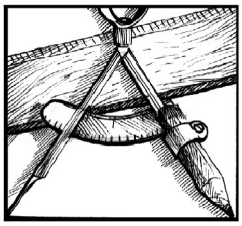


Induktio, ympyrä, kartio ja pallo

Markku Halmetoja
Mäntän lukio

Ympyrän ja pallon pinta-ala sekä pallon ja kartion tilavuus jäävät koulussa ulkoa opituiksi kaavoiksi lukion integraalilaskennan kurssiin asti. Kartion tilavuutta tosin voidaan havainnollistaa äyskäröimällä kolme kartiollista vettä vastaavaan lieriöön, mutta tämä todistus ei ole ”vedenpitävä”; se voidaan tehdä vain äärelliselle määrälle kartioita mittaustarkkuuden rajoissa. Nämä asiat voitaisiin kuitenkin kohtuullisen helposti käsitellä jo peruskoulussa eriyttävänä oppiaineksena. Seuraavassa kerrotaan miten se tehdään. Esitys perustuu kahteen erittäin vanhaan aritmeettiseen totuuteen, ja pohjatietoina tarvitaan lisäksi suoran lieriön tilavuus, yhdenmuotoisuusopin alkeet sekä Pythagoraan lause.

Aritmetiikalla ei aluksi näyttäisi olevan yhtymäkohtaa mainittuihin geometrisiin objekteihin, mutta yhteys paljastuu tekemisen myötä. Ilmiö on matematiikassa varsin yleinen. Monia matematiikan aloja on vuosikymmeniäkin kehitelty toisistaan riippumatta, kunnes joku on löytänyt niiden välille yllättävän yhteyden. Pienemmässä mittakaavassa tämä nähdään myös koulumatematiikassa: aikaisemmin opittuja asioita putkahtelee tavantakaa esiin uusia asioita käsiteltäessä. Siksi täytyy kaikkeen matematiikassa opittuun suhtautua tietyllä kunnioituksella.

Induktio

Olet varmaankin nähnyt uutislähetyksen kevennysosassa japanilaisten opiskelijoiden pystyttävän muutamia miljoonia dominopalikoita jonoon, minkä jälkeen he kaatavat jonon ensimmäisen palikan, jolloin kaikki palikat kaatuvat yksitellen. Näillä tempauksilla yritetään päästä Guinnessin ennätysten kirjaan ja päästäänkin, mikäli saadaan palikoita kaatumaan enemmän kuin muut ovat aikaisemmin saaneet. Matematiikassa on mahdollista kuitenkin pistää paljon paremmaksi, sillä voimme ensimmäisen palikan avulla kaataa äärettömän monta seuraavaa palikkaa. Kaatamismenetelmää kutsutaan *matemaattiseksi induktioksi* tai lyhyesti vain induktioksi. Sen juoni selviää seuraavasta esimerkistä.

Esimerkki. Todistettava, että kokonaislukujen summa

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1). \tag{1}$$

Tutkitaan yhtälöä (1) aluksi pienillä n:n arvoilla. Esimerkiksi

$$S_1 = 1 = \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) \quad \text{ja}$$
$$S_2 = 1 + 2 = \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2+1),$$

joten väite on tosi n:n arvoilla 1 ja 2. Tämä havainto vastaa ensimmäisen ja toisenkin palikan kaatumista. Miten sitten loput palikat saadaan nurin? Osoittamalla, että jos väite on tosi arvolla $n = k$, niin sen seurauksena se on tosi myös arvolla $n = k + 1$. Kutsutaan tätä toistaiseksi *kaatumissäännöksi.* Nyt voidaan päätellä seuraavasti: Koska väite kokeilun perusteella on tosi arvolla $n = 2$, niin kaatumissäännön perusteella se on tosi myös arvolla $n = 2 + 1 = 3$. Koska väite nyt *tiedetään todeksi* arvolla $n = 3$, niin se kaatumissäännön mukaan on tosi myös arvolla $n = 3 + 1 = 4$. Näin voidaan jatkaa loputtomiin. Siis kaikki palikat kaatuvat, eli yhtälö on tosi kaikilla n:n positiivisilla kokonaislukuarvoilla.

Kaatumissäännön oikea nimi on *induktioaskel* ja se täytyy vielä todistaa, jotta tämä ajatusrakennelma olisi aukoton. Oletetaan siis, että väite on tosi arvolla $n = k$, jolloin

$$S_k = 1 + 2 + \ldots + k = \tfrac{1}{2}k(k+1).$$

Nyt

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) \\ &= \tfrac{1}{2}k(k+1) + (k+1) \\ &= (k+1)\left(\tfrac{1}{2}k + 1\right) \\ &= \tfrac{1}{2}(k+1)(k+2) \\ &= \tfrac{1}{2}(k+1)\big((k+1)+1\big), \end{aligned}$$

eli väite on tosi myös arvolla $n = k + 1$. Induktioaskel on näin todistettu.

Positiivisten kokonaislukujen neliöille on voimassa hieman hankalamman näköinen yhtälö

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \qquad (2)$$

jota myös tarvitsemme jatkossa. Puhtaasti esteettisistä syistä mainittakoon vielä kolmaskin:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2. \qquad (3)$$

Todistamalla yhtälöt (2) ja (3) opit induktion. Se kannattaa tehdä, sillä kyseessä on yksi tärkeimmistä matematiikan todistusmenetelmistä. Induktiosta kerrotaan myös kirjoituksessa [1].

Ympyrä

Kaikki ympyrät ovat keskenään yhdenmuotoisia, joten kahdessa annetussa ympyrässä vastinpituuksien suhde on vakio. Jos siis kehät ovat p ja p' ja halkaisijat d ja d', niin on voimassa verranto

$$\frac{d}{d'} = \frac{p}{p'}$$

joka p'/d:llä kertomalla tulee muotoon

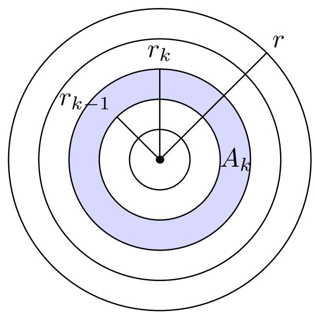
$$\frac{p'}{d'} = \frac{p}{d}.$$

Kehän ja halkaisijan suhde yhdessä ympyrässä on sama kuin toisessa ympyrässä, eli tämä suhde on ympyrän koosta riippumaton luku. Se merkitään kreikkalaisella kirjaimella π, ja sen kaksidesimaalinen likiarvo on 3,14. Siis, jos ympyrän kehä ja halkaisija ovat p ja d, niin

$$\frac{p}{d} = \pi.$$

Tästä seuraa, että $p = \pi d$, ja koska $d = 2r$, edelleen $p = 2\pi r$. Tämä puhtaasti geometriseen päättelyyn pohjautuva ympyrän kehän pituuden perustelu voidaan täsmentää analyyttisesti vasta yliopisto-opinnoissa.

Miten lasketaan r-säteisen ympyrän pinta-ala? Tutkaillaan aluksi kuviossa näkyviä sisäkkäisiä renkaita, joiden kehät jakavat säteen n:ään



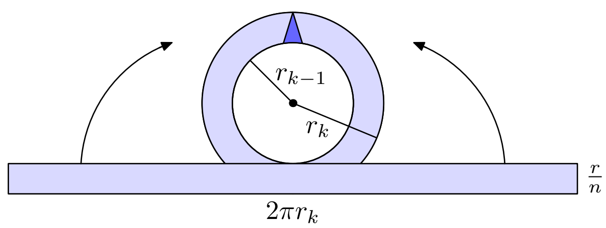
yhtäsuureen osaan. Jokaisessa renkaassa sisä- ja ulkokehän välinen etäisyys on siten $\frac{r}{n}$. Ympyrän pinta-ala on renkaiden pinta-alojen summa:

$$A_{\odot} = A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$$

Arvioimalla renkaiden pinta-aloja saamme arvion myös ympyrän pinta-alasta. Kuviossa tummennettuna näkyvän k:nnen renkaan sisä- ja ulkosäteet ovat

