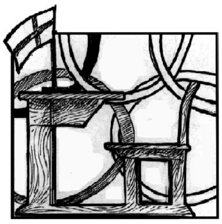


Määrätyn integraalin opettamisesta differentiaalisesti

Kyösti Tarvainen
matematiikan yliopettaja
Metropolia ammattikorkeakoulu

Johdanto

Kirjoituksessa esitetään, miten määrättyjen integraalien lausekkeita johdetaan *differentiaalisesti* tekniikan ja fysiikan sovellutuksissa ja miten tämä menettely perustellaan rationaalisesti. Lukion kirjoissa esitetään sellaisia differentiaalisia johtoja, joissa tarkastellaan "äärettömän pieniä" suureita. Niitä ei kuitenkaan ole tapana käyttää fysiikan tai tekniikan sovellutuksissa. Ammattikorkeakoulun opettajana en myöskään ole nähnyt, että ylioppilas olisi johtanut määrätyn integraalin lausekkeen käyttäen "äärettömän pieniä" suureita. Syynä on varmaan se, että ne ovat niin hämäriä ja pieniä, ettei niihin saa otetta.

Kuten seuraavassa esitetään, differentiaaliset johdot ovat virtaviivaistettuja esityksiä yksityiskohtaisemmista tarkasteluista, joissa määrätyn integraalin lauseke määritetään lähtien liikkeelle likiarvosummista. Siksi differentiaalisen menettelyn hallinta edellyttää sitä, että on johtanut useita integraalilausekkeita yksityiskohtaisten summatarkastelujen kautta. Ne vievät sen verran aikaa, että lukiossa varmaankin tulisi keskittyä niihin ja jättää differentiaaliset tarkastelut ammattikorkeakoulu- ja yliopisto-opintoihin. Nykyisissä yhdysvaltalaisissa calculus-kirjoissakin on yleensä luovuttu differentiaalisista tarkasteluista.

Seuraavassa esitetään ensin, miten määrätty integraali johdetaan yksityiskohtaisesti, ja sitten, miten lyhyemmin differentiaalisesti.

Yksityiskohtainen määrätyn integraalin lausekkeen johtaminen

Määrättyyn integraaliin johtavissa tapauksissa tilanne on yleisesti sanottuna seuraavanlainen. Meidän on laskettava x-akselin väliin $[a, b]$ liittyvän suureen arvo. Vaikeutena on se, että tehtävään liittyy x:stä riippuva funktio $f(x)$, mutta kuitenkin tehtävä on sellainen, että osaamme ratkaista sen siinä tapauksessa, että funktio f on vakio.

Edelleen olkoon tehtävä sellainen, että voimme määrittää laskettavan suureen likiarvon seuraavasti. Jaetaan väli $[a, b]$ n:ään yhtä pitkään osaväliin, joiden pituutta merkitään Δx:llä. Merkitään osavälien alkupisteitä $x_1(= a), x_2, x_3, \ldots, x_n$. Laskettavan suureen arvo k:nnella osavälillä (*kertymä* k:nnella osavälillä) olkoon likimäärin $f(x_k)\Delta x$. Oletetaan edelleen, että laskettavan suureen arvo saadaan summana osavälien kertymistä, joten sille saadaan likiarvo osavälien kertymien likiarvojen summana $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$.

Oletetaan, että geometrisesti tai fysikaalisesti voimme päätellä, että tämä likiarvo lähestyy laskettavan suureen tarkkaa arvoa, kun osavälien lukumäärä n kasvaa rajatta. Tällöin tarkkaa arvoa merkitään määrättynä integraalina $\int_a^b f(x)\,dx$.

Differentiaalisen johtotavan perustelu

Tekniikan ja fysiikan sovellutuksissa ei noudateta yksityiskohtaisesti edellä selostettua menettelyä, koska silloin aina toistuisivat samanlaiset merkinnät ja päättelyt. Lopputulos, muotoa $\int_a^b f(x)\,dx$ oleva lauseke, halutaan saada paperille nopeammin.

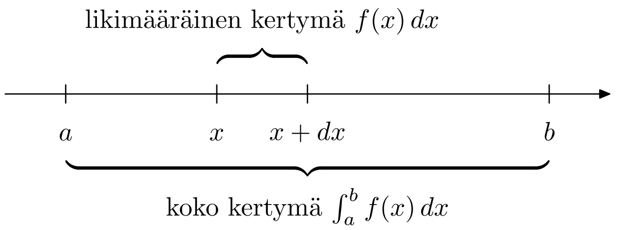
Lopputuloksen alku $\int_a^b$ on aina helppo kirjoittaa tarkasteluvälin perusteella. Loppu dx on myös helppo kirjoittaa. Ainoa ongelma on se, että mikä on funktion $f(x)$ lauseke.

Palataan yksityiskohtaiseen johtoon: mistä ilmestyi lopputuloksen funktio $f(x)$? Vastaus: se oli likiarvolaskussa se funktio, jonka arvolla (osavälin alkupisteessä) kerrottiin osavälin pituus.

Toisin sanoen saamme funktion $f(x)$ selville, kun tarkastelemme mielivaltaista lyhyttä osaväliä ja katsomme, millä sen pituus täytyy kertoa, jotta saamme likiarvon laskettavan suureen kertymälle tällä osavälillä. Tähän perustuu differentiaalinen menettely.

Kuten heti ilmenee, tarkasteltavan mielivaltaisen osavälin alkupistettä kannattaa merkitä x:llä ja välin pituutta dx:llä. Kun määritetään laskettavan suureen likimääräistä kertymää tällä välillä, saadaan selville (jos tapaus ylipäätään johtaa määrättyyn integraaliin), millä dx on kerrottava, jotta saadaan kertymän likiarvo. Näin saadaan likiarvo $f(x)\,dx$, jonka eteen meidän onkin vain lisättävä integraalimerkki, jossa on koko välin rajat.

Perinpohjainen johto on näin typistynyt kahden rivin mittaiseksi. Jotta ymmärtäisi differentiaalisen johdon ja osaisi käyttää sitä, on luonnollisesti ensin käytävä läpi useita yksityiskohtaisia integraalilausekkeiden johtoja. Kuva 1 havainnollistaa differentiaalista tapaa johtaa määrätyn integraalin lauseke.



Kuva 1. Määrätyn integraalin lausekkeen differentiaalinen johtamistapa.

Esimerkki. Johdetaan määrätyn integraalin lauseke auton aikavälillä $[a, b]$ ajaman matkan pituudelle s, kun auton nopeus ajan t funktiona on $v(t)$. Differentiaalinen johto:

- lyhyellä aikavälillä $[t, t + dt]$ auto kulkee matkan $v(t)\,dt$
- koko matka $s = \int_a^b v(t)\,dt$.

Huomautuksia differentiaaliseen johtoon

Huomautus 1. Differentiaalisesta johdosta on jätetty pois likiarvosummien tarkastelu, mutta ainakin tekniikan ammattiaineiden opettajien tapana on viitata summiin seuraavalla epätarkalla sanonnalla. Sen jälkeen, kun esimerkiksi edellisessä esimerkissä on johdettu osavälillä $[t, t + dt]$ kertyvän matkan pituus $v/t)\,dt$, sanotaan: "koko matka välillä $[a, b]$ on summa eli (sic) integraali $\int_a^b v(t)\,dt$".

Huomautus 2. Ammattiaineiden opettajien tapana ei ole esittää virhetarkasteluita likiarvolle $v(t)\,dt$; eivätkä he ylipäätään edes mainitse sitä, että kyseessä on likiarvo, koska se on selvä asia näissä yhteyksissä. Likiarvotarkasteluja voi kuitenkin jokainen itse tehdä. Artikkelissa [1] esitetään muutamia tarkastelutapoja. Usein voidaan nojautua siihen, että likiarvon suhteellinen virhe menee nollaan osavälin pituuden lähestyessä nollaa.

Esimerkin tapauksessa tämä on fysikaalisesti selvä asia, kun ajatellaan sitä, että erittäin pienellä aikavälillä auton nopeus muuttuu melko tasaisesti. Jos esimerkiksi $dt = 1$ sekunti ja tällä aikavälillä nopeus esimerkiksi kasvaa 0,2 %, niin matkan kertymässä $v(t)\,dt$ on karkeasti ottaen myös noin 0,2 %:n virhe. Kun aikaväli pienenee puoleen, nopeus ehtii kasvaa vain noin puolet eli 0,1 %, jolloin kertymän $v(t)\,dt$ suhteellinen virhekin noin puolittuu. Näin edelleen puolittumisia ajatellen, näemme että $v(t)\,dt$:n suhteellinen virhe lähestyy nollaa, kun dt lähestyy nollaa. Viitteessä [1] olevan Lauseen 1 perusteella tämä takaa sen, että $v(t)\,dt$ on riittävän tarkka likiarvo.

Ammattiaineiden opettajat näyttävät käyttävän vielä yksinkertaisempaa ajattelutapaa: heille termin $v(t)\,dt$ tarkkuuden vakuudeksi riittää se, että se olisi tarkka arvo kertymälle välillä $[t, t + dt]$, jos funktiolla v olisi tällä välillä vakioarvona välin alkupisteen arvo $v(t)$. Tällainen ajattelutapa näyttää toimivan kaikissa käytännön sovellutuksissa. Viitteessä [2] on matemaattisesti todistettu, miten samantapainen ehto takaa määrätyn integraalin lausekkeen pätevyyden.

Huomautus 3. Vaikka differentiaalinen tapa johtaa integraalilausekkeita on rankasti lyhennetty versio yksityiskohtaisesta johdosta, se on osoittautunut luotettavaksi: ei ole kohdattu esimerkkiä, jossa suhteellisen huolellinen henkilö tekisi virheen. Tosin joskus huolimaton opiskelija on valinnut tarkasteluväliksi $[x, x+dx]$ sellaisen erikoisen välin, että siihen liittyvän kertymän lauseke $f(x)\,dx$ ei päde kaikilla osaväleillä.

Huomautus 4. Aiemmin monissa calculus-kirjoissa esitettiin differentiaalisen johtotavan erilaisia formalisoituja muotoja. Mutta nykyään yleiseksi tavaksi näyttää tulleen se, että jokaisessa sovellutuksessa johdetaan likiarvosumman lauseke, mistä nähdään tarkan arvon integraalilauseke. Tämä olisi varmaan hyvä menettely myös lukiossa. Väisäläkin [3] käytti sitä, kun hän pinta-alan lisäksi käsitteli tilavuuden. Väisälä hallitsi differentiaalisen menettelyn, kuten hänen elegantti vektorianalyysin oppikirjansa osoittaa, mutta hän varmaankin arvioi, että vielä lukiossa sitä ei ole syytä esittää.

Korkeakouluissa matematiikan ja ammattiaineiden välillä on määrättyjen integraalien kohdalla yleensä ikävä kuilu: matematiikassa ne opetetaan täsmällisesti puhtaan matemaattisesti, mutta ammattiaineissa ja fysiikassa ne johdetaan lyhyesti differentiaalisesti. Matematiikan opettajien tehtävänä on rakentaa silta tämän kuilun yli perustelemalla differentiaalinen johtotapa, koska he voivat tehdä sen lähtien omista matemaattisista määrittelyistään. Ammattiaineiden opettajat eivät yleensä tunne näitä matemaattisia lähtökohtia eivätkä siten voi perustella differentiaalisia johtoja, jotka ammattiaineissa näyttävätkin ikään kuin vain periytyvän sukupolvelta seuraavalle.

Huomautus 5. Samantapainen kuilu on myös differentiaaliyhtälöiden kohdalla. Niiden differentiaalisissa johdoissa esiintyy kuitenkin niin erilaisia approksimaatioita, ettei niille voi esittää yleistä perustelua, kuten edellä määrätyille integraaleille. Siten differentiaaliyhtälöiden kohdalla on yleisesti vain lähdettävä siitä, että differentiaalisella tarkastelutavalla voidaan nopeasti johtaa differentiaaliyhtälö, jonka pätevyyttä voidaan sitten tarvittaessa tarkistaa pidemmillä, matemaattisesti täsmällisemmillä tavoilla. Lindelöfin kirjassa [4] on esitetty muutaman esimerkin valossa, miten differentiaaliyhtälö johdetaan nopeasti differentiaalisesti ja toisaalta matemaattisen täsmällisesti.

Viitteet

[1] K. Tarvainen, *Määrätyn integraalin opettamisesta likiarvotarkasteluin*, Solmu 2/2012.

[2] K. Tarvainen, Justifying differential derivations when setting up definite integrals, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 39, No 1, 61–68, 2008.

[3] K. Väisälä, *Algebran oppi- ja esimerkkikirja 2*, WSOY, 1963.

[4] E. Lindelöf, *Johdatus korkeampaan analyysiin*, WSOY, 1956.

Diplomitehtävien oheislukemistoa

Osoitteessa `http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html` on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmasti kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?

Murtolukujen laskutoimituksia

Negatiivisista luvuista

Hiukan osittelulaista

Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt

Äärettömistä joukoista

Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia

Gaussin jalanjäljissä

K. Väisälä: Algebra

Yläkoulun geometriaa

Geometrisen todistamisen harjoitus

K. Väisälä: Geometria

Lukuteorian diplomitehtävät