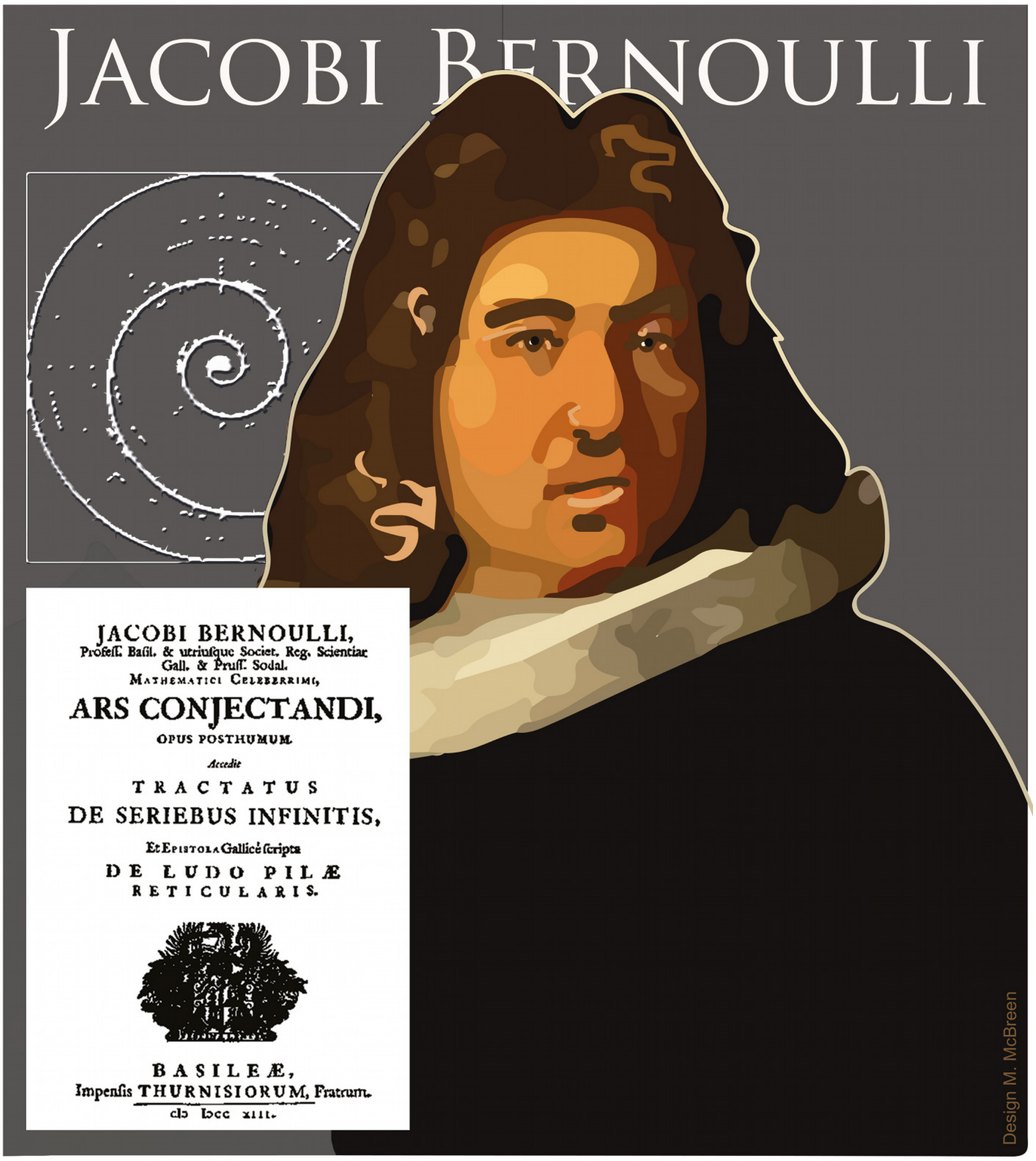
Solmu

Matematiikkalehti
1/2013

http://solmu.math.helsinki.fi



Solmu 1/2013

ISSN-L 1458-8048
ISSN 1459-0395 (Painettu)
ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)
00014 Helsingin yliopisto

http://solmu.math.helsinki.fi

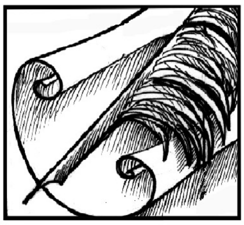
Numeroon 2/2013 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 2.4.2013 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.

Kansi: Jakob Bernoullin (1655–1705) postuumisti 1713 ilmestyneen todennäköisyysteorian klassikon Ars Conjectandin (Arvaamisen taito) 300-vuotisjuhlavuosi 2013 on kansainvälinen tilastotieteen juhlavuosi.

Sisällys



Lopultakin, vai eikö sittenkään?

Pääkirjoitus

Näyttäisi siltä, että valtamedia on vihdoinkin havahtumassa jo kauan tiedossa olleeseen koulumatematiikan alennustilaan. Aamulehti otsikoi 6.12.2012 ilmestyneen numeronsa etusivulla: ”Suomalaisten laskupää lahoaa laskimien takia”. Lehden sisäsivulla kerrotaan teknologiateollisuuden tekemästä korkeakouluille kohdistetusta kyselystä, jossa kartoitettiin uusien opiskelijoiden matematiikan taitoja. Lehden mukaan joka toinen korkeakoulu on joutunut alentamaan lähtötasoa ja keventämään oppisisältöjään matematiikan osalta, jotta uudet opiskelijat pääsisivät edes jotenkuten alkuun opinnoissaan. Vielä korkeakoulujakin surullisempi tilanne on ammattikorkeakouluilla, jonne valitettavasti mainittu kysely ei yltänyt. Toisaalta tuloksista käy ilmi, että matemaattisesti lahjakkaiden opiskelijoiden määrä on vuosien saatossa pysynyt suunnilleen vakiona. Tämä joukko opiskelee koulun ohella matematiikkaa omatoimisesti, osallistuu valtakunnallisiin matematiikkakilpailuihin ja -valmennukseen, eikä niinkään ole riippuvainen epäloogisesti rakentuvien opetussuunnitelmien mukaan etenevästä kouluopetuksesta. Vaikeuksissa on opiskelijoiden sankka keskijoukko, jossa ”laskupää lahoaa”. Tämäkin joukko kyllä korkeakouluissa oppii matematiikkansa, kun sitä lopulta heille opetetaan, mutta usein valitettavan pitkällä viiveellä. Opinnot venyvät hataran koulupohjan takia, mikä myöhäistää myös työelämään siirtymistä. Yhteiskunnan ykköstavoitteena oleva työurien pidentäminen ei onnistu ainakaan siten, että korkeakoulut joutuvat opettamaan uudestaan lukion matematiikan ja ammattikorkeakoulut jopa peruskoulun matematiikkaa ennen varsinaisiin ammattiopintoihin pääsemistä.

Uusimman TIMMS-PIRLS-tutkimuksen mukaan tilanne ei ole paranemassa. Vaikka maamme sijoitus kansainvälisessä vertailussa on hyvä, ilmenee tutkimuksesta, että seiskaluokkalaisten osaaminen on vuoden 1999 TIMMS-tutkimukseen verrattuna huonontunut enemmän kuin yhden kouluvuoden verran. Myös opetushallituksen viime keväänä julkaisemien selvitysten mukaan matematiikan osaaminen peruskoulussa on heikentynyt kaikilla osa-alueilla vuosituhannen vaihteeseen verrattuna.

Miten tähän, voi jo sanoa katastrofaaliseen, tilanteeseen on tultu? Valitettavasti näyttää siltä, että asioiden nykyinen tola on tietoisesti ja johdonmukaisesti toteutetun pitkäjännitteisen politiikan tulos. Peruskoulun alkuaikojen tasokurssit poistettiin lähes uskonnollisen fundamentalismin piirteitä saaneen tasa-arvoajattelun seurauksena. Tuolloin peruskoulun matematiikan oppimäärästä oli poistettava kaikki epätasa-arvoa lisäävä vaativampi aines, eli algebra ja geometria. Sivistyksen tuhoajina toimineet ylimmät kouluviranomaiset nimittivät keskikoulun ja tasokurssiajan algebraa ”temppuopiksi”, josta tylsänä ja tarpeettomana piti luopua ja keskittyä ”soveltamaan” jäljelle jääneitä oppimäärän rippeitä käytännönläheisiin ongelmiin. Myös laskualgoritmien opettelusta luovuttiin osittain, koska laskimilla voitiin suorittaa numeeriset laskut. Ei ymmärretty, että laskualgoritmien sisäistäminen on välttämätöntä myöhemmin vastaan tulevan korkeamman matematiikan peruskäsitteiden ymmärtämisessä. MAOLin entinen puheenjohtaja Jukka O. Mattila kertoo kirjoituksessaan [1] Helsingin Sanomissa 25.3. 2005 ytimekkäästi tämän historian. Lukioissa oli ryhdyttävä järjestämään ”nollakursseja” aloittaville pitkän matematiikan oppilaille. Niissä yritetään muutaman viikon aikana opiskella se matematiikka, jonka sisäistämiseen oli aikaisemmin saanut käyttää rauhassa vuoden tai kaksi. Seuraukset ovat tapahtuneen kehityksen muodossa kaikkien nähtävissä. Lukion matematiikka on puuroutunut oppilaiden olemattomien perustaitojen ja sekavan opetussuunnitelman takia, ja korkeakouluissa puolestaan joudutaan paikkaamaan lukion jättämiä puutteita. Matematiikan ylioppilaskoetta on jouduttu helpottamaan, jotta läpipääsemisen pisteraja saataisiin kaksinumeroiseksi. Kaikille peruskoulun suorittaneille on kuitenkin taattu ”tasa-arvoinen kelpoisuus” toisen asteen opintoihin. Järkeä käyttäen tasokurssit olisi voitu poistaa sallimalla joustava ryhmittely ja kaksi erillistä opetussuunnitelmaa.

Kaikki myöntävät, että peruskoulun ja lukion matematiikan opetuksessa on ongelmia, mutta siihen yksimielisyys sitten loppuukin. Uusimpien oppimistulosten tultua julki on jo ehditty vaatia peruskoulun matematiikan saattamista käytännönläheisemmäksi. Nykyinen opetusministeri torjuu kaikenlaiset oppimäärien eriyttämisyritykset ”kapea-alaisena erikoistumisena”. Näyttää siltä, että kouluhallinnossa ei ole mitään opittu. Lahjakkuuserot tunnustetaan urheilussa ja taiteissa, niissä ne ovat luonnollisia ja suotavia, mutta matematiikka on edelleen kaikille sama.

Nyt alkamassa oleva peruskoulun ja lukion ops-kierros on monessa mielessä historiallisen tärkeä. Käsillä ovat viimeiset vuodet, jolloin opettajina on vielä niitä, jotka itse ovat opiskelleet matematiikan alkeet keskikoulussa. Vuotta 2016 seuraavan kymmenen vuoden kuluessa eläköityvät ne, jotka kävivät peruskoulunsa tasokurssiaikana. Kun vuonna 2026 alkavia opetussuunnitelmia laaditaan, on kansakunnan muistista kadonnut omakohtaisen kokemisen kautta sisäistynyt käsitys siitä, mitä alkeismatematiikan oppiminen todella voisi olla, jos eräästä nettikeskustelusta Matti Lehtisen sanoja lainaten ”matematiikka palautettaisiin matematiikan opetussuunnitelmiin”. Ja nyt olisi melkeinpä viimeinen tilaisuus palauttamiselle. Oppimisen kulttuurin polkaiseminen tyhjästä on myöhemmin vaikeaa, todennäköisesti jopa mahdotonta.

Mitä se oikea matematiikka sitten olisi? Peruskoulussa opiskeltaisiin valinnaisena pääosin vanhan keskikoulun oppimäärän mukaan, toki nykyaikaisia välineitä käyttäen. Lukion pitkä matematiikka sisältäisi

1) algebralliset -, eksponentti- ja logaritmifunktiot,

2) logiikkaa ja lukuteoriaa,

3) geometriaa,

4) trigonometriaa ja kompleksiluvut,

5) vektorioppia ja analyyttista geometriaa,

6) kombinatoriikkaa, todennäköisyyslaskentaa ja

7) analyysin alkeita

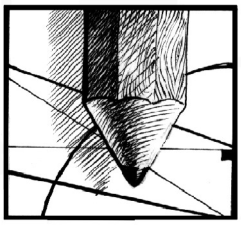
suunnilleen mainitussa järjestyksessä. Kuusi ensimmäistä aihepiiriä jakautuisi kahden ensimmäisen opiskeluvuoden ajalle ja seitsemäs jatkuisi kolmannen vuoden syksystä abiturienttien lähtöön asti. Asioiden käsittelyn tulisi olla perusteellista ja kiireetöntä. Matematiikan todellista osaamista ei ole se, että esimerkiksi tietää mikä kompleksiluku on, vaan se, että oppilas lopuksi kykenee omatoimisesti havaitsemaan aihepiiriin liittyvien asioiden välisiä yhteyksiä ja ratkaisemaan vaativiakin tehtäviä. Toisin sanoen, todellista osaamista on se, että pystyy improvisoimaan omaperäisiä ratkaisuja asetettuihin ongelmiin ja keksimään jopa uusia kysymyksenasetteluja.

Mikä saisi oppilaat työskentelemään tällaisen matematiikan kimpussa, kun ”käytännölliset ongelmat” ovat varsin kaukana? Painavin motiivi on varma tieto siitä, että oppimäärän kunnollinen suorittaminen takaa *todellisen korkeakoulukelpoisuuden.* Lisäksi näiden aihepiirien rikas rakenne tekee niiden oppimisen erittäin mielenkiintoiseksi ja jopa esteettistä nautintoa antavaksi.