$$r_{k-1} = \frac{(k-1)}{n}\,r \quad \text{ja} \quad r_k = \frac{k}{n}\,r.$$

Sisä- ja ulkokehän pituudet ovat $2\pi r_{k-1}$ ja $2\pi r_k$. Kun ulkokehän pituinen suorakulmio, jonka korkeus on $\frac{r}{n}$, kierretään renkaan päälle, se peittää sen



täysin, ja osa peittyy kuvion osoittamalla tavalla kahteen kertaan. Suorakulmion pinta-ala on suurempi kuin renkaan pinta-ala, ja kaikkien näiden suorakulmioiden pinta-alojen summa on siksi suurempi kuin ympyrän pinta-ala. Yhteenlaskettavat suorakulmioiden pinta-alat sievenevät muotoon

$$2\pi r_k\,\frac{r}{n} = 2\pi\,\frac{k}{n}\,r\,\frac{r}{n} = \frac{2\pi r^2}{n^2}\,k,$$

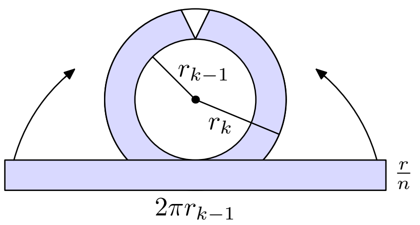
missä $k = 1, 2, \ldots, n$, ja niiden summa

$$\frac{2\pi r^2}{n^2}\,\big(1 + 2 \ldots + n\big) = \frac{2\pi r^2}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} = \pi r^2\,\big(1 + \frac{1}{n}\big).$$

Ympyrän pinta-alalle saadaan siis yläraja

$$A_{\odot} < \pi r^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right). \tag{4}$$

Kun sisäkehän pituinen suorakulmio, jonka korkeus on $\frac{r}{n}$, kierretään



renkaan päälle, se ei peitä sitä täysin, vaan jää kuvion osoittamalla tavalla vajaaksi. Suorakulmion pinta-ala on pienempi kuin renkaan pinta-ala, ja kaikkien näiden suorakulmioiden pinta-alojen summa on siksi pienempi kuin ympyrän pinta-ala. Yhteenlaskettavat suorakulmioiden pinta-alat sievenevät muotoon

$$2\pi r_{k-1}\,\frac{r}{n} = 2\pi\,\frac{(k-1)}{n}\,r\,\frac{r}{n} = \frac{2\pi r^2}{n^2}\,(k-1),$$

missä $k = 1, 2, \ldots, n$, ja niiden summa

$$\begin{aligned}\frac{2\pi r^2}{n^2}\big(0+1+2\ldots+(n-1)\big) &= \frac{2\pi r^2}{n^2}\,\frac{(n-1)n}{2}\\ &= \pi r^2\left(1-\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Ympyrän pinta-alalle saadaan siis alaraja

$$\pi r^2\left(1-\frac{1}{n}\right) < A_{\odot}. \tag{5}$$

Yhdistämällä epäyhtälöt (4) ja (5) saamme kaikilla n:n positiivisilla kokonaislukuarvoilla voimassaolevan kaksoisepäyhtälön

$$\pi r^2\left(1-\frac{1}{n}\right) < A_{\odot} < \pi r^2\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

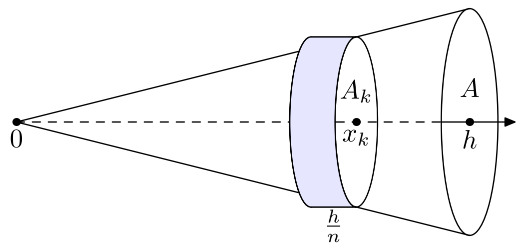
Antamalla n:n kasvaa hyvin suureksi, tulevat kaksoisepäyhtälön vasemmalla ja oikealla puolella olevat πr^2:n kertoimina olevat luvut yhä lähemmäs ja lähemmäs lukua 1. Lukion matematiikassa tämä ilmaistaan niin, että näiden lausekkeiden *raja-arvo* on 1, kun n lähestyy ääretöntä. Ala- ja ylärajalla on siis yhteinen raja-arvo πr^2, kun n kasvaa, ja koska $A_{\odot}$ kaikilla n:n arvoilla on niiden välissä, ei ole muuta mahdollisuutta kuin että

$$A_{\odot} = \pi r^2.$$

Ympyrän pinta-ala on niin tärkeä asia, että aktiivisen lukijan kannattaa miettiä vielä seuraavaa pientä sitä valaisevaa tutkimustehtävää: *Voidaanko ympyrän pinta-ala laskea niin, että ajatellaan renkaat puolisuunnikkaiksi, joiden korkeus on $\frac{r}{n}$ ja kantoina ovat renkaan sisä- ja ulkokehän pituudet? Tällöin ei tarvittaisi ala- ja ylärajoja, vaan pinta-ala saataisiin suoraan laskemalla puolisuunnikkaiden alat yhteen. Jos tämä onnistuu, niin kuinka moneksi renkaaksi ympyrä pitää jakaa?*

Kartio

Olkoon h kartion korkeus ja A sen pohjan pinta-ala. Kuvion kartio näyttää ympyräpohjaiselta, mutta pohjan muodolla ei ole merkitystä. Kartiota leikkaava pohjan suuntainen taso erottaa siitä kärjen puolelle alkuperäisen kartion kanssa yhdenmuotoisen kartion. Niiden pohjat ovat yhdenmuotoisia



tasokuvioita, joiden pinta-alojen suhde on vastinpituuksien, esimerkiksi korkeusjanojen, suhteen neliö. Jaetaan korkeusjana pohjan suuntaisilla tasoilla n:ään yhtäsuureen osaan. Kohdassa $x_k = \frac{k}{n}h$ olevan leikkauskuvion pinta-alan A_k ja pohjan pinta-alan A suhde on siis

$$\frac{A_k}{A} = \left(\frac{kh}{n} : h\right)^2 = \left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

Tästä seuraa

$$A_k = A\left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

Kohdassa x_k olevan lieriön tilavuus on

$$A_k\frac{h}{n} = A\frac{k^2}{n^2}\,\frac{h}{n} = \frac{Ah}{n^3}k^2, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Koska kartio jää näiden lieriöiden yhdessä muodostaman kappaleen sisään, on lieriöiden tilavuuksien summa kartion tilavuutta suurempi. Siis

$$\begin{aligned}V_{\text{kartio}} &< \frac{Ah}{n^3}\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)\\ &= \frac{Ah}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{Ah}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

joten saamme kartion tilavuudelle ylärajan

$$V_{\text{kartio}} < \frac{Ah}{6}\left(2+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n}\right). \tag{1}$$

Aktiivinen lukija voi samalla tavalla johtaa kartion sisään jäävien lieriöiden tilavuuksien summasta kartion tilavuudelle alarajan

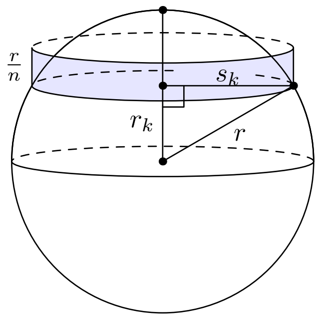
$$\frac{Ah}{6}\left(2+\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n}\right) < V_{\text{kartio}}, \tag{2}$$

ja päätellä näin saatujen epäyhtälöiden (1) ja (2) avulla, että

$$V_{\text{kartio}} = \tfrac{1}{3}Ah.$$

Pallo

Pallon tilavuuden määrittämiseksi leikataan sitä yhdensuuntaisilla tasoilla niin, että säde r jakaantuu n:ään yhtäsuureen osaan. Kuvioon



merkittyjen tietojen avulla aktiivinen lukija osaa nyt itsenäisesti johtaa pallon tilavuudelle alarajan

$$2\pi r^3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6n^2}-\frac{1}{2n}\right) < V_{\text{pallo}}$$

ja ylärajan

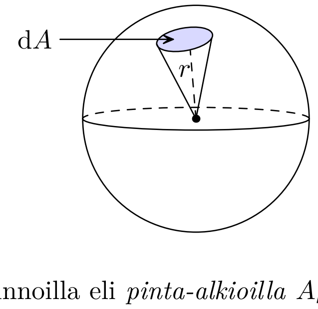
$$V_{\text{pallo}} < 2\pi r^3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6n^2}+\frac{1}{2n}\right),$$

ja päätellä niiden perusteella, että

$$V_{\text{pallo}} = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Pallon pinta-ala voidaan määrittää täsmällisesti matemaattisen analyysin keinoin vasta yliopisto-opinnoissa. Seuraava kuvaileva esitys on laadittu kirjan [4] pohjalta.

Pallon pinta-alan laskemiseksi peitetään se pallon kokoon nähden



pienillä osapinnoilla eli *pinta-alkioilla* A_k, joiden summa

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = A_{\text{pallo}}.$$

Pinta-alkioita ajatellaan itse asiassa olevan äärettömän monta, jolloin niitä merkitään symbolisesti dA ja niiden summaa venytetyllä S-kirjaimella:

$$\int_{\text{pallo}} \mathrm{d}A = A_{pallo}.$$

Kahdella pinta-alkiolla saattaa olla yhteisiä reunapisteitä, mutta ei yhteisiä sisäpisteitä. Kun pinta-alkion dA reunapisteet yhdistetään pallon keskipisteeseen, saadaan kartio, jonka pohjan pinta-ala on dA ja korkeus on r . Tällaisen *tilavuusalkion* tilavuus on noin $\mathrm{d}V = \frac{r}{3}\mathrm{d}A$. Likimääräisyys johtuu siitä, että pinta-alkiot eivät ole tasomaisia. Jos ne kuitenkin ovat hyvin pieniä, niin niiden tulkitseminen tasomaisiksi aiheuttaa vain olemattoman virheen. Pallon tilavuus on näiden tilavuusalkioiden summa:

$$V_{\text{pallo}} = \int_{\text{pallo}} \mathrm{d}V = \frac{r}{3}\int_{\text{pallo}} \mathrm{d}A = \frac{r}{3}A_{\text{pallo}},$$

mistä seuraa, että

$$A_{\text{pallo}} = 4\pi r^2.$$

Lopuksi

Nähdyt esimerkit, tai oikeammin niiden tässä nähty käsittely, kuuluvat integraalilaskennan esihistoriaan. Jo Arkhimedes[1] päätteli pinta-aloja ja tilavuuksia periaatteessa samalla tavalla, mutta puhtaasti geometrisin käsittein. Pari muunnelmaa hänen esittämästään ympyrän pinta-alan todistuksesta löytyy kirjasta [3, s. 179] ja kirjoituksesta [2]. Nykyaikaisen integraalilaskennan perusteet julkaisi ensimmäisenä Leibniz[2] vuonna 1675. Hän löysi yhteyden käyrän rajoittaman pinta-alan ja käyrää sivuavan suoran määrittämisen välille. Perustellusti voidaan todeta, että se tiede ja teknologia, jonka tänään koemme jokapäiväisessä elämässämme, on pitkälti juuri tuon yksittäisen keksinnön seurausta. Esihistorian tunteminen puolestaan antaa erinomaisen pohjan lukiossa alkavalle integraalilaskennan opiskelulle.

Kiitokset dosentti Heikki Apiolalle rakentavista kommenteista.

Viitteet

[1] `http://solmu.math.helsinki.fi/2008/diplomi/gauss.pdf`

[2] `http://solmu.math.helsinki.fi/2008/diplomi/ylakoulun_geometriaa.pdf`

[3] Teuvo Aittokallio, *Patikkaretkiä matematiikan maisemaan*, Kaarina 2009.

[4] Kalle Väisälä, *Lukion geometria*, WSOY 1966.

[1] Arkhimedes (287–212 eaa.), kreikkalainen matemaatikko.
[2] Gottfried Leibniz (1646–1716), saksalainen matemaatikko ja filosofi.