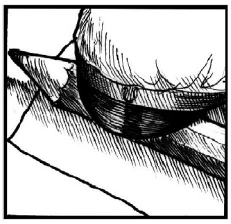

# Pari vanhaa ylioppilastehtävää

***Lehtori K.***

Vanhoista ylioppilastehtäväkokoelmista löytyy helmiä. Vuonna 1910 kysyttiin syksyn kokeessa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x - ay + a^2z = a^3 \\ x - by + b^2z = b^3 \\ x - cy + c^2z = c^3. \end{cases}$$

Suurin osa kokelaista lienee ryhtynyt eliminoimaan tuntemattomia, ja ratkeaahan tehtävä niinkin. Sen laatija on kuitenkin ollut muissa aatoksissa. Yhtälöryhmä voidaan nimittäin kirjoittaa muotoon

$$\begin{cases} a^3 - za^2 + ya - x = 0 \\ b^3 - zb^2 + yb - x = 0 \\ c^3 - zc^2 + yc - x = 0, \end{cases}$$

mistä näkyy, että luvut $a, b, c$ ovat polynomin

$$p(t) = t^3 - zt^2 + yt - x \tag{1}$$

kolme nollakohtaa. Tässä polynomissa muuttujan korkeimman potenssin kerroin on 1, joten sen tuloesitys on

$$p(t) = (t-a)(t-b)(t-c). \tag{2}$$

Polynomi (2) on aukikerrottuna

$$p(t) = t^3 - (a+b+c)t^2 + (ab+bc+ca)t - abc. \tag{3}$$

Vertailemalla kertoimia esitystavoissa (1) ja (3) nähdään, että

$$\begin{cases} x = abc \\ y = ab + bc + ca \\ z = a + b + c. \end{cases}$$

Sensoreilla ja tehtävän laatijalla lienee ollut aluksi hauskaa kokelaiden monimutkaisia ratkaisuja katsellessaan, mutta lopulta hymy on varmaan hyytynyt, sillä kaikki monenkin sivun mittaiset ratkaisut on täytynyt käydä yksityiskohtaisesti läpi, jotta arvostelussa toteutuisi oikeudenmukaisuus.

Hauskalta näyttäviä yhtälöryhmiä oli ollut ylioppilaskokeessa jo aikaisemminkin. Vuoden 1903 kevään kokeessa oli seuraava tehtävä:

Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ bx + ay + cz = d \\ cx + by + az = d, \end{cases}$$

kun $a$, $b$ ja $c$ ovat keskenään erisuuret.

Kirjassa [1] tehtävälle annetaan yksikäsitteinen ratkaisu, ja siinä yhteydessä kysytään, miksi tehtävässä luvut $a$, $b$ ja $c$ edellytetään keskenään erisuuriksi. Jätämme aktiivisen lukijan pohdittavaksi, onko tehtävän ratkaisu todellakin näin ongelmaton.

## Viitteet

[1] R. Laurén, E. Kannisto, *Matemaattiset tehtävät ylioppilastutkinnossa vuosina 1895–1935*, kahdeksas painos, Gummerus osakeyhtiö, 1935.