Markku Halmetoja

Viitteet

[1] `http://solmu.math.helsinki.fi/2005/erik/JukkaOMHeSa.html`



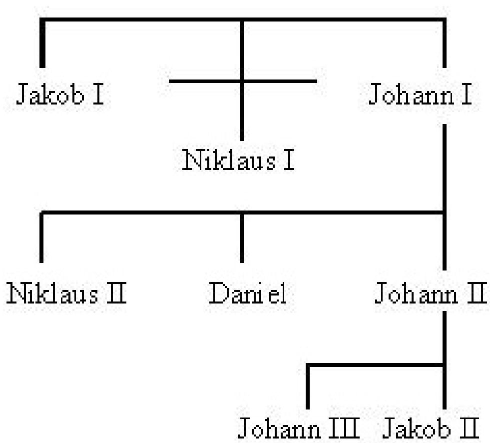
Bernoullien merkillinen tiedemiesdynastia

Johan Stén
tutkija, VTT

(Kirjoitus on aikaisemmin julkaistu Tieteessä tapahtuu -lehden numerossa 4/2012.)

Euroopan oppineiden sukujen joukossa sveitsiläinen Bernoulli-matemaatikkosuku on aivan ainutlaatuinen. Kolmessa peräkkäisessä sukupolvessa, ja lähes sadan vuoden ajan, seitsemän (joidenkin mukaan kahdeksan) tämän suvun jäsentä vaikutti eksaktien tieteiden – matematiikan, fysiikan ja astronomian – eturintamassa. Silti näiden matemaatikko-Bernoullien kirjoittamia teoksia on yleensä turha lähteä kirjastojen hyllyiltä etsimään: jos niitä ylipäätään on, ne ovat poikkeuksetta piilossa varastojen kätköissä. Heistä ei ole liioin kirjoitettu kattavaa biografiaa, vaikka anekdootteja heidän välisistään kilpailuista kuulee tämän tästä.

Bernoullien vaikutus tieteiden kehitykseen on ollut kiistatta valtaisa. Luonnontieteiden ja tekniikan opiskelijat tuntevat Bernoulli-nimen lukuisista laeista ja yhtälöistä, mutta hyvin harva tietää, kenestä Bernoullista kulloinkin on kyse. Tässä katsauksessa pyrin valottamaan Bernoulli-suvun matemaattisia saavutuksia ja niiden heijastuksia tieteisiin. Koska Bernoullien suvussa samat etunimet toistuvat sukupolvesta toiseen, on niihin selvyydeksi tapana liittää roomalainen järjestysnumero (numerointi koskee ainoastaan suvun matemaatikkojäseniä). Tässä käsiteltyjen kaikkein kuuluisimpien edustajiensa jälkeen Bernoullin suku ei suinkaan ole sammunut: Bernoulli-nimisiä eri alojen professoreja on riittänyt Baselin yliopistossa näihin päiviin saakka, ja onpa suku levinnyt Suomeenkin.



Matemaatikko-Bernoullien sukupuu.

Suvun juuret ovat Espanjan Alankomaihin kuuluneessa Antwerpenissa, nykyisessä Belgiassa. Bernoullit ovat protestantteja. Espanjalaisten harjoittaman uskonnollisen sorron takia suvun kantaisä muutti 1500-luvun lopulla Frankfurtiin, mutta asettui myöhemmin Baseliin, jossa suku menestyi ja nousi kansainväliseen kuuluisuuteen. Suvussa kaksi lahjaa näyttäisi korostuvan ylitse muiden: matemaattinen ja taiteellinen. Suvun ”päämies” oli kauppias ja kaupungin raatimies Niklaus Bernoulli (1623–1708), jonka yhdestätoista lapsesta kaksi poikaa – Jakob I (1655–1705) ja Johann I (1667–1748) – loivat perustan suvun tieteelliselle maineelle. Niklausveljestä tuli taidemaalari (1662–1716), ja hänen käsialaansa on mm. Jakob I:n muotokuva. Edellisen poika

Niklaus I (1687–1759) vuorostaan seurasi setiensä Jakobin ja Johannin viitoittamaa tiedemiespolkua ja mm. toimitti ja julkaisi Jakobin kirjoitukset postuumisti.

Ensimmäinen sukupolvi

Jakob I Bernoulli opiskeli aluksi isänsä toivomuksesta filosofiaa ja teologiaa, mutta siirtyi valmistumisensa jälkeen 1676 omaehtoisesti matematiikan ja fysiikan pariin. Opintomatkoillaan mm. Ranskaan, Hollantiin ja Englantiin hän tutustui aikansa tieteellisiin virtauksiin; karteesiolaiseen luonnonfilosofiaan, analyyttiseen geometriaan ja englantilaisten empiristien luonnonoppeihin. Palattuaan Baseliin 1682 hän ryhtyi opettamaan perustamassaan kokeellisen fysiikan seminaarissa. Hän perehtyi syvällisesti Descartes'n geometriaan sekä englantilaisten John Wallisin ja Isaac Barrow'n (Newtonin opettajan) kirjoituksiin differentiaalilaskennasta, julkaisten niistä poikineita omia tutkielmiaan *Acta eruditorum*issa, aikansa arvostetussa tiedejulkaisussa. Samassa sarjassa julkaistiin vuonna 1684 Gottfried Wilhelm Leibnizin kuuluisa analyysin perusteita koskeva artikkeli nimeltään *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illi calculi genus*, jota Jakob I Bernoulli innolla tutki. Pian hän oppikin hallitsemaan menetelmän täydellisesti ja sai oppilaakseen lahjakkaan veljensä Johannin, josta myöhemmin kehkeytyi hänen pahin kilpailijansa.

Kieltäydyttyään kertaalleen pappisvirasta Jakob I Bernoulli tuli nimitetyksi 1687 Baselin yliopiston matematiikan professoriksi, jossa virassa hän vaikutti elämänsä loppuun. Hänen työnsä differentiaalilaskennan parissa oli uraauurtavaa, sillä Leibnizin kalkyyli edusti tuohon aikaan monella tapaa uudenlaista ja vaikeatajuista ajattelua. Artikkeleissaan *Journal des sçavans*issa ja *Acta eruditorum*issa Jakob I Bernoulli sovelsi ja kehitti analyysia erilaisiin mekaniikan ongelmiin. Hän mm. löysi kaavan käyrän kaarevuussäteelle ja ratkaisi Leibnizin ja Christiaan Huygensin tutkiman isokronisen käyrän ongelman (*Acta eruditorum*, 1690). Tämä tarkoittaa sellaisen radan määräämistä kitkatta liikkuvalle kappaleelle, että sitä noudattamalla se liukuisi maan vetovoimakentässä mistä tahansa pisteestä käyrän pohjalle yhtä nopeasti. Ongelman merkitys on siinä, että Bernoullin ratkaisu noudattaa ensimmäistä kertaa analyysissa nykyäänkin käytettyä menettelytapaa: 1) differentiaaliyhtälön johtaminen, 2) muuttujien separointi, 3) eri yhtälöiden integrointi ja vakioiden määrittäminen. Lisäksi tässä tapauksessa tarkastellaan erikseen integraalien minimi- tai maksimiarvoa, mikä on variaatiolaskennaksi kutsutun matematiikan haaran perusongelma [Goldstine 1980]. Aihetta käsitteli sittemmin Johann I Bernoulli ja hänen oppilaansa Leonhard Euler.

Vuonna 1691 Jakob I Bernoulli haastoi aikalaisensa määrittämään *ketjukäyrän*, ts. vapaasti roikkuvan, päistään kiinnitetyn ketjun, täsmällisen muodon. Nykyään puhuttaisiin tässä yhteydessä *funktiosta*, mutta tuohon aikaan koko käsitettä ei ollut olemassa. Nykykielellä oikea vastaus on hyperbolinen kosini, joka sisältää eksponenttifunktion. Käyrän muodon ratkaisivat itsenäisesti Leibniz, Huygens ja Johann I Bernoulli. Ongelma ei ole triviaali ottaen huomioon, ettei eksponenttifunktiota ja sen ominaisuuksia vielä täysin tunnettu. Jakob I osoitti myöhemmin ketjukäyrän painopisteen sijaitsevan kaikista mahdollisista käyränmuodoista alimpana, mikä vahvisti vuosisatoja teoreettisessa mekaniikassa tunnetun säännön, jonka mukaan rakenteen painopiste aina pyrkii hakeutumaan mahdollisimman alas. Samalla ratkesi eräs vuosisatoja kiinnostusta herättänyt rakennustekninen kysymys, eli vapaasti seisovan holvikaaren optimaalisen muodon ongelma. Voidaan nimittäin osoittaa, että vakain holvin muoto on ylösalainen ketjukäyrä eikä esim. paraabeli, kuten jotkut olivat arvelleet. Vuonna 1695 Jakob I käsitteli vaikeampaa ongelmaa: ns. *Bernoullin differentiaaliyhtälöä*,

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)y^n(x), \quad n \neq 0{,}1,$$

jolla epälineaarisuudestaan huolimatta on eksakteja ratkaisuja (yhtälö voidaan linearisoida sopivalla muuttujan vaihdolla ja lopuksi ratkaista ns. integroivan tekijän avulla). Jakob I Bernoullin muita taidonnäytteitä oli tuulen täyttämän purjeen muodon differentiaaliyhtälön ratkaiseminen sekä toisesta päästä kiinnitetyn ja toisesta päästä kuormitetun elastisen sauvan kaaren muodon selvittäminen. Merkittävä oli myös hänen vipuvarsilaille perustuva todistuksensa heilurin värähtelykeskipistettä koskevalle teoreemalle, jonka Huygens oli esittänyt monivartiselle heilurikellolle teoksessa *Horologium oscillatorum* (1673).

Edellä mainituilla töillään Jakob I Bernoulli oli osoittanut olevansa aikakautensa etevimpiä matemaatikoita. Tässä vaiheessa pienoinen huoli nuoremman veljen Johann I:n nopeasta kehityksestä oli ehkä ymmärrettävää, mutta tilannetta pahensi molempien veljesten äärimmäinen herkkyys, ylpeys ja keskinäinen epäluulo. Vuonna 1696 Jakob I Bernoulli haastoi aikalaisensa isoperimetrisellä ongelmalla: Tehtävänä on määrittää pisteiden $x = -c$ ja $x = c$ välinen käyrä $y(x)$, jonka pituus $L > 2c$ on vakio, siten että y^n:n integraali $-c$:stä c:hen on suurin mahdollinen. Sekä Leibniz että Johann I Bernoulli vastasivat haasteeseen, mutta Jakob ei kelpuuttanut ainuttakaan ratkaisuyritystä. Tämä laukaisi veljesten välillä tunnetun ja elinikäiseksi muodostuneen kiistan, jopa suoranaisen vihanpidon. Myös Leibniz sai aika ajoin osakseen molempien Bernoullien kitkerää kritiikkiä.

Ars conjectandi (Arvaamisen taito, 1713) lienee keskeneräisyydestään huolimatta Jakob I Bernoullin omaleimaisin teos. Se on todennäköisyysteorian klassikoita, jonka yksityiskohtia vieläkin tutkitaan. Teoksessa Bernoulli täsmensi todennäköisyyden käsitettä ja erotti ensimmäisenä *apriorisen* ts. etukäteen laskettavan (esim. noppapeli) todennäköisyyden *aposteriorisesta*, ts. sellaisesta todennäköisyydestä, joka voidaan päätellä tuloksista jälkikäteen (esim. todennäköisyys kuolla johonkin sairauteen). Lukuisten esimerkkien lomassa teoksessa mm. johdetaan induktiivisesti eksponenttikehitelmä käyttäen ns. Bernoullin lukuja sekä todistetaan *suurten lukujen laki*, jonka mukaan satunnaismuuttujan tulosten aritmeettinen keskiarvo lähestyy muuttujan odotusarvoa, kun kokeiden lukumäärä lähestyy ääretöntä. *Ars conjectandi*n merkitystä kuvaa se, että teoksen 300-vuotisjuhlavuosi 2013 on julistettu kansainväliseksi tilastotieteen vuodeksi, jota juhlistetaan mm. konferenssein ja juhlaesitelmin. Kansainvälisen tilastotieteen järjestön (ISI) matemaattisen tilastotieteen ja todennäköisyyslaskennan jaoston nimi on osuvasti *Bernoulli Society*.

Jakob I Bernoullin hautaepitafia koristaa teksti *Eadem mutata, resurgo* – vaikkakin muuntuneena, nousen jälleen – kirjoitettuna spiraalikäyrän ympärille. Teksti viittaa logaritmiseen spiraaliin, jonka käyttäytymistä Jakob I Bernoulli oli tarkastellut napakoordinaatistossa. Hän kutsui käyrää nimellä *spira mirabilis* ilmaistakseen sen merkillistä itsesimilaarisuutta, ts. ominaisuutta säilyttää muotonsa ja nousukulmansa joka kohdassa. Toisaalta spiraali on mahdollinen vertauskuva ylösnousemukselle. Hautaepitafi on nähtävissä Baselin Münsterin katedraalin viereisessä kryptassa.

Jakob I Bernoullin hautaepitafin spiraali ei valitettavasti ole logaritminen, kuten oli tarkoitus, vaan pikemminkin yksinkertainen Arkhimedeen spiraali. (Kuva: Osmo Pekonen, 2007).

Johann I Bernoullista piti isänsä toivomuksesta tulla kauppias, mutta isoveljensä Jakobin tavoin hänen mielenkiintonsa kohdistui tieteisiin. Hän saikin opiskella lääketiedettä ja valmistui lääkäriksi. Samalla hän ryhtyi opiskelemaan Jakob I:n ohjauksessa matematiikkaa, jossa pian saavutti veljensä tason. Opintomatkallaan Pariisiin 1691 hän pääsi matemaattisilla tiedoillaan filosofi-teologi Nicolas Malebranchen tieteelliseen piiriin, jossa tutustui matematiikkaa harrastavaan markiisi Guillaume François Antoine de L'Hôpitaliin. Tämä pyysi Johann I Bernoullia opettamaan hänelle uuden infinitesimaalikalkyylin salat hyvää korvausta vastaan. Niin tapahtui, ja opetus jatkui kirjeitse Johann I:n palattua Baseliin 1692. Opetukseen kuului esimerkiksi raja-arvoja koskeva *l'Hôpitalin sääntö*:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

silloin kun $f(x_0)=g(x_0)=0$. Kaava sisältyi sittemmin L'Hôpitalin 1696 anonyymina julkaisemaan oppikirjaan *Analyse des infiniment petits*, joka oli ensimmäinen ranskan kielellä julkaistu analyysia koskeva teos. Siitä tuli erittäin suosittu differentiaalilaskennan oppikirja 1700-luvulla. Johann I Bernoullia teoksen julkaiseminen raivostutti, sillä vaikka esipuheessa kirjoittaja asiallisesti kiitti häntä saamastaan opetuksesta, Johann I:n mielestä kunnia koko teoksesta kuului yksinomaan hänelle. Pariisissa Johann I Bernoulli tutustui myös matemaatikko Pierre Varignoniin, josta Leibnizin ja Huygensin tapaan tuli hänen elinikäinen kirjeenvaihtokumppani. Tänä aikana Johann I:n päähuomio oli integraalilaskennassa. Hän ymmärsi integroinnin olevan derivoinnin käänteisoperaatio, mikä ei tuolloin ollut itsestään selvää. Näin ollen Leibnizin keksimä tulon derivointisääntö johti helposti osittaisintegrointisäännön keksimiseen, jota hän myös taitavasti sovelsi esimerkiksi johtamalla sarjakehitelmän (eri merkinnöillä, tosin)

$$\int_0^x y\,\mathrm{d}x = yx - y'\frac{x^2}{2} + y''\frac{x^3}{6} - \cdots$$

mielivaltaisen (mutta riittävän sileän) käyrän $y(x)$ alisen pinta-alan laskemiseksi.

Jakob-veljen ollessa matematiikan professori Baselissa Johann I:n menestymisen mahdollisuudet kotikaupungissaan olivat rajalliset. Veljesten yhteistyönä alkanut matemaattinen löytöretki oli muuttunut kilpailuksi ja lopulta katkeraksi riidaksi. Apuun riensi Huygens, jonka suosituksesta Johann I:lle avautui Alankomaiden Groningenin yliopiston matematiikan professuuri, jota hän piti hallussaan kymmenen vuotta. Aika Groningenissa oli Johann I:lle vaikea, sillä onnellisesta perheenlisäyksestä huolimatta uusi kaupunki ja sen ilmapiiri ei häntä miellyttänyt [Sierksma 1992]. Johann I:n kiihkeä luonne näet ajoi hänet lukuisiin tieteellisiin ja uskonnollisiin kiistoihin, samalla kun hänen terveytensä horjui. Vuonna 1696 hän julisti *Acta Eruditorum*issa kilpailun *brakistokroniksi* nimittämänsä nopeimman putoamiskäyrän löytämiseksi. Puolen vuoden määräaikaan mennessä ratkaisuja oli tullut ainoastaan kuusi kappaletta; ne on julkaistu samassa sarjassa 1697: ongelman esittäjältä itseltään, Jakob-veljeltä, Newtonilta, Leibnizilta, L'Hôpitalilta (joka tosin oli saanut Johann I Bernoullilta opastusta) ja Ehrenfried von Tschirnhausilta. Oikea ratkaisu *sykloidi* osoittautui samaksi kuin Jakob I Bernoullin aiemmin löytämä "tautokroni" eli isokroninen putoamiskäyrä. Ratkaisu osoittaa, että heilurikellon heilurin painopisteen pitäisi ympyrän kaaren sijaan kulkea pitkin sykloidia, jotta heilurin taajuus pysyisi vakiona heilunta-amplitudista riippumatta. Se on teknisesti haastavaa, mutta tällaisia heilurin varsia on todellakin valmistettu. Johann I Bernoulli ratkaisi brakistokroniongelman nerokkaalla oivalluksella: Käyttäen hyväksi Pierre de Fermat'n lyhimmän ajan periaatetta, jonka mukaan valo aina kulkee paikasta toiseen nopeinta reittiä, hän muunsi mekaanisen ongelman optiseksi ja johti sykloidisen ratkaisun tunnetusta valon taittumislaista kerrostuneessa väliaineessa [Goldstine 1980].

Jakob-veljen kuoltua Baselissa 1705 Johann I Bernoulli nimitettiin itseoikeutetusti kotikaupunkinsa yliopiston ainoaan matematiikan professuuriin. Hänen oppilaitaan olivat paitsi omat pojat Niklaus II (1695–1728), Daniel (1700–1782) ja Johann II (1710–1790) myös Leonhard Euler (1707–1783). Silloinen maanmiehemme, ruotsalainen Samuel Klingenstierna (1698–1765), joka Euroopan kiertueellaan vieraili Baselissa, teki niin ikään taidoillaan syvän vaikutuksen opettajaansa Johann I Bernoulliin [Rodhe 2002]. Palattuaan Ruotsiin Klingenstierna juurrutti leibnizilaisen infinitesimaalilaskennan Upsalan yliopistoon ja sitä kautta vähitellen myös Turun Akatemian opiskelijoihin.

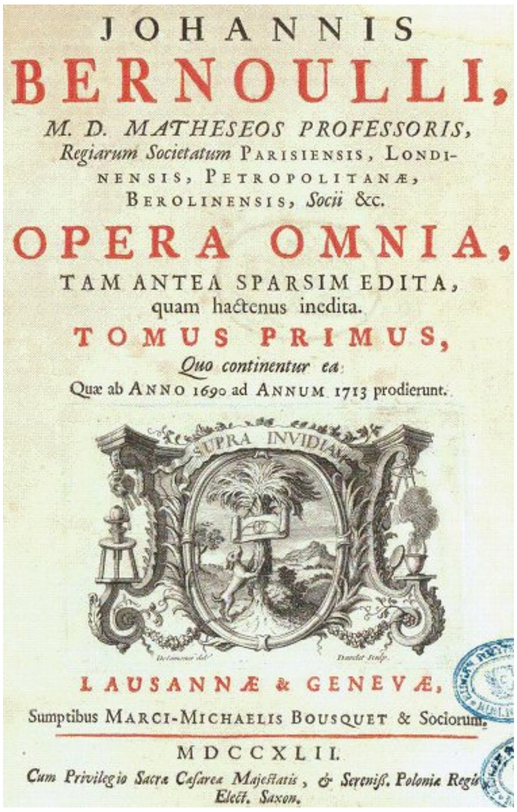
Johann I Bernoullin lukuisista saavutuksista jälkimmäiseltä Baselin kaudelta mainittakoon *virtuaalisen työn periaate* (1717): mekaanisen systeemin tekemä kokonaistyö tasapainon järkkyessä on nolla. Tämä voidaan ymmärtää vipuvarsilain yleistykseksi. Johann I Bernoulli kutsui voiman ja virtuaalisen liikkeen tuloa "energiaksi" (oikeammin: työ) ja osoitti sen olevan johdettavissa Leibnizin esittämän "elävän voiman" (*vis viva*) säilymislaista. Newtoniin ja hänen teorioihinsa Johann I Bernoulli suhtautui väheksyvästi, ja tämän asenteen hän istutti myös oppilaisiinsa. Leibnizin ja Newtonin välisessä kuuluisassa differentiaalilaskennan keksimisen prioriteettikiistassa hän puolusti tiukasti Leibnizia. Vielä 1730 hän jarrutti toimillaan Newtonin vetovoimateorian omaksumista Ranskassa selittämällä Keplerin planeettaliikkeen lakien olevan sopusoinnussa karteesiolaisen pyörreteorian kanssa [Shank 2008]. Johann I Bernoulli ei kaihtanut arveluttaviakaan keinoja kunniansa varjelemiseksi. Veljensä Jakobin kuoltua hän julisti ratkaisseensa tämän vuonna 1696 keksimän isoperimetrisen ongelman itsenäisesti. Hän myös mitä ilmeisimmin plagioi poikansa Danielin hydrodynamiikan teosta pyrkien osoittamaan, että olisi kirjoittanut oman hydrauliikan teoksensa aiemmin [Darrigol 2005]. Johann I Bernoullin *Opera Omnia* valmistui 1745, kolme vuotta ennen hänen kuolemaansa.

Toinen sukupolvi

Niklaus I Bernoulli, Jakob I:n ja Johann I:n veljenpoika ja edellisen oppilas, oli lahjakas muttei kovin tuottelias matemaatikko. Valmistuttuaan 17-vuotiaana maisteriksi Baselin yliopistosta puolustamalla Jakob I:n äärettömien sarjojen teoriaa hän väitteli 22-vuotiaana todennäköisyyslaskennan soveltamisesta oikeustieteisiin. Hän toimi viisi vuotta Padovan yliopiston matematiikan professorina, mutta muutti takaisin Baseliin logiikan ja sittemmin lakitieteen professoriksi. Hän kokosi ja julkaisi setänsä Jakob I:n teokset sekä keskeneräisen *Ars Conjectandi*n, mutta hänen omat matemaattiset oivalluksensa jäivät enimmäkseen runsaan kirjeenvaihdon lomaan. Niklaus I Bernoulli pohti mm. "Pietarin paradoksina" tunnettua päätöksentekoongelmaa. Se koskee kuviteltua uhkapeliä, jossa tappion todennäköisyys pienenee samalla kun tappiosumma rajattomasti kasvaa. Voittosumman odotusarvo on ääretön, mutta tuskinpa kukaan järkevä ihminen ryhtyisi tällaista peliä pelaamaan. Paradoksin oikean tulkinnan esitti myöhemmin Niklauksen nuorempi serkku Daniel Bernoulli.

Niklaus II Bernoulli oli isänsä Johann I Bernoullin ensimmäinen lapsi ja ylpeyden aihe, joka jo 11-vuotiaana hämmästytti kielitaidoillaan. Hän syntyi Baselissa, varttui Groningenissä, kirjoittautui sittemmin Baselin yliopistoon ja valmistui sieltä oikeustieteen lisensiaatiksi 1715. Isä opetti pojalleen matematiikkaa siinä määrin, että tämä saattoi auttaa häntä tieteellisessä kirjeenvaihdossa. Nuori Niklaus liitti kirjeisiin omiakin oivalluksiaan, julkaisi tutkielmia liikeradoista ja differentiaaliyhtälöistä sekä ryhtyi lopuksi opettamaan matematiikkaa veljelleen Danielille. Oltuaan kolme vuotta Bernin yliopiston oikeustieteen professorina hän sai yhdessä Danielin kanssa kutsun Pietarin vasta perustetun keisarillisen tiedeakatemian virkaan Leibnizin oppilaan Christian Wolffin suosituksesta. Isä Johann I Bernoulli oli jo kieltäytynyt kutsusta. Epäonnekseen Niklaus II sairastui kuumetautiin ja kuoli oltuaan Pietarissa vain kahdeksan kuukautta. Pietariin oli kuitenkin jo tuossa vaiheessa kutsuttu Johann I Bernoullin lahjakkain oppilas Leonhard Euler [ks. Stén 2007].

Groningenissä syntynyt **Daniel Bernoulli** ei isänsä Johann I:n painostuksesta huolimatta halunnut ryhtyä kauppiaaksi. Sen sijaan hän sai luvan opiskella lääketiedettä eri yliopistoissa ja valmistui tohtoriksi Baselissa 1721 hengitystä koskevalla väitöskirjalla. Lisäksi hän opiskeli matematiikkaa aluksi isänsä, sittemmin



JOHANNIS
BERNOULLI,
M. D. MATHESEOS PROFESSORIS,
Regiarum Societatum PARISIENSIS, LONDINENSIS, PETROPOLITANÆ, BEROLINENSIS, Socii &c.
OPERA OMNIA,
TAM ANTEA SPARSIM EDITA,
quam hactenus inedita.
TOMUS PRIMUS,
Quo continentur ea:
Quæ ab ANNO 1690 ad ANNUM 1713 prodierunt.
SUPRA INVIDIAM
LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Sumptibus MARCI-MICHAELIS BOUSQUET & Sociorum.
MDCCXLII.
Cum Privilegio Sacræ Cæsareæ Majestatis, & Sereniss. Poloniæ Regis Elect. Saxon.

Vasemmalla Johann I Bernoullin koottujen teosten ensimmäisen volyymin (1742) otsikkolehti. Kuvassa puun runkoon kiinnitetty sykloidikäyrä sekä teksti jonka tieteenhistoria voisi kyseenalaistaa: "Supra invidiam" – "kateuden yläpuolella". Oikealla Johann I Bernoullin hautakivi Baselin Pietarinkirkossa mainitsee hänet oman aikakautensa Arkhimedeeksi sekä yhdenvertaiseksi Descartes'n, Newtonin ja Leibnizin kanssa. Newtonin nimen mainitsemisesta voi arvella, ettei epitafi ole Johann I:n itsensä suunnittelema. Vieressä sijaitsevat myös Danielin, Johann II:n ja Niklaus I Bernoullin hautakivet (Kuva: kirjoittaja, 2010).

isoveljensä Niklaus II:n johdolla. Italiaan suuntautuneen opintomatkan aikana hän julkaisi paljon huomiota herättäneen teoksen *Exercitationes quaedam mathematicae* (Venetsia, 1724), jossa hän mm. ratkaisi italialaisen matemaatikon, kreivi Jacopo Riccatin mukaan nimetyn toisen asteen differentiaaliyhtälön

$$ax^n \mathrm{d}x + y^2 \mathrm{d}x = b\,\mathrm{d}y.$$

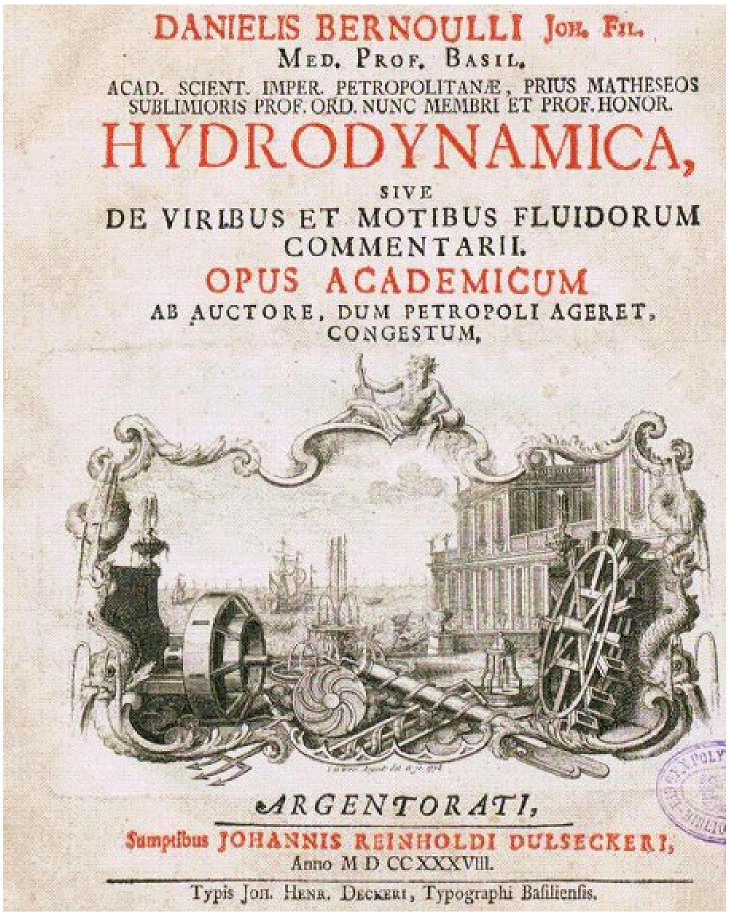
Daniel Bernoullin ratkaisu perustui muuttujien x ja y erottamiseen eksponentin n tietyillä arvoilla; tarkastelua yleistivät myöhemmin Leonhard Euler ja Jean d'Alembert. Vuonna 1725 Daniel Bernoulli voitti ensimmäistä kertaa Pariisin kuninkaallisen tiedeakatemian palkintokilpailun tutkielmallaan merellä toimivasta *klepsydrasta* (vesikellosta tai tiimalasista). Saavuttamansa maineen perusteella hän sai kutsun Pietarin vastaperustettuun tiedeakatemiaan, jonne lähti 1725 isoveljensä Niklaus II:n kanssa.

Vajaan vuoden kuluttua Niklaus II:n äkillinen kuolema Pietarissa järkytti Danielia syvästi. Kaikeksi onneksi hän sai tiedeakatemian johtajat suostutelluiksi värväämään Baselista nuoren Leonhard Eulerin, joka saapui Pietariin 1727. Hänestä Daniel sai läheisen kumppanin ja työtoverin. Daniel Bernoullin Pietarin kausi 1725–1733 oli hänen elämänsä hedelmällisimpiä. Tällöin syntyi mm. käsikirjoitus kuuluisaan *Hydrodynamica*-teokseen (julkaistu Strasbourgissa 1738) [ks. Darrigol 2005], jossa ensimmäistä kertaa sovelletaan kineettisen energian käsitettä ja massan säilymislakia virtausmekaniikkaan sekä johdetaan samalla virtausviivalla (oikeammin putkessa) sisäisen paineen p, virtausnopeuden v ja tiheyden ρ välinen yhteys

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \vartheta = \text{vakio},$$

missä ϑ on voimatermi. Yhtälön avulla voidaan selittää esimerkiksi miten lentokoneen kyky nousta ilmaan riippuu siipiprofiilista tai miksi kaksi rinnatusten kulkevaa laivaa pyrkivät ajautumaan toisiaan kohti. Teoksessa ennakoidaan puhtaasti teoreettisilla päättelyillä myös kineettisen kaasuteorian perusyhtälöitä.

Daniel Bernoulli tutki pitkään värähteleviä järjestelmiä. Hän ratkaisi ensimmäisenä vapaasti roikkuvan köyden värähtelyongelman Besselin funktion sarjakehitelmänä. Häneltä on peräisin superpositioperiaate, jonka mukaan soittimen tuottama ääni koostuu äärettömästä määrästä harmonisia värähtelyitä, jotka voidaan ilmaista trigonometrisin funktioin. Nämä harmo-



DANIELIS BERNOULLI JOH. FIL.
MED. PROF. BASIL.
ACAD. SCIENT. IMPER. PETROPOLITANÆ, PRIUS MATHESEOS SUBLIMIORIS PROF. ORD. NUNC MEMBRI ET PROF. HONOR.
HYDRODYNAMICA,
SIVE
DE VIRIBUS ET MOTIBUS FLUIDORUM COMMENTARII.
OPUS ACADEMICUM
AB AUCTORE, DUM PETROPOLI AGERET, CONGESTUM.

ARGENTORATI,
Sumptibus JOHANNIS REINHOLDI DULSECKERI,
Anno M D CCXXXVIII.
Typis Joh. Henr. Deckeri, Typographi Basiliensis.

Daniel Bernoullin Hydrodynamica on ensimmäinen virtaavien nesteiden ja kaasujen dynamiikkaa koskeva kokonaisesitys. Otsikkolehdellä näkyy virtaavan veden teknisiä sovellutuksia, mm. "Arkhimedeen ruuvi". Baselin Pietarinkirkossa olevassa muistotaulussa lukee mm. "Daniel Bernoulli, Johanneksen poika, matemaatikko, fyysikko ja filosofi, jonka vertaista tai suurempaa ei maan päällä ole nähty". Yläpuolinen veistosallegoria viittaa Hydrodynamica-teokseen. (Kuva: kirjoittaja 2010).

niset perusmuodot toteuttavat yksitellen ns. aaltoyhtälön, jonka muodon johtivat toisistaan riippumatta Jean d'Alembert (1746) ja Euler (1747). Tässä lineaarisessa osittaisdifferentiaaliyhtälössä,

$$\sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

joka kuvaa esimerkiksi päistään kiinnitetyn värähtelevän kielen liikettä, $y(x,t)$ kuvaa kielen poikittaista siirtymää, T jännitystä ja σ kielen tiheyttä (massa/pituusyksikkö). D'Alembert ilmaisi yleisimmän ratkaisun yhtälölle muodossa $y = \Psi(ct + x) + \Gamma(ct - x)$, jossa $c = \sqrt{T/\sigma}$ ja jossa funktiot Ψ ja Γ toteuttavat samanaikaisesti aaltoyhtälön ja (mahdolliset) reunaehdot.

Monien muiden eurooppalaisten tiedemiesten tapaan Daniel Bernoulli ei viihtynyt Pietarissa ja sen ankarassa ilmastossa, vaan palasi 1733 häntä tapaamaan tulleen veljensä Johann II:n kanssa mieluusti Baseliin ottaakseen vastaan siellä vapaana olleen anatomian professuurin. Vasta 1750 Daniel Bernoulli saattoi vaihtaa anatomian professuurin fysiikkaan, missä virassa hän jatkoi luennoimista vuoteen 1776 saakka. Hänen tutkimusaiheensa liittyivät läheisesti toisaalta fysiikkaan, astronomiaan ja fysiologiaan, toisaalta todennäköisyyslaskentaan. Toisin kuin isänsä Johann I hän ymmärsi Newtonin ja Leibnizin teorioiden sopivan yhteen. Vuonna 1734 hän jakoi isänsä kanssa Pariisin tiedeakatemian palkintokilpailun planeettojen ratatasoja koskevalla tutkielmalla. Sinänsä hienolla saavutuksella oli onneton ja kauaskantoinen seuraus, sillä Johann I koki palkinnon jakamisen poikansa kanssa nöyryyttävänä ja tuimistuneena katkaisi välit Danieliin loppuiäkseen. Daniel jatkoi kuitenkin osallistumista Pariisin tiedeakatemian palkintokilpailuihin. Kaiken kaikkiaan hän voitti kilpailun kymmenen kertaa, joko yksin tai veljensä tai isänsä kanssa. Daniel Bernoulli tunnettiin lempeänä ja elämäntavoiltaan vaatimattomana miehenä, jonka oppilaaksi Baseliin hakeuduttiin pitkienkin matkojen päästä.

Johann II Bernoulli oli Johann I:n nuorin poika ja hänen seuraajansa Baselin yliopiston matematiikan professorin virassa. Hän voitti Pariisin tiedeakatemian palkintokilpailun kolmasti. Eräs kilpailutehtävä koski valon etenemistä, jota Johann II mallinsi pitkittäisenä värähtelynä elastisessa pyörteisessä väliaineessa. Johann II Bernoullin kirjeenvaihtopiiri oli laaja (ks. esim. [Nagel, 2005]). Vuonna 1756 ranskalainen Pierre Louis Moreau de Maupertuis erosi saavuttamastaan Berliinin tiedeakatemian presidentin virasta ja muutti hyvän ystävänsä Johann II Bernoullin luokse Baseliin [Terrall 2002]. Maupertuis oli hänkin Johann I Bernoullin entinen oppilas. Muuton taustalla oli Leibnizin ja Newtonin kiistojen tragikoominen jälkinäytös. Johann I Bernoullin vähäpätöinen oppilas Samuel König pyrki osoittamaan, että pienimmän vaikutuksen periaate, jonka Maupertuis ja Euler olivat kukin tahollaan esittäneet vuonna 1744, oikeastaan olikin Leibnizin keksimä. Syntyneen kiistan seuraukset olivat Maupertuis'lle kohtalokkaat, sillä hän joutui Voltairen säälimättömän parjauksen kohteeksi ja hänen terveytensä horjui. Maupertuis kuoli Baselissa 1759 Johann II Bernoullin kotona **Engelhof**-talossa, osoitteessa Nadelberg 4, joka on nykyisin Baselin yliopiston hallinnassa [Pekonen 2010].

Seuraavat sukupolvet

Johann II:n pojista peräti neljä jatkoi suvun matemaattista perinnettä. Näistä **Johann III Bernoulli** (1744–1807) oli menestynein. Hän valmistui jo 14-vuotiaana oikeustieteiden maisteriksi ja palkattiin 20-vuotiaana johtamaan Preussin kuninkaallisen tiedeakatemian observatoriota, mihin tehtävään hän ei kuitenkaan sopinut. Hänen lahjansa olivat pikemminkin kirjallisia, matematiikassa hänen saavutuksensa jäivät vaatimattomiksi. Hän toimi kuitenkin matematiikan jaoksen virassa koko ikänsä toimittaen mm. Berliinin Efemeridejä, aikansa tähtitieteellistä vuosikirjaa, ja ollen kirjeenvaihdossa johtavien astronomien kanssa. Ulkomaanmatkoiltaan Johann III Bernoulli kirjoitti useita kulttuurihistoriallisesti kiintoisia matkakirjoja. Hän tiedosti varhain sukunsa ainutlaatuisuuden ja ryhtyi kokoamaan edeltäjiensä ja kollegojensa kirjallista jäämistöä, jonka hän rahapulassa päätyi myymään Ruotsin kuninkaalliselle tiedeakatemialle. *Bernoulliana*a säilytettiin Tukholman observatoriossa liki koskemattomana, kunnes suomalaissyntyinen astronomi Hugo Gyldén (1841–1891) kiinnostui aineistosta. Bernoullien kirjeenvaihto palautettiin Baseliin, kun Otto Spiess vuonna 1935 käynnisti Bernoullien koottujen teosten editoinnin. Pelkästään Johann III Bernoullin kirjekokoelmassa on tuhansia kirjettä. Mainittakoon, että 16 niistä on suomalaiselta Anders Johan Lexellilta.

Veljensä Johann III:n tapaan **Jakob II Bernoulli** (1759–1789) opiskeli ensin oikeustiedettä, mutta löysi sittemmin oikean kutsumuksensa matematiikasta. Vuonna 1782 hän haki setänsä Danielin professuuria, mutta hävisi viran arvonnassa. Ollessaan opintomatkalla Italiassa hän sai vuorostaan kutsun Pietarin tiedeakatemialta, jossa matemaattinen tutkimus oli merkittävästi heikentynyt Eulerin ja Lexellin poismenon jälkeen. Jakob II tarttui innolla uuteen tehtävään, seuraten mekaniikan tutkimuksillaan setänsä Danielin jalanjälkiä. Hän solmi avioliiton Eulerin pojantyttären kanssa 1789, mutta kuoli samana kesänä tapaturmaisesti hukkumalla Nevaan. Näin Pietari oli osoittautunut kohtalokkaaksi jo toiselle Bernoullille.

Bernoulli-suku on sittemmin levinnyt laajalle ja menestynyt monella saralla, ei vähiten arkkitehtuurissa. Suomalaisia kiinnostavaa on, että Johann II Bernoullin jälkeläinen, toisen polven arkkitehti Paul Bernoulli (1908–1996) opintojensa päätteeksi muutti Suomeen ja asettui Alvar Aallon arkkitehtitoimiston palvelukseen. Hän ehti toimia mm. Salon kaupunginarkkitehtina, ja hänen vanhin poikansa jatkaa Bernoulli-suvun arkkitehtuuriperinnettä Suomessa. Sukutauluista kiinnostunut voi nähdä Bernoullien Suomeen tulossa viehättävää kohtalon leikkiä, sillä Alvar Aalto on läheistä sukua Anders Johan Lexellille, jonka läheinen kollega oli Johann III Bernoulli.

Professori Fritz Nagel esittelee Bernoulli-edition julkaistuja volyymeja Baselin yliopiston kirjastossa. Helsingin yliopiston kirjastossa teoksista on suurin osa, mutta koko kokoelma olisi syytä hankkia, ovathan Bernoullit nykyisin osa Suomenkin kulttuurihistoriaa. (Kuva: kirjoittaja, 2010).

Bernoulli-tutkimus tänään

Sveitsissä Bernoulli-suvun ja heidän lähipiiriinsä kuuluneen Leonhard Eulerin merkitys tieteen historialle on tiedostettu hyvin. Heidän teostensa ja kirjeenvaihtonsa kokonaisjulkaisuhanke on ylisukupolvinen jättiläisprojekti. Sveitsin tiedeakatemia käynnisti Eulerin koottujen teoksien julkaisemisen vuonna 1907.

Yli sadan vuoden uurastuksen jälkeen työ alkaa olla loppusuoralla. Vielä valtavampi hanke on Bernoullien koottujen teosten editointi johtuen jo siitäkin, että heitä on niin monta. Hankkeen nykyinen johtaja on Fritz Nagel, jonka toimipaikka on Baselin yliopiston kirjastossa. Bernoullien kirjeenvaihdon inventaarioprojekti on tätä nykyä siirretty tietoverkkoon kaikkien tutustuttavaksi (`http://www.ub.unibas.ch/bernoulli/index.php/Briefinventar`). Organisatorisesti Eulerin ja Bernoullien tutkimuskeskukset on äskettäin yhdistetty *Bernoulli-Euler-Zentrum*iksi, jonka julkaisuhankkeista suomalainen Anders Johan Lexellkin tulee löytämään oman paikkansa.

Kirjallisuutta

Bernoulli-Sutter, René (1972). *Die Familie Bernoulli.* Basel: Helbing & Lichtenhahn.

Darrigol, Olivier (2005). *Worlds of Flow – A History of Hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl.* Oxford: Oxford University Press.

Dictionary of Scientific Biography (1970–1980). New York: Charles Scribner's Sons. (Artikkelit Bernoulleista).

Goldstine, Herman (1980). *History of the Calculus of Variations from the Seventeenth Through the Nineteenth Century.* New York: Springer-Verlag.

Kline, Morris (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times.* Vol. 2. Oxford: Oxford University Press.

Nagel, Fritz (2005). "'Sancti Bernoulli orate pro nobis'. Emilie du Châtelet's Rediscovered. *Essai sur l'optique* and Her Relation to the Mathematicians from Basel". Teoksessa: Ruth Hagengruber (ed.), *Emilie du Châtelet Between Leibniz and Newton.* Archives internationales d'histoire des idées. Vol. 205, Dordrecht et al.: Springer Verlag.

Pekonen, Osmo (2002). *La rencontre des religions autour du voyage de l'Abbé Réginald Outhier en Suède en 1736–1737.* Rovaniemi: Lapland University Press.

Sierksma, Gerard (1992). "Johann Bernoulli (1667–1748): His Ten Turbulent Years in Groningen", *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 14, No. 4, ss. 22–31.

Rodhe, Staffan (2002). *Matematikens utveckling i Sverige fram till 1731.* Uppsala: Uppsala Universitet.

Shank, J. B. (2008). *The Newton wars and the beginning of the French Enlightenment.* Chicago: Chicago University Press.

Speiser, David (1992). "The Bernoullis in Basel". *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 14, No. 4, ss. 46–47.

Stén, Johan (2007). "Euler – moderni kolmesataavuotias". *Tieteessä tapahtuu*, No. 8, ss. 3–9.

Sussmann, Héctor J. ja Jan C. Willems (2002). "The Brachistochrone problem and modern control theory". Teoksessa: *Contemporary trends in nonlinear geometric control theory and its applications.* Singapore: World Scientific.

Terrall, Mary (2002). *The man who flattened the Earth. Maupertuis and the sciences in the Enlightenment.* Chicago: Chicago University Press.

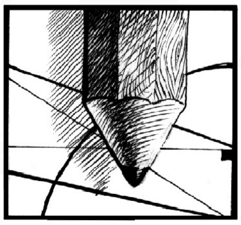
Solmun matematiikkadiplomit

Peruskoululaisille tarkoitetut Solmun matematiikkadiplomit I – VIII tehtävineen ovat tulostettavissa osoitteessa

`http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html`

Opettajalle lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pyynnön voi lähettää osoitteella

marjatta.naatanen(at)helsinki.fi



Yksi tehtävä, monta ratkaisua

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Marraskuussa 2012 pidetyn Lukion matematiikkakilpailun avoimen sarjan ensimmäisen kierroksen neljäs tehtävä oli seuraava:

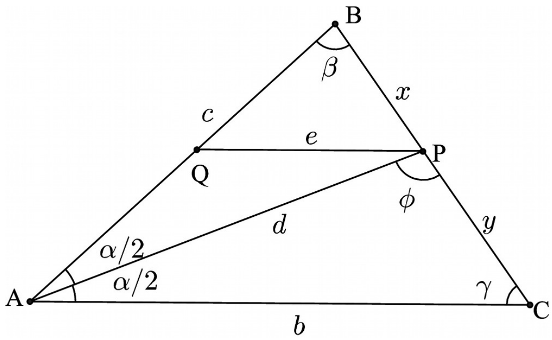
Terävän kulman $\angle A$ puolittajalta valitaan piste P ja toiselta kyljeltä piste B. BP:n jatke leikkaa toisen kyljen pisteessä C. Osoita, että lausekkeen

$$\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|AC|}$$

arvo ei riipu pisteen B valinnasta, kun P pidetään paikallaan.

Kuten odottaa sopi, tehtävä osoittautui varsin vaikeaksi geometrian ja todistamisen melko kaukaa kiertävän opetussuunnitelmamme mukaan opiskelleille kilpailijoille: vain alle 10 % osallistujista osasi kirjoittaa hyväksyttävän ratkaisun. Kilpailutilanteessa ei toisaalta ole liikaa aikaa ja ratkaistavana on muitakin tehtäviä, joten tästä vaatimattomasta tuloksesta ei kannata liian syvällisiä johtopäätöksiä tehdä.

Mutta tämä tehtävä on siitä hauska, että sitä voi lähestyä varsin monesta suunnasta, ja aina pääsee maaliin. Ennen kuin lähdetään kulkemaan näitä polkuja, sovitaan muutamasta merkinnästä; kaikkia ei kuitenkaan tarvita kaikissa ratkaisuissa. Olkoon $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, $AB = c$, $AC = b$, $\angle APC = \phi$ ja $AP = d$. Olkoon vielä Q se AB:n piste, jolle AC ja QP ovat yhdensuuntaiset ja $QP = e$. (Emme käytä janan pituuksille itseisarvomerkkejä, niin kuin tehtävän tekstissä tehtiin.)



Kilpailutoimikunta tarjosi malliratkaisuksi seuraavaa yksinkertaista päättelyä, jonka ydin on monesti käyttökelpoinen idea ”laske sama asia kahdella eri tavalla”.

1. ratkaisu. Kolmion ACB kaksinkertainen ala on $bc\sin\alpha$. Tämä ala on myös kolmioiden ACP ja APB kaksinkertaisten alojen $bd\sin\dfrac{\alpha}{2}$ ja $dc\sin\dfrac{\alpha}{2}$ summa. Kun yhtälö

$$bd\sin\frac{\alpha}{2} + dc\sin\frac{\alpha}{2} = bc\sin\alpha$$

jaetaan puolittain bc:llä, saadaan

$$\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right) d\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha.$$

Koska α ei riipu pisteen B valinnasta, ei myöskään lauseke

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$$

siitä riipu.

Useimmat tehtävän onnistuneesti ratkaisseet kilpailijat lähestyivät sitä sinilauseen kautta. Polku ratkaisuun voi nyt hiukan vaihdella, mutta se on kaikissa tapauksissa edellistä pinta-aloihin perustuvaa päättelyä mutkallisempi ja tarvitsee joitain trigonometrisia temppuja.

2. ratkaisu. Kolmiosta ACP saadaan

$$\frac{d}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\phi}$$

ja kolmiosta APB

$$\frac{d}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin(180^\circ - \phi)} = \frac{\sin\beta}{\sin\phi}.$$

Näin ollen

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\sin\beta + \sin\gamma}{\sin\phi}.$$

Yhtälön oikealla puolella on kolme B:n sijainnista riippuvaa kulmaa. Yksi hyvä tapa edetä on käyttää trigonometrian kaavastoa ja seuraavaa yksinkertaista algebrallista havaintoa: kahdesta luvusta toinen on lukujen keskiarvo lisättynä lukujen erotuksen puolikkaalla, toinen keskiarvo vähennettynä samalla puolikkaalla. Tämä huomio ja sinin yhteenlaskukaava johtavat (tunnettuun, muttei kovin helposti ulkoa muistettavaan) tulokseen

$$\begin{aligned}\sin\beta + \sin\gamma &= \sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\beta-\gamma}{2}\right)\\ &\quad + \sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\beta-\gamma}{2}\right)\\ &= 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}.\end{aligned}$$

Siis

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{d}\cdot\frac{\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\phi}. \tag{1}$$

Suure $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$ ei riipu B:n sijainnista. Entä $\beta - \gamma$ ja ϕ? Katsotaan vielä kolmioita ACP ja APB. Kolmion kulman vieruskulma on kolmion kahden muun kulman summa, joten $\beta + \frac{\alpha}{2} = \phi$ ja $\gamma + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - \phi$. Kun nämä yhtälöt vähennetään toisistaan, saadaan $\beta - \gamma = 2\phi - 180^\circ$ ja $\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \cos(\phi - 90^\circ) = \sin\phi$. $\sin\phi$ supistuu pois kaavasta (1), joten väite on todistettu. Mutta on toki mukava laskea tehtävässä kysytyn lausekkeen arvo. Se on

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{d}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Kun lauseketta verrataan kuvaan, havaitaan, että itse asiassa

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{PQ}.$$

Koordinaatisto ja analyyttinen geometria tarjoavat oman keinomaailmansa käsillä olevan tehtävän ratkaisuun. Suora, leikkauspiste ja pisteiden välinen etäisyys ovat analyyttisessä geometriassa yksinkertaisia asioita, mutta suorien välinen kulma, joka tehtävässä ilmenee kulman puolittajan mukana olemisena, saattaa olla hankalasti käsiteltävä. Analyyttistä geometriaa käytettäessä on kuitenkin usein mahdollista yksinkertaistaa asioita järkevillä valinnoilla.

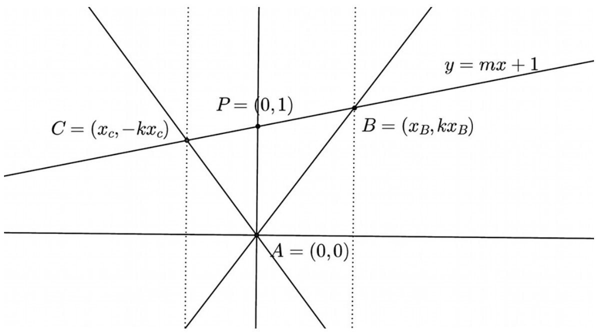
3. ratkaisu. Viisas valinta on ottaa kulman $\angle A$ puolittajaksi koordinaattiakseli, kaikkein edullisimmin y-akselin (jotta vältytään tapauksen $BC \perp AP$ käsittelemisestä erikseen), ja pisteiksi A ja P kiinteät y-akselin pisteet, vaikkapa $A = (0,0)$ ja $P = (0,1)$. Kulman $\angle A$ kyljet tulevat nyt olemaan suoria, joiden kulmakertoimet ovat itseisarvoltaan yhtä suuret ja vastakkaismerkkiset. Suoran AB yhtälö voi siis olla $y = kx$ ja suoran AC $y = -kx$, missä k on positiivinen vakio. Suora AB on jokin pisteen $(0,1)$ kautta kulkeva suora, siis $y = mx + 1$. Koska tämä suora leikkaa kulman $\angle A$ molemmat kyljet, on oltava $|m| < k$. Pisteet B ja C ovat suorien $y = kx$ ja $y = mx + 1$ ja suorien $y = -kx$ ja $y = mx + 1$ leikkauspisteet. Leikkauspisteiden x-koordinaatit ovat

$$x_B = \frac{1}{k-m}, \quad x_C = -\frac{1}{k+m}.$$

Yhdenmuotoisista suorakulmaisista kolmioista nähdään heti, että hypotenuusat AB ja AC ovat verrannollisia kateetteihin x_B ja $|x_C|$. Mutta

$$\frac{1}{x_B} + \frac{1}{|x_C|} = k - m + k + m = 2k.$$

Suure ei riipu m:stä, joten väite on todistettu.



Koordinaattitaso, xy-taso, on rakenteeltaan käytännöllisesti katsoen sama kuin kompleksilukujen $z = x + iy$ muodostama joukko, *kompleksitaso*. Ei ole yllättävää, että samat päättelyt, jotka voi suorittaa xy-tasossa, voi siirtää kompleksiluvuilla tapahtuviksi. Muutamat kompleksilukujen ominaisuudet saattavat toisinaan helpottaakin ratkaisua. Yksi käsillä olevan tehtävän kompleksilukuja hyödyntävä ratkaisu voisi olla seuraava.

4. ratkaisu. Valitaan kulman puolittajaksi reaaliakseli, pisteeksi A kompleksiluku 0 ja pisteeksi P kompleksiluku 1. Jos z on jokin suoran AB kiinteä piste, niin piste B on tz, missä t on jokin reaaliluku. Nyt kompleksiluvun $z = x + iy$ liittoluku $\overline{z} = x - iy$ on z:n kanssa symmetrinen reaaliakselin suhteen. Se on siis suoran AC piste. Piste C on siis $u\overline{z}$, missä u on reaaliluku. t ja u eivät ole mielivaltaisia: niitä sitoo se ehto, että suora BC kulkee P:n kautta. Kompleksiluvuin ilmaistuna tämä on $tz - 1 = k(1 - u\overline{z})$, missä k edelleen on jokin positiivinen reaaliluku. Mutta kompleksiluvut ovat samat, jos ja vain jos niiden liittoluvut ovat samat. Tämä merkitsee sitä, että t ja u toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} zt + k\overline{z}u = k + 1 \\ \overline{z}t + kzu = k + 1. \end{cases}$$

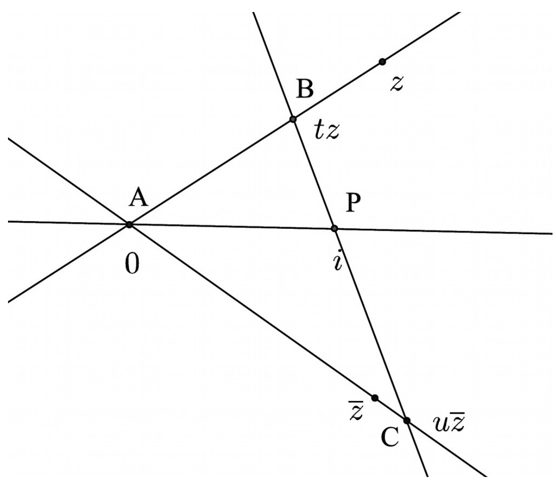
Ratkaistaan tämä: tavalliseen tapaan saadaan

$$t = \frac{(k+1)(z-\overline{z})}{z^2 - \overline{z}^2}, \quad u = \frac{(k+1)(z-\overline{z})}{k(z^2 - \overline{z}^2)}.$$

Mutta nyt saadaankin

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} &= \frac{1}{t|z|} + \frac{1}{u|z|} \\ &= \left(\frac{1}{k+1} + \frac{k}{k+1}\right) \frac{z^2 - \overline{z}^2}{|z|(z - \overline{z})} \\ &= \frac{z^2 - \overline{z}^2}{|z|(z - \overline{z})}. \end{aligned}$$

Koska z on kiinteä suoran AB piste, lausekkeen arvo ei riipu B:n valinnasta.



Edellisessä ratkaisussa käytetyt operaatiot, kompleksilukujen yhteenlasku ja kompleksiluvun kertominen reaaliluvulla, ovat olennaisesti samoja kuin tason vektorien vastaavat laskutoimitukset. Ei ole yllättävää, että tehtävä voidaan ratkaista myös tavallisilla vektorilaskennan keinoilla.

5. ratkaisu. Valitaan taas piste A origoksi. Pisteen P paikkavektoriksi voidaan ottaa $\overrightarrow{AP} = \vec{i}$: kulman $\angle A$ puolittaja on siis positiivinen x-akseli. Kulman kyljet tulevat kiinnitetyiksi, kun kummaltakin valitaan x-akselin suhteen symmetrinen piste. Nämä voivat olla B' ja C', niin että $\overrightarrow{AB'} = \vec{i} + k\vec{j}$ ja $\overrightarrow{AC'} = \vec{i} - k\vec{j}$, missä k on jokin positiivinen luku. Huomataan, että $|\overrightarrow{AB'}| = |\overrightarrow{AC'}|$. Suorien AB' ja AC' pisteet B ja C ovat nyt sellaisia, että $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AB'} = t(\vec{i} + k\vec{j})$ ja $\overrightarrow{AC} = u\overrightarrow{AC'} = u(\vec{i} - k\vec{j})$, missä t ja u ovat positiivisia lukuja. Näitä lukuja sitoo toisiinsa se, että B, P ja C ovat samalla suoralla. Samalla suoralla olemisen (ja sen, että P on B:n ja C:n välissä) ehto on, että $\overrightarrow{PB} = s\overrightarrow{CP}$ jollain positiivisella luvulla s. Mutta $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} = t(\vec{i} + k\vec{j}) - \vec{i} = (t-1)\vec{i} + tk\vec{j}$ ja $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC} = \vec{i} - u(\vec{i} - k\vec{j}) = (1-u)\vec{i} + ku\vec{j}$. Pisteiden B, P ja C samalla suoralla olemisen ehto sisältyy siis vektoriyhtälöön

$$(t-1)\vec{i} + tk\vec{j} = s(1-u)\vec{i} + sku\vec{j}.$$

Tällainen vektoriyhtälö toteutuu, jos kantavektoreiden $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ kertoimet ovat samat yhtälön molemmilla puolilla. On siis oltava voimassa yhtälöpari

$$\begin{cases} t - 1 = s(1-u) \\ tk = sku. \end{cases}$$

Tästä on helppo ratkaista

$$t = \frac{s+1}{2}, \quad u = \frac{s+1}{2s}.$$

Nyt on

$$\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{1}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{t|\overrightarrow{AB'}|} + \frac{1}{u|\overrightarrow{AC'}|} = \frac{2(1+s)}{(s+1)|\overrightarrow{AB'}|}.$$

Lausekkeen arvo ei riipu B:n valinnasta eli parametrista t.

Ehkä – kilpailutoimikunnan tarjoaman ratkaisun ohessa – yksinkertaisin ratkaisu perustuu kuitenkin ihan perusgeometriaan.

6. ratkaisu. Olkoon $BP = x$ ja $PC = y$. Tunnetusti kolmion kulman puolittaja jakaa vastakkaisen sivun viereisten sivujen suhteessa. Siis

$$\frac{b}{c} = \frac{y}{x}.$$

Yhdenmuotoisista kolmioista BAC ja BQP nähdään heti, että

$$\frac{x}{x+y} = \frac{e}{b}.$$

Siis

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{y}{xb} = \frac{x+y}{x}\frac{1}{b} = \frac{b}{e}\frac{1}{b} = \frac{1}{e}.$$

Koska $e = AP$ ei riipu B:stä, todistus on valmis (ja tehtävän lausekkeelle saatiin selvä geometrinen merkitys).

Tätä viimeistä ratkaisua ei – niin kuin ei sitä edeltäviä kompleksiluku- tai vektoriratkaisuakaan – kukaan kilpailija ehdottanut.

Geometrisia havaintoja tekemässä

Riikka Kangaslampi, Helle Majander
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

Missä on matematiikkaa – tai oikeastaan, missä sitä ei olisi? Aalto-yliopiston Matematiikan ja systeemianalyysin laitoksen järjestämällä matematiikkaleirillä tarkasteltiin erilaisia geometriaan tavalla tai toisella liittyviä ilmiöitä kuten permutaatioita ja symmetrioita Zometool-rakennelmissa, jongleerausta, kaksi- ja kolmiulotteisia toruksia, fraktaaleita ja graafeja.

Kuva 1: Leiriporukka kartanon portailla.

Leiri järjestettiin lokakuun 2012 ensimmäisenä viikonloppuna Sannäsin kartanon syksyisissä maisemissa Porvoossa. Pääohjaajina toimivat tutkijat Riikka Kangaslampi ja Matthew Stamps, joiden apuna touhusivat opiskelijat Jouko Lehtomäki ja Helle Majander. Leirille osallistui yhteensä 24 ensimmäisen ja toisen vuoden lukio-opiskelijaa Olarista ja Pohjois-Tapiolasta (Kuva 1).

Sannäsin kartano tarjosi leirille erinomaiset puitteet. Koko porukka nautti saunomisesta ja uimisesta sekä hyvästä ruoasta, mutta opittiin siellä matematiikkaakin.

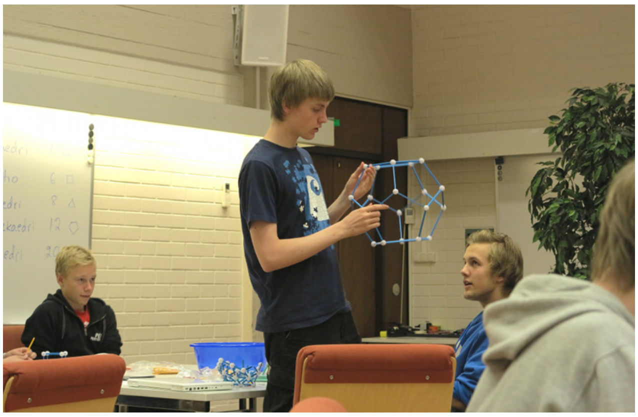
Geometriaa Zometool-tikuilla

Leirin ensimmäisen varsinaisen ohjelman aikana esiteltiin Zometool-tikut [1], joiden avulla tarkasteltiin säännöllisiä monitahokkaita ja niiden symmetrioita. Tikuilla saatiin rakennettua kaikki erilaiset Platonin kappaleet (Kuva 2). Niiden avulla opittiin esimerkiksi, mitkä kappaleet ovat toistensa duaaleja ja tutustuttiin konveksisuuden käsitteeseen. Lisäksi tarkasteltiin kappaleiden symmetriatasoja (peilaus) ja -akseleita (kierto).

Platonin kappaleita täydentämällä nähtiin Kepler-Poinsotin monitahokkaiden idea, vaikka Zometool-tikuilla näitä kappaleita ei aivan täydellisesti voikaan rakentaa. Lopuksi johdettiin Platonin kappaleille Eulerin karakteristika

$$F - E + V = 2,$$

missä F on tahkojen, E särmien ja V kärkien lukumäärä.



Kuva 2: Felix selittää, miksi Platonin kappaleita on olemassa vain viisi erilaista.

Jongleerauksen matematiikkaa

Perjantai-iltana leirillä pyörähti vierailevana tähtenä lehtori ja jonglööri Harri Varpanen (Kuva 3). Harri kertoi innostuneensa jongleerauksesta opiskeluaikoina, matematiikan hän oli kuitenkin löytänyt ensin. Tästä syystä tuntui luontevalta yhdistää mielenkiinnon kohteet ja tutkia jongleerauksen matemaattista mallia. Esityksessään Harri käsitteli jaksollisten jongleerauskuvioiden teoriaa, josta hän on kirjoittanut Solmussakin (3/2005).

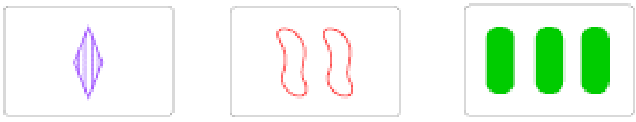
Kuva 3: Harri demonstroi jongleerauskuvioita.

Kombinatoriikkaa SET-pelin avulla

Viikonlopun aikana tutustuttiin SET-korttipeliin [2] ja tutkittiin siihen liittyviä kombinatorisia kysymyksiä. Peliä pelataan kuviokorteilla. Jokaisella kortilla on neljä kuvioihin liittyvää ominaisuutta, joista kukin voi saada kolme eri arvoa:

Lukumäärä	{yksi, kaksi, kolme}
Täyttö	{täysi, raidallinen, tyhjä}
Väri	{punainen, vihreä, violetti}
Muoto	{soikio, koukero, salmiakki}

Korttipakka koostuu näiden kaikista mahdollisista yhdistelmistä – siis yhteensä 81 kortista. Pelin tavoitteena on löytää kolmen kortin kokoelmia, joissa kortit ovat jokaisen ominaisuuden kohdalla joko kaikki samanlaisia tai kaikki erilaisia. Tällaista kokoelmaa sanotaan SET:ksi (Kuva 4).



Kuva 4: Esimerkki SET:stä, jossa kortit ovat kaikkien ominaisuuksien osalta erilaisia (värillisessä versiossa).

Pelaamisen lisäksi (Kuva 5) leirillä pohdittiin myös pelin herättämiä matemaattisia kysymyksiä: Kuinka monta erilaista SET:ä on mahdollista muodostaa? Millä todennäköisyydellä esimerkiksi 12 pöydälle satunnaisesti jaetun kortin joukossa on ainakin yksi SET? Kuinka monta korttia pöytään on jaettava, jotta mukana olisi varmasti yksi SET?

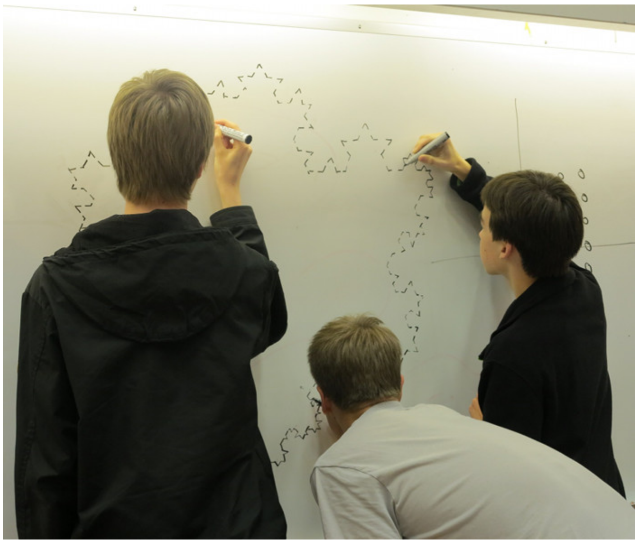
Kuva 5: SET-peliä voi hyvin pelata isollakin porukalla.

Viimeiseen kysymykseen vastaaminen ei ole aivan suoraviivaista. Leirillä ongelma muotoiltiin geometrisesti modulaaristen ryhmien (Solmu 2/2003) avulla. Korttien ominaisuuksien ajateltiin olevan jäännösluokkaryhmän $\mathbb{Z}_3$ alkioita, jolloin kukin kortti voitiin esittää avaruuden $\mathbb{Z}_3^4$ vektorina. Tällöin voitiin todeta, että SET:n etsiminen on yhtäpitävää avaruuden $\mathbb{Z}_3^4$ suoran etsimisen kanssa [5].

Vastauksena kysymykseen: 21 kortin joukossa on aina välttämättä yksi SET. Leirillä todistuksen ideaan tutustuttiin rajoittamalla tarkastelu kortteihin, joissa on punaisia soikioita. Haasteeksi jäi etsiä korttipakasta 20 korttia, joiden joukosta ei löydy yhtään SET:ä.

Fraktaalit ja laatoitukset

Fraktaaliaiheeseen virittäydyttiin katsomalla alan isän, Benoit Mandelbrot'n TED-puhe internetistä [3]. Siitä käy hyvin ilmi fraktaalien luonne itsesimilaarisina kuvioina: mihin tahansa kohtaan tarkennettaessa sama kokonaiskuvio näkyy aina uudelleen ja uudelleen. Esimerkkeinä leirillä käsiteltiin mm. Solmussakin (5/2003) esillä olleita Kochin lumihiutaletta (Kuva 6) ja Sierpinskin kolmiota. Havaittiin, että "äärettömän tarkasti" piirrettäessä Kochin lumihiutaleen reunakäyrä on ääretön, vaikka se rajaa lumihiutaleen, jonka pinta-ala on vain 8/5 kertaa alkuperäisen kolmion pinta-ala.



Kuva 6: Kochin lumihiutaleen piirtäminen käy valkotaululla näppärästi.

Tason laatoituksella tarkoitetaan äärettömän tason peittämistä aukottomasti joukolla monikulmioita, jotka eivät mene päällekkäin (Kuva 7). Nopeasti leiriläiset löysivät kaikki säännölliset eli yhtä säännöllistä monikulmiota toistamalla muodostuvat laatoitukset samoin kuin puolisäännölliset laatoitukset, joissa saa käyttää useita erilaisia säännöllisiä monikulmioita. On olemassa myös täysin epäsäännöllisiä, ns. jaksottomia laatoituksia. Yksi esimerkki tällaisista on Keskuskadun kivetyksenä Helsingissä, nimittäin Roger Penrosen jaksoton laatoitus leija- ja nuolilaatoilla. Kannattaa käydä katsomassa, kun vierailee Helsingin keskustassa!

Kuva 7: Emmi ja Inka tekevät laatoitustaidetta M. C. Escherin tyyliin.

Tästä on hyvä jatkaa

Sunnuntai-iltana leiriltä poistui tyytyväisiä nuoria. SET-pelin pelaaminen jatkui viimeiseen saakka vielä bussissakin. Palautteen perusteella kaikki osallistujat suosittelisivat vastaavaa leiriä muille matematiikasta kiinnostuneille, osa jopa niille, joita matematiikka ei oikein vedä puoleensa. Toivommekin, että voimme järjestää vastaavia tapahtumia myös jatkossa. LUMA Sanomia [4] kannattaakin seurailla Aallon ja muiden yliopistojen tapahtumien löytämiseksi!

"Zomejen avulla oli helppoa tajuta kuviot. Jongleeraus oli hauskaa ja yllätin itseni ymmärtämällä melkein kaiken sen matemaattisen asian."

"Loistava leiri! Haluaisin ensi vuonna uudestaan."

"Oli kiva, että matemaattisia asioita käytiin näin erilailla hahmottamalla."

"Seuraavaksi viikon leiri!"

Viitteet

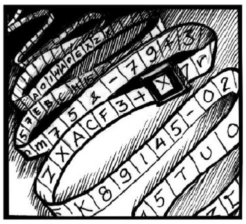
[1] `http://zometool.com/`

[2] `http://www.setgame.com/set/`

[3] `http://www.ted.com/talks/lang/fi/benoit_mandelbrot_fractals_the_art_of_roughness.html`

[4] `http://www.luma.fi`

[5] Benjamin Lent Davis and Diane Maclagan, *The Card Game Set*, `http://www.math.rutgers.edu/~maclagan/papers/set.pdf`



Sumeaa logiikkaa lukiolaisille

Saku Snicker
Helsingin yliopisto

Johdanto

Sumealla logiikalla voidaan tarkoittaa periaatteessa kahta eri asiaa. Toisaalta se viittaa erääseen tiettyyn ei-klassiseen matemaattiseen formaaliin logiikkaan; toisaalta sillä viitataan kaikkeen matematiikkaan, mikä liittyy sumeuteen. Lieneekin paikallaan korostaa heti aluksi, että tässä kirjoituksessa tulemme käyttämään ensimmäistä tulkintaa: esittelemme lyhyesti lähinnä sumean propositiologiikan perusteet. Jälkimmäisen tulkinnan käytön puolesta on tosin puhunut voimakkaasti ”sumean logiikan isä” yhdysvaltalainen matemaatikko Lotfi A. Zadeh, joka itse asiassa aloittikin teoriansa rakentamisen sumeasta joukko-opista.

Mistä tässä sumeudessa sitten on kyse? Lyhyesti sanottuna kyse on jonkinlaisesta epämääräisyydestä, joka eri matematiikan osa-alueilla tulkitaan eri tavoin. Esimerkkinä voitaisiin tarkastella seuraavaa kysymystä joukko-opin alalta: kuuluuko elokuu kesäkuukausien joukkoon? Klassisen, naiivin joukko-opin mukaan joukko on hyvinmääritelty, mikäli jokaisesta oliosta voidaan sanoa, kuuluuko se tähän joukkoon vai ei, mutta kumpikaan näistä vaihtoehdoista ei elokuun tapauksessa oikein tunnu täysin oikealta. Sumea ajattelu pyrkii antamaan vastauksia tämänkaltaisiin ongelmiin.

Sumean ajattelun historia ulottuu antiikin Kreikkaan asti. Tutkielmassaan *De Interpretatione* Aristoteles pohti, onko väite ”Huomenna tulee olemaan meritaistelu” tosi vai epätosi tänään. Jos väite olisi tosi, niin tällöin huomenna tosiaankin aivan varmasti tapahtuisi meritaistelu, minkä hyväksyminen tänään tuntuu epämielekkäältä. Samoin väitteen sanominen epätodeksi tarkoittaisi, että huomenna ei missään nimessä tapahtuisi meritaistelua, mikä tuntuu sekin tänään kovin kummalliselta päätelmältä. Totuuden ja epätotuuden väliin sijoittuu siis eräänlainen harmaa alue, jonka tutkimisessa kunnostautunein henkilö lienee puolalainen matemaatikko Jan Łukasiewicz (1878–1956). Łukasiewicz kehitteli muun muuassa niin sanotun kolmiarvologiikan, jossa totuusarvojen ”tosi” ja ”epätosi” lisäksi otetaan käyttöön kolmas totuusarvo eli ”määräämätön”. Myöhemmin Łukasiewicz yleisti tämän idean useammallekin kuin kolmelle totuusarvolle, ja näitä logiikoita kutsutaankin Łukasiewiczin moniarvologiikoiksi.

Kuten jo aikaisemmin mainittiin, varsinaisena sumean ajattelun kehittäjänä pidetään kuitenkin yhdysvaltalaista matemaatikkoa Lotfi A. Zadehia. Kuuluisassa julkaisussaan ”Fuzzy Sets” [1] Zadeh esitteli ensimmäistä kertaa epämääräisen eli sumean joukon käsitteen. Kriitikot ovat tosin jälkikäteen epäilleet [2], että Zadeh sai kunnian sumean ajattelun keksimisestä lähinnä siksi, että hän keksi antaa artikkelilleen mielenkiintoisen nimen: ”Min- ja max-operaatioiden käytöstä reaalisen yksikkövälin osavälien käsittelyssä” olisi todennäköisesti hautautunut tieteellisten artikkelien harmaaseen massaan. Itävaltalainen matemaatikko Karl Menger oli esimerkiksi jo vuonna 1951 konstruoinut sumean relaation käsitteen idean, mutta hän ei sattunut käyttämään siitä nimitystä ”sumea relaatio”. 1980-luvun lopulla sumea ajattelu löi itsensä lopullisesti läpi muunakin kuin akateemisena näpertelynä, kun Yhdysvalloissa herättiin huomaamaan, että japanilaiset tienasivat sumean ajattelun sovelluksilla melkoisen määrän rahaa. Nykyisin sumeaa logiikkaa käytetäänkin hyvin monissa systeemeissä: esimerkiksi kameroissa, pölynimureissa, pesukoneissa, ilmastoinnin säädössä, autoissa, lentokoneissa ja jopa avaruusaluksissa.

Kuriositeettina mainittakoon, että suomenkielisen termin ”sumea” keksi Turun yliopiston apulaisprofessori Markku I. Nurminen. Hän sai idean ajatellessaan, että valomerkin jälkeen turkulaisesta opiskelijoiden ja taiteilijoiden suosiossa olevasta ravintola Hämeenportista astuu kaupungille sumea joukko.

Klassista propositiologiikkaa

Käsitellään aluksi klassista logiikkaa. Logiikan aivan perustavin käsite on *lause* eli väittämä. Ehkäpä yksinkertaisin esimerkki lauseista on niin sanotun *propositiologiikan* lauseet eli *propositiolauseet*. Intuitiivisesti sanottuna propositiolauseet ovat väittämiä, jotka ilmaisevat, miten jotkin asiat ovat, ja joiden voidaan ajatella olevan aina joko totta tai epätotta. Tarkalleen ottaen propositiolauseet voidaan määritellä seuraavasti: yksinkertaisimpia propositiolauseita ovat *propositiosymbolit* $p_0, p_1, p_2, \ldots$, joita myös atomilauseiksi kutsutaan. Nämä ovat propositiolauseita, jotka on muodostettu ilman sidossanojen, kuten ”ja”, ”tai” ja ”jos... niin”, käyttöä. Esimerkiksi ”$6 > 2$” ja ”Kuu on juustoa” ovat siis atomilauseita, joista ensimmäinen on totta ja jälkimmäinen epätotta. Sen sijaan ”Olkoon x reaaliluku”, ”Lupaan käydä kaupassa huomenna”, ”Ostin kaupasta maitoa ja maksoin sen käteisellä” ja ”Äygäbäy 1927566688” eivät ole propositiologiikan atomilauseita (miksi?).

Alla olevia symboleita puolestaan kutsutaan *konnektiiveiksi*. Niiden avulla saadaan mukaan propositiolauseisiin myös mm. edellämainittuja ”ja”, ”tai” ja ”jos... niin” -rakenteita sisältävät lauseet:

- $\neg$ negaatio (vastaa ei-sanaa, eli väite ei päde)
- $\wedge$ konjunktio (vastaa ja-sanaa, eli molemmat väitteet pätevät)
- $\vee$ disjunktio (vastaa tai-sanaa, eli ainakin toinen väitteistä pätee)
- $\rightarrow$ implikaatio (jos ensimmäinen väite pätee, niin toinen väite pätee)
- $\leftrightarrow$ ekvivalenssi (molemmat väitteet joko pätevät tai eivät päde).

Propositiosymbolien ja konnektiivien avulla voidaan nyt määritellä induktiivisesti kaikki propositiolauseet.

Määritelmä 1. ***Propositiolauseiksi*** *sanotaan seuraavien sääntöjen avulla propositiosymboleista, konnektiiveista sekä sulkumerkeistä ”(” ja ”)” muodostettuja merkkijonoja:*

1. *Propositiosymbolit* $p_0, p_1, p_2, \ldots$ *ovat propositiolauseita.*
2. *Mikäli merkkijonot A ja B ovat propositiolauseita, niin merkkijonot $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ ja $(A \leftrightarrow B)$ ovat propositiolauseita.*

Esimerkki 1. *Olkoon p_0 atomilause ”On syksy”, p_1 atomilause ”Sataa vettä” ja p_2 atomilause ”Puiden lehdet putoavat”. Lause ”Ei ole syksy” voidaan nyt formalisoida merkinnällä $\neg p_0$, ja lause ”Jos on syksy, niin sataa vettä ja puiden lehdet putoavat” voidaan formalisoida merkinnällä $(p_0 \rightarrow (p_1 \wedge p_2))$.*

Atomilauseiden totuus riippuu tietysti monesta asiaintilasta. Tätä tekstiä kirjoittaessa Helsingissä sataa, joten edellisen esimerkin atomilause p_1 on tällä hetkellä totta. Mutta jos atomilauseiden totuus tiedetään, niin miten päätellään muiden propositiolauseiden totuus? Tähän tarvitaan totuusjakauman ja totuusarvojen käsitteitä. Merkitsemme seuraavassa totuutta numerolla 1 ja epätotuutta numerolla 0.

Määritelmä 2. ***Totuusjakauma*** *on mikä tahansa funktio $v : \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$. Propositiolauseen A* ***totuusarvo jakaumalla*** *v, merkitään $v[A]$, määritellään seuraavasti:*

1. $v[p_n] = v(n)$ *kaikilla* $n \in \mathbb{N}$
2. $v[\neg A] = 0$, *mikäli* $v[A] = 1$, *ja* $v[\neg A] = 1$, *mikäli* $v[A] = 0$
3. $v[(A \wedge B)] = 1$, *jos sekä* $v[A] = 1$ *että* $v[B] = 1$, *muutoin* $v[(A \wedge B)] = 0$
4. $v[(A \vee B)] = 1$, *jos* $v[A] = 1$ *tai* $v[B] = 1$, *muutoin* $v[(A \vee B)] = 0$
5. $v[(A \rightarrow B)] = 1$, *jos* $v[A] = 0$ *tai* $v[B] = 1$, *muutoin* $v[(A \rightarrow B)] = 0$
6. $v[(A \leftrightarrow B)] = 1$, *jos* $v[A] = v[B]$, *muutoin* $v[(A \leftrightarrow B)] = 0$.

Totuusjakauma siis määrää suoraan, mitkä atomilauseista p_n ovat totta ja mitkä ei. Monimutkaisempien lauseiden totuudet päätellään edellisten sääntöjen avulla, ja ne on näppärä esittää taulukoiden eli niin sanotuilla *totuustauluilla*. Edellisen määritelmän perusteella totuustaulut konnektiiveille näyttävät seuraavilta:

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$(A \wedge B)$	$(A \vee B)$	$(A \to B)$	$(A \leftrightarrow B)$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Sumeaa propositiologiikkaa

Vaikka edellä esitellyllä propositiolauseen käsitteellä voidaankin jo ilmaista monia asioita, on se silti suhteellisen rajoittunut. Esimerkkinä voitaisiin tarkastella mukaelmaa johdantokappaleen esimerkistä: onko väite ”Elokuu on kesäkuukausi” propositiolause, eli toisin sanoen voidaanko sanoa, että se olisi joko tosi tai epätosi? On vaikea päättää yksikäsitteisesti, pitääkö edellinen väite paikkansa vai ei, joten näinkin yksinkertainen lause joudutaan hylkäämään propositiologiikan lauseiden joukosta.

Sumean logiikan yleistys propositiologiikkaan on kaikessa yksinkertaisuudessaan seuraavanlainen: *sumeiden propositiolauseiden* totuusarvojen ei vaaditakaan olevan diskreetisti joko 0 tai 1, vaan ne voivat olla mitä tahansa suljetulta väliltä $[0, 1]$. Siis *sumea totuusjakauma* on mikä tahansa funktio $u : \mathbb{N} \to [0, 1]$.

Esimerkki 2. *Merkitaan väitteitä ”Heinäkuu on kesäkuukausi”, ”Elokuu on kesäkuukausi” ja ”Syyskuu on kesäkuukausi” symboleilla p_0, p_1 ja p_2. Eräs mahdollisuus määritellä näille väitteille sopiva sumea totuusjakauma u on määritellä $u(0) = 1$, $u(1) = 0{,}7$ ja $u(2) = 0{,}3$.*

Edellisessä esimerkissä tulee esiin hyvin sumean ajattelun eräs ominaispiirre: sen mukanaan tuoma epämääräisyys on aina subjektiivista. Voisihan joku olla vaikkapa sitä mieltä, että väite ”Elokuu on kesäkuukausi” on täysin totta – tai että sen totuusarvon tulisi olla pienempi kuin 0,7. Tietysti selvissä tilanteissa, kuten ”Heinäkuu on kesäkuukausi” tai ”Tammikuu on kesäkuukausi”, totuusarvo on helppo antaa, mutta näin on asiain laita myös klassisessa logiikassa: sumea logiikka antaakin edes jonkinlaisen viitekehyksen tarkastella niitä tilanteita, jotka eivät ole äkkiseltään niin selviä.

Koska eri totuusarvoja eli välin $[0, 1]$ pisteitä on ääretön määrä, käy konnektiivien totuusarvojen esittäminen totuustauluilla hieman hankalaksi. Tarvitaankin siis vähän näppärämpi tapa määritellä esimerkiksi negaation totuusarvo tai kahden propositiolauseen konjunktion ja disjunktion totuusarvo. Tämä tehdään seuraavasti:

Määritelmä 3. *Olkoot A ja B sumeita propositiolauseita, joilla $u[A] = a$ ja $u[B] = b$. Tällöin määritellään*

1. $u[\neg A] = 1 - a$

2. $u[(A \wedge B)] = \min\{a, b\}$

3. $u[(A \vee B)] = \max\{a, b\}$.

Idea määritelmissä on se, että ne toimivat normaalisti klassisessa tapauksessa, jossa propositiolauseet ovat joko täysin totta tai täysin epätotta. Jos esimerkiksi sumea propositiolause A on täysin totta (eli $u[A] = 1$) ja sumea propositiolause B on täysin epätotta (eli $u[B] = 0$), niin $u[(A \wedge B)] = \min\{1, 0\} = 0$, joten sumea propositiolause $(A \wedge B)$ on täysin epätotta – kuten klassisen propositiologiikan nojalla pitääkin. Samoin nähdään, että tässä tapauksessa sumea propositiolause $(A \vee B)$ on täysin totta.

Itse asiassa on olemassa vieläkin yleisempi tapa määritellä negaation, konjunktion ja disjunktion totuusarvot. Tämä toteutuu niin sanottujen *yleisten negaatioiden*, *t-normien* ja *s-normien* avulla. Niiden tulee käyttäytyä klassisessa tapauksessa kuten klassisten vastineidensa, ja lisäksi niiltä vaaditaan myös joitakin muita ominaisuuksia. Emme kuitenkaan perehdy tähän sen enempää.

Lukijalle herännee seuraavaksi mieleen kysymys, miten implikaation ja ekvivalenssin totuusarvot määräytyvät sumeassa logiikassa. Valitettavasti asia ei ole niiden tapauksessa yhtä helppoa. Vaikka olisimme valinneet konjunktiota ja disjunktiota vastaavaksi t-normiksi ja s-normiksi minimin ja maksimin, niin jää silti monta erilaista epäyhtäpitävää mutta silti järkevää tapaa määritellä sumea implikaatio. Monet näistä määritelmistä perustuvat ideaan, jossa pyritään löytämään jokin toinen propositiolause, jolla on klassisessa propositiologiikassa kaikilla mahdollisilla totuusjakaumilla sama totuusarvo kuin implikaatiolla $(A \to B)$. Tällaisia ovat esimerkiksi propositiolauseet $(\neg A \vee B)$ ja $((A \wedge B) \vee \neg A)$: ensimmäistä vastaavuutta käyttäen muodostettua implikaatiota kutsutaan *Łukasiewiczin implikaatioksi*, ja jälkimmäisen avulla muodostettua implikaatiota kutsutaan *Zadehin implikaatioksi.*

Lopuksi

Kuten johdannossa mainittiin, edellisessä kappaleessa esitelty klassisten käsitteiden sumentaminen on mahdollista tehdä monella eri matematiikan alalla. Ehkäpä tunnetuin näistä on joukko-oppi, jossa sumentaminen toteutetaan siten, että alkio voi kuulua joukkoon myös osittain: sen niin sanotun *jäsenyysfunktion* arvo voi siis olla mitä tahansa väliltä $[0, 1]$, jossa jäsenyysfunktion arvo 0 vastaa tilannetta, jossa alkio ei kuulu joukkoon lainkaan, ja jäsenyysfunktion arvo 1 vastaa tilannetta, jossa alkio kuuluu joukkoon täysin. Klassisen joukko-opin tulokset, kuten myös klassisen logiikan tulokset, yleistyvät suurilta osin sumeaan joukko-oppiin ja sumeaan logiikkaan. Poikkeuksiakin kuitenkin on: esimerkiksi klassisilla joukoilla pätevä laki $A \cap \complement A = \emptyset$ ei päde sumeilla joukoilla. Sumeassa logiikassa tämä vastaa sitä tilannetta, että propositiolause ($A \wedge \neg A$) ei olekaan niin sanottu *ristiriita* eli propositiolause, jonka totuusarvo on 0 kaikilla totuusjakaumilla. Asiasta kiinnostuneille mainittakoon, että lähteessä [2] on esitetty kattavasti ja selkeästi myös sumean joukko-opin perusteet. Lisäksi se sisältää mainion ja laajan kirjallisuusluettelon, josta löytää lisälukemista yleisistä sumean logiikan oppikirjoista sumeaan differentiaalilaskentaan.

Monet ovat kritisoineet sumeaa ajattelua siitä, että siinä ei ole itse asiassa kyse mistään muusta kuin todennäköisyyslaskennasta uudelleen formalisoituna. Asia ei ole kuitenkaan näin yksinkertainen, sillä on olemassa monenlaista muutakin epämääräisyyttä kuin satunnaisuuden määräämää stokastisuutta. Esimerkit meritaistelusta ja kesäkuukausista ovat siinä mielessä huonoja, että niiden epämääräisyys liittyy satunnaisuuteen: voidaan ajatella, että meritaistelu tapahtuu tietyllä todennäköisyydellä, ja että elokuu on kesäkuukausi tietyllä todennäköisyydellä. Parempi esimerkki puhtaasta sumeudesta olisikin seuraava: onko 180 cm pitkä ihminen kookas vai ei? Kysymys on taas selvästi käsitteen "kookas" subjektiivisesta epämääräisyydestä eli sumeudesta, mutta nyt sumeus ei esimerkiksi selkene ajan kanssa. Ei ole kovinkaan järkevää esimerkiksi ajatella, että tänään 180 cm pitkä ihminen voisi olla kookas, mutta huomenna jollakin tietyllä todennäköisyydellä näin ei olisi.

Kaiken kaikkiaan sumean ajattelun voitaneen kuitenkin sanoa olevan melko kätevä tapa kuvata ihmisten luontaista ajattelutapaa. Ihmiselämässä kun asiat ovat harvoin täysin mustavalkoisia.

Kiitokset vielä Kaarlo Reippaalle mainiosta klassisen logiikan oppimateriaalista, jota on käytetty apuna tämän kirjoituksen klassisen logiikan osion kirjoittamisessa.

Viitteet

[1] Lotfi A. Zadeh, 1965, Fuzzy sets, *Information and Control*, v. 8.

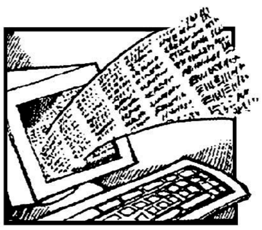
[2] Jorma K. Mattila, *Sumean logiikan oppikirja,* 2. painos, Art House, Hakapaino Oy, Helsinki, 1998.

Kilpailumatematiikan opas ilmestynyt

Suomen matemaattisen yhdistyksen Valmennusjaosto on julkaissut 108-sivuisen Kilpailumatematiikan oppaan. Kirjassa esitellään tiiviisti mutta melko kattavasti niitä matematiikan alueita, joilta erilaisten matematiikan koululaiskilpailujen tehtävät yleensä valitaan. Nämä alueet, algebra, geometria, lukuteoria ja kombinatoriikka eivät ole erityisen vahvasti esillä peruskoulun ja lukion matematiikanopetuksessa, ei myöskään täsmällinen matemaattinen todistaminen. Ainakin erilaisiin kansainvälisiin matematiikkakilpailuihin osallistujan olisi tutustuttava melko laajaan nykyisen koulumatematiikan ulkopuolelle jäävään matematiikan kenttään. Kilpailumatematiikan opas antaa ensimmäisen kerran mahdollisuuden aloittaa tämä tutustuminen suomen kielellä.

Teknologiateollisuuden 100-vuotissäätiön Valmennusjaostolle myöntämä apuraha tekee mahdolliseksi toistaiseksi jakaa opasta tarvitsijoille maksutta. Opasta voi tilata Matti Lehtiseltä, matti.lehtinen@helsinki.fi. Opas on myös vapaasti ladattavissa Valmennusjaoston verkkosivuilta osoitteesta

`http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/kirjallisuus/kilpmatopas.pdf`



Tarvitseeko informaatioteknologia matematiikkaa?

Lasse Holmström
Matemaattisten tieteiden laitos, Oulun yliopisto
lasse.holmstrom@oulu.fi

Mitä informaatioteknologia on?

Ensimmäinen reaktio otsikon kysymykseen saattaa olla, että se on puhtaasti retorinen ja tarkoitettu ehkä vain provosoimaan lukijaa. Sillä, kyllähän informaatioteknologia kai nyt sentään matematiikkaa tarvitsee!

Onhan toki niin, että informaatioteknologia ja muu niin sanottu korkea teknologia on nimenomaan *matemaattista* teknologiaa, matemaattiseen osaamiseen perustuvaa toimintaa. Perusluonnontieteiden, kuten fysiikan ja kemian kieli on matematiikka ja tekniikka on sovellettua luonnontiedettä. Ja, fyysisten prototyyppien rakentamisen sijaan teollisuuden tuotekehittely perustuu yhä useammin simulointiin, joka puolestaan nojaa matemaattisiin malleihin. Lisäksi Mooren laki ennustaa mikrosirujen transtorien määrän per pinta-alayksikkö kaksinkertaistuvan n. 18 kk:n välein pitkälle tulevaisuuteen ja tästä seuraava laskentatehon kasvu mahdollistaa aina vain monimutkaisempien matemaattisten menetelmien soveltamisen.

Tämä kaikki on epäilemättä totta, mutta ongelma onkin enemmän siinä, että mitä informaatioteknologia oikeastaan on? Googlaamalla löytää informaatioteknologialle monia arvovaltaisia määritelmiä, joista tässä on yksi, sisällöltään melko tyypillinen:

Information Technology is the science and skills of all aspects of computing, data storage, and communications.

Informaatioteknologia on siis tiedettä ja taitoja, jotka liittyvät kaikenlaiseen laskentaan, tiedon tallentamiseen ja siirtoon.

On huomattava, että aikaisemmin, ehkä vielä n. 30 vuotta sitten, informaatioteknologia tarkoitti paljolti nimenomaan tietokoneiden rakentamiseen liittyvää tekniikkaa, numeerisia teollisuussovelluksia tai ehkä kaupallishallinnollista tietojenkäsittelyä. Nämä asiat eivät toki ole kadonneet minnekään, päinvastoin, niitä tehdään enemmän kuin koskaan, mutta niiden lisäksi on tullut hyvin paljon muuta ja tosiasia on, että pääosa tämän päivän tietotekniikasta ei olekaan esimerkiksi laitetekniikkaa vaan ennenkaikkea *ohjelmistokehitystä*, jolla ei sitten välttämättä olekaan enää ainakaan suoraa yhteyttä matematiikkaan. Esimerkkejä ovat vaikkapa internet ja siihen liittyvät monet sovellukset, erilaisten laitteiden mikroprosessoriohjaus, toimisto-ohjelmistot, elokuvat ja niiden digitaaliset tehosteet, pelit ja niin edelleen.

Ohjelmistotekniikka ja matematiikka

Suurin osa tämän päivän informaatioteknologiasta onkin siis nimenomaan ohjelmistotekniikkaa ja ohjelmistotekniikan ammattilaisista iso osa ei ehkä tarvitsekaan perinteisiä matematiikan tietoja, kuten differentiaali- ja integraalilaskentaa, lineaarialgebraa ja differentiaaliyhtälöitä. Tästä syystä artikkelini otsikon kysymys ei todellakaan ole vain retorinen ja kysymykseen vastaaminen on tärkeää, jotta paremmin ymmärettäisiin matematiikan ja tietotekniikan nykyinen suhde. Tarkastellaan asiaa siis hieman lähemmin.

Timothy Lethbridge Ottawan yliopistosta teki jo noin 15 vuotta sitten tutkimuksen, jonka huomiota herättävät tulokset julkaistiin mm. arvovaltