$.
4. $a \oplus b = b \oplus a$ kaikilla $a, b \in K$.
5. $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ kaikilla $a, b, c \in K$.
6. $\mathbb{I} \otimes a = a$ kaikilla $a \in K$.
7. Kaikilla $a \in K$, $a \neq \mathbb{O}$, on olemassa $b \in K$, jolle $a \otimes b = \mathbb{I}$.
8. $a \otimes b = b \otimes a$ kaikilla $a, b \in K$.
9. $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ kaikilla $a, b, c \in K$.
10. $\mathbb{O} \neq \mathbb{I}$.

Kunnassa on siis määritelty yhteen- ja kertolaskut sekä ykkös- ja nolla-alkiot, jotka tottelevat tavanomaisia laskulakeja. Aksiooman 3 nojalla kaikilla alkioilla on myös vasta-alkio sekä aksiooman 7 nojalla kaikilla nollasta eroavilla alkioilla on käänteisalkio.

Tuttuja kuntia ovat rationaalilukujen kunta, reaalilukujen kunta ja kompleksilukujen kunta, tavallisilla laskutoimituksillaan ja nolla- ja ykkösalkioilla varustettuna. Kunta on kuitenkin määritelty abstraktisti niin, että mikä tahansa joukko, joka on varustettu aksioomat toteuttavilla laskutoimituksilla ja nolla- ja ykkösalkioilla on kunta. On esimerkiksi olemassa kahden alkion kunta, jonka ainoat alkiot ovat $\mathbb{O}$ ja $\mathbb{I}$ ja jossa $\mathbb{O} \oplus \mathbb{I} = \mathbb{I} \oplus \mathbb{O} = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} = \mathbb{I}$ ja $\mathbb{O} \oplus \mathbb{O} = \mathbb{I} \oplus \mathbb{I} = \mathbb{O} \otimes \mathbb{O} = \mathbb{O} \otimes \mathbb{I} = \mathbb{I} \otimes \mathbb{O} = \mathbb{O}$.

Liitteessä annetaan lisää esimerkkejä kunnista. Voit lukaista liitteen tässä välissä, tai siirtyä suoraan tehtäviin.

Tehtävät

Tehtäviin 2–5 vaaditaan paitsi vastaus, myös sen todistus. Tehtävät on pisteytetty, joten voit kokeilla, monenko pisteen edestä saat tehtäviä ratkaistua. Joihinkin tehtäviin on myös vihjeitä, jotka helpottavat tehtävää, mutta vähentävät pistesaalista. Jos luet viiden pisteen vihjeen, saat tehtävästä vain viisi pistettä. Jos luet kolmen pisteen vihjeen, saat tehtävästä vain kolme pistettä, ja jos luet yhden pisteen vihjeen, saat vain yhden pisteen.

Kunnassa voidaan laskea aika pitkälle samalla tavoin kuin reaaliluvuillakin. Seuraavassa tehtävässä johdamme hiukan lisää laskulakeja.

Tehtävä 1 *(1 piste)*

Olkoon $(K, \oplus, \otimes, \mathbb{O}, \mathbb{I})$ *kunta. Todista seuraavat väitteet:*

1. *Jos* $a, b, c \in K$, *pätee* $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$.
2. *Jos* $a, b \in K$, *ja* $a \oplus b = \mathbb{O}$, *niin myös* $b \oplus a = \mathbb{O}$.
3. *Jos* $a, b \in K$, *ja* $a \otimes b = \mathbb{I}$, *niin myös* $b \otimes a = \mathbb{I}$.
4. *Jos* $a \in K$, $a \oplus \mathbb{O} = a$.
5. *Jos* $a \in K$, $a \otimes \mathbb{I} = a$.

Lopuissa tehtävissä pohdimme, onko olemassa kuntarakenteita, joissa reaalilukujen kertolasku on kunnan yhteenlasku.

Jos et saa seuraavaa tehtävää tehtyä, on alla yhden pisteen vihje.

Tehtävä 2 *(3 pistettä)*

Olkoon $\oplus \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \oplus b = ab$ *ja* $\mathbb{O} = 1$. *Onko olemassa paria* $(\otimes, \mathbb{I})$ *siten, että* $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes, \mathbb{O}, \mathbb{I})$ *on kunta?*

Jos et saa seuraavaa tehtävää tehtyä, on alla viiden pisteen vihje, kolmen pisteen vihje ja yhden pisteen vihje.

Tehtävä 3 *(7 pistettä)*

Olkoon $\oplus \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, a \oplus b = ab$ *ja* $\mathbb{O} = 1$. *Onko olemassa paria* $(\otimes, \mathbb{I})$ *siten, että* $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \oplus, \otimes, \mathbb{O}, \mathbb{I})$ *on kunta?*

Jos et saa seuraavaa tehtävää tehtyä, on alla yhden pisteen vihje.

Tehtävä 4 *(3 pistettä)*

Olkoon $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. *Olkoon* $\oplus \colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, a \oplus b = ab$ *ja* $\mathbb{O} = 1$. *Olkoon lisäksi* $\otimes \colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, a \otimes b = a^b$. *Onko olemassa alkiota* $\mathbb{I}$ *siten, että* $(\mathbb{R}_+, \oplus, \otimes, \mathbb{O}, \mathbb{I})$ *on kunta?*

Jos et saa seuraavaa tehtävää ratkaistua, on alla viiden pisteen vihje, kolmen pisteen vihje ja yhden pisteen vihje.

Tehtävä 5 *(7 pistettä)*

Olkoon $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. *Olkoon* $\oplus \colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, a \oplus b = ab$ *ja* $\mathbb{O} = 1$. *Onko olemassa paria* $(\otimes, \mathbb{I})$ *siten, että* $(\mathbb{R}_+, \oplus, \otimes, \mathbb{O}, \mathbb{I})$ *on kunta?*

Viiden pisteen vihjeet

(3) Ei ole.

(5) Kyllä on.

Kolmen pisteen vihjeet

(3) Todista ensin seuraavat kaksi lemmaa.

Lemma 1 *Olkoon* $(K, \oplus, \otimes, \mathbb{O}, \mathbb{I})$ *kunta. Tällöin* $\mathbb{O} \otimes x = \mathbb{O}$ *kaikilla kunnan alkioilla* $x \in K$.

Lemma 2 *Olkoon* $(K, \oplus, \otimes, \mathbb{O}, \mathbb{I})$ *kunta, jossa* $\mathbb{I} \oplus \mathbb{I} \neq \mathbb{O}$. *Olkoon* $x \in K$. *Tällöin on olemassa* $y \in K$, *jolle* $y \oplus y = x$.

(5) Tutki funktiota $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, f(x) = e^x$. Se on bijektio, ja pätee $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$, sekä $f(0) = \mathbb{O}$.

Yhden pisteen vihjeet

(2) Ei ole.

(3) Kolmen pisteen vihjeen Lemman 1 todistuksessa on hyödyllistä pohtia alkiota $(\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \otimes x$.

Todista, että kolmen pisteen vihjeen Lemmassa 2 voidaan valita y seuraavasti: Olkoon b sellainen, että $(\mathbb{I} \oplus \mathbb{I}) \otimes b = \mathbb{I}$. Nyt $y = x \otimes b$.

Jotta pääset käyttämään Lemmaa 2 tehtävän ratkaisussa, tee vastaoletus ja tutki tuloa $(\mathbb{I} \oplus \mathbb{I}) \otimes a$, missä $a > 1$.

(4) Ei ole.

(5) Olkoon f kuten kolmen pisteen vihjeessä. Yritä määritellä $\otimes$ niin, että pätee $f(xy) = f(x) \otimes f(y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

Ratkaisut

(1) Näytämme kohdan 1. Muut ovat samankaltaisia, mutta helpompia. $(a \oplus b) \otimes c = c \otimes (a \oplus b) = (c \otimes a) \oplus (c \otimes b) = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$.

(2) Ei ole. Tehdään vastaoletus: Pari $(\otimes, \mathbb{I})$ on olemassa. Aksiooman 3 nojalla on olemassa $b \in \mathbb{R}$, jolle $0 \oplus b = \mathbb{O}$. Mutta nyt $0b = 1$, mikä ei päde millään $b \in \mathbb{R}$. Ristiriita.

(3) Todistetaan ensin kolmen pisteen vihjeessä annetut lemmat:

Lemma 1: $\mathbb{O} \otimes x = (\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \otimes x = (\mathbb{O} \otimes x) \oplus (\mathbb{O} \otimes x)$.

On olemassa b siten, että $(\mathbb{O} \otimes x) \oplus b = \mathbb{O}$. Siis $\mathbb{O} = (\mathbb{O} \otimes x) \oplus b = ((\mathbb{O} \otimes x) \oplus (\mathbb{O} \otimes x)) \oplus b = (\mathbb{O} \otimes x) \oplus ((\mathbb{O} \otimes x) \oplus b) = \mathbb{O} \otimes x$.

Lemma 2: Olkoon b sellainen, että $(\mathbb{I} \oplus \mathbb{I}) \otimes b = \mathbb{I}$. Nyt $(x \otimes b) \oplus (x \otimes b) = x \otimes (b \oplus b) = x \otimes ((\mathbb{I} \otimes b) \oplus (\mathbb{I} \otimes b)) = x \otimes ((\mathbb{I} \oplus \mathbb{I}) \otimes b) = x \otimes \mathbb{I} = x$.

Nyt ratkaistaan itse tehtävä, eli osoitetaan, että vaadittua paria ei ole olemassa.

Tehdään vastaoletus: Pari $(\otimes, \mathbb{I})$ on olemassa.

Olkoon $a > 1$. Nyt $(\mathbb{I} \oplus \mathbb{I}) \otimes a = (\mathbb{I} \otimes a) \oplus (\mathbb{I} \otimes a) = a \oplus a = a^2 \neq 1 = \mathbb{O}$. Siis Lemman 1 nojalla $(\mathbb{I} \oplus \mathbb{I}) \neq \mathbb{O}$.

Olkoon $x < 0$. Lemman 2 nojalla on olemassa $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, jolle $y \oplus y = x$, eli $yy = x$. Tämä on kuitenkin ristiriita sen kanssa, että negatiivisilla luvuilla ei ole neliöjuurta.

(4) $a \otimes b = b \otimes a$ ei päde. Esimerkiksi $2^3 \neq 3^2$. Myöskään $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$ ei päde. Esimerkiksi $2^{2^3} = 256$, mutta $(2^2)^3 = 64$.

(5) Osoitetaan, että vaadittu pari on olemassa. Tutkitaan funktiota $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, f(x) = e^x$. Se on bijektio, ja lisäksi pätee $f(x + y) = e^x e^y = f(x) \oplus f(y)$ sekä $f(0) = \mathbb{O}$.

Määritellään $x \otimes y = f(f^{-1}(x) f^{-1}(y)) = e^{(\ln x)(\ln y)}$, sekä $\mathbb{I} = e$.

Nyt pätee $f(1) = \mathbb{I}$. Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$ annettuja, ja merkitään $a = f(x), b = f(y)$. Nyt $a \otimes b = f(f^{-1}(a) f^{-1}(b))$, eli $f(x) \otimes f(y) = f(xy)$.

Nyt kaikki aksioomat voidaan todistaa helposti, kaikki samaa strategiaa käyttäen. Todistamme esimerkkinä aksioomat 9 ja 7.

Ensin 9:

Olkoon $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Olkoot $x, y, z \in \mathbb{R}$ sellaiset, että $f(x) = a, f(y) = b$ ja $f(z) = c$

Nyt $a \otimes (b \oplus c) = f(x) \otimes (f(y) \oplus f(z)) = f(x) \otimes f(y + z) = f(x(y + z)) = f(xy + xz) = f(xy) \oplus f(xz) = (f(x) \otimes f(y)) \oplus (f(x) \otimes f(z)) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$.

Sitten 7:

Olkoon $a \in \mathbb{R}_+$, $a \neq \mathbb{O}$, annettu. Olkoon $x \in \mathbb{R}$ sellainen, että $f(x) = a$. Koska $f(0) = \mathbb{O}$ ja f on bijektio, $x \neq 0$. Nyt on olemassa $y \in \mathbb{R}$, jolle $xy = 1$. Siis $\mathbb{I} = f(1) = f(xy) = f(x) \otimes f(y) = a \otimes f(y)$. Siis on olemassa $b = f(y)$, jolle $a \otimes b = \mathbb{I}$.

Liite

Esimerkki 1

Tämä esimerkki vaatii hiukan esitietoja lukuteoriasta.

Olkoon p alkuluku. Jos $a \in \mathbb{Z}$, määritetään a:n ekvivalenssiluokka $[a] = \{b \in \mathbb{Z} \mid a \equiv b \mod p\}$. Olkoon $a, b \in \mathbb{Z}$. Havaitaan, että $[a] = [b]$ jos ja vain jos $a \equiv b \mod p$.

Merkitään $\mathbb{Z}_p = \{[a] \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Havaitaan, että $\mathbb{Z}_p = \{[0], [1], \ldots, [p-1]\}$, eli $\mathbb{Z}_p$:ssä on p alkiota.

Jos $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $a \equiv b \mod p$ ja $c \equiv d \mod p$, pätee myös $a + c \equiv b + d \mod p$ ja $ac \equiv bd \mod p$. Siis, jos $[a] = [b]$ ja $[c] = [d]$, pätee myös $[a + c] = [b + d]$ ja $[ac] = [bd]$. Näin ollen voidaan määritellä ekvivalenssiluokkien joukossa laskutoimitukset $\oplus\colon \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, $[x] \oplus [y] = [x + y]$ ja $\otimes\colon \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, $[x] \otimes [y] = [xy]$. Merkitään $\mathbb{O} = [0]$ ja $\mathbb{I} = [1]$.

Nähdään helposti, että $(\mathbb{Z}, +, \times, 0, 1)$ toteuttaa kaikki muut kunta-aksioomat, paitsi aksiooma 7 ei toteudu.

Nyt voidaan todistaa helposti, että $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \otimes, \mathbb{O}, \mathbb{I})$ toteuttaa kaikki kunta-aksioomat paitsi aksiooma 7, johon palaamme hetken päästä. Kaikki muut aksioomat todistetaan samalla strategialla. Näytämme esimerkkinä aksiooman 9. Olkoot $[a], [b], [c] \in \mathbb{Z}_p$. Nyt $[a] \otimes ([b] \oplus [c]) = [a] \otimes ([b + c]) = [a(b + c)] = [ab + ac] = [ab] \oplus [ac] = ([a] \otimes [b]) \oplus ([a] \otimes [c])$. Toisena esimerkkinä näytämme aksiooman 3. Olkoon $[a] \in \mathbb{Z}_p$. Nyt $a + (-a) = 0$, joten $[a] \oplus [-a] = [a + (-a)] = [0] = \mathbb{O}$.

Olkoon $[a] \in \mathbb{Z}_p$, $[a] \neq \mathbb{O}$. Nyt a ei ole jaollinen p:llä, joten Fermat'n pienen lauseen nojalla $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$. Siis $[a] \otimes [a^{p-2}] = [a^{p-1}] = [1] = \mathbb{I}$. Siis $[a]$:lla on käänteisalkio $[a^{p-2}]$, ja aksiooma 7 toteutuu.

Siis $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \otimes, \mathbb{O}, \mathbb{I})$ on kunta.

Esimerkki 2

Haluamme määritellä rationaalifunktioiden joukon. Nämä ovat funktioita, jotka saadaan kahden polynomin osamääränä. Koska nimittäjäpolynomilla voi olla nollakohtia, emme voi määritellä rationaalifunktioita koko $\mathbb{R}$:ssa. Näin ollen annamme seuraavan määritelmän.

Olkoon

$$K' = \{f\colon \mathbb{R}\setminus A \to \mathbb{R} \mid A \subset \mathbb{R} \text{ on äärellinen ja on olemassa reaalikertoimiset polynomit } P, Q, \text{ joille } f(x) = P(x)/Q(x) \text{ aina, kun } f(x) \text{ on määritelty.}\}$$

Määritellään joukossa K' yhteen- ja kertolaskut $\oplus\colon K'\times K' \to K'$, $\otimes\colon K'\times K'\to K'$ seuraavasti: Olkoot $f, g \in K'$. Asetetaan $(f\oplus g)(x) = f(x)+g(x)$ aina, kun sekä $f(x)$ että $g(x)$ ovat määriteltyjä, ja $(f\otimes g)(x) = f(x)g(x)$ aina, kun sekä $f(x)$ että $g(x)$ ovat määriteltyjä. Määritellään $\mathbb{O}'$ vakiofunktioksi $\mathbb{O}'(x) = 0$ kaikilla $x\in\mathbb{R}$ ja $\mathbb{I}'$ vakiofunktioksi $\mathbb{I}'(x) = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Havaitaan helposti, että $(K', \oplus, \otimes, \mathbb{O}', \mathbb{I}')$ toteuttaa kaikki muut kunta-aksioomat, paitsi ei aksioomia 3 ja 7. Kaikki muut aksioomat näytetään samalla tavalla. Näytämme esimerkkinä aksiooman 9.

Olkoot $f, g, h \in K'$. Aina, kun f, g, h ovat määriteltyjä pisteessä x, pätee $(f\otimes(g\oplus h))(x) = f(x)(g\oplus h)(x) = f(x)(g(x)+h(x)) = f(x)g(x)+f(x)h(x) = (f\otimes g)(x)+(f\otimes h)(x) = ((f\otimes g)\oplus(f\otimes h))(x)$. Koska funktiot $f\otimes(g\oplus h)$ ja $(f\otimes g)\oplus(f\otimes h)$ on määritelty samoissa pisteissä (ts. aina kun kaikki funktioista f, g, h ovat määriteltyjä), ja ne ovat samoja kaikissa pisteissä, joissa ne on määritelty, $f\otimes(g\oplus h) = (f\otimes g)\oplus(f\otimes h)$.

Rationaalifunktioilla

$$\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$$

ja

$$\frac{1}{x-1}$$

on ainoastaan se ero, että ensimmäinen ei ole määritelty pisteessä -1. Haluamme kuitenkin ajatella, että nämä ovat sama funktio. Kun tällainen tilanne kohdataan matematiikassa, yleensä muodostetaan ekvivalenssiluokaksi kutsuttu joukko, johon laitetaan kaikki ne oliot, joita halutaan kohdella samoina. Tämän jälkeen jatkossa pelataan ekvivalenssiluokkien joukolla. Näin ollen annamme seuraavat määritelmät:

Olkoon $f \in K'$. Määritellään $[f] = \{g \in K' \mid g(x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}\setminus A, A \subset \mathbb{R}$ on äärellinen$\}$. Olkoon $K = \{[f] \mid f \in K'\}$.

Havaitaan, että jos $[f] = [f']$ ja $[g] = [g']$, niin myös $[f\oplus g] = [f'\oplus g']$ ja $[f\otimes g] = [f'\otimes g']$. Näin ollen voidaan K:ssa määritellä laskutoimitukset $\oplus\colon K\times K\to K$ ja $\otimes\colon K\times K \to K$, $[f]\oplus[g] = [f\oplus g]$ ja $[f]\otimes[g] = [f\otimes g]$. Määritellään $\mathbb{O} = [\mathbb{O}']$ ja $\mathbb{I} = [\mathbb{I}']$.

Siitä, että $(K', \oplus, \otimes, \mathbb{O}', \mathbb{I}')$ toteuttaa kaikki kunta-aksioomat paitsi 3 ja 7, seuraa helposti, että myös $(K, \oplus, \otimes, \mathbb{O}, \mathbb{I})$ toteuttaa nämä aksioomat. Näytämme esimerkkinä aksiooman 9. Olkoon $[f], [g], [h] \in K$. Nyt $[f]\otimes([g]\oplus[h]) = [f]\otimes([g\oplus h]) = [f\otimes(g\oplus h)] = [(f\otimes g)\oplus(f\otimes h)] = [f\otimes g]\oplus[f\otimes h] = ([f]\otimes[g])\oplus([f]\otimes[h])$.

$(K, \oplus, \otimes, \mathbb{O}, \mathbb{I})$ toteuttaa myös aksioomat 3 ja 7. Näytämme aksiooman 7. Aksiooma 3 on samankaltainen mutta helpompi.

Olkoon $[f] \in K$, $[f] \neq \mathbb{O}$. Siis lukuunottamatta äärellistä pistejoukkoa $f(x) = P(x)/Q(x)$, missä P ja Q ovat polynomeja, ja P, Q eivät ole identtisesti nolla. Siis P:llä on vain äärellinen määrä nollakohtia. Nyt voidaan muodostaa g, $g(x) = Q(x)/P(x)$, joka on määritelty aina, kun $P(x)$ on erisuuri kuin nolla, eli kaikkialla äärellistä määrää pisteitä lukuunottamatta. Siis $g \in K'$ ja $[g] \in K$. Nyt $f(x)g(x) = 1$ aina, kun $f(x), g(x)$ ovat määriteltyjä. Siis $[f]\otimes[g] = [f\otimes g] = \mathbb{I}$. Siis aksiooma 7 toteutuu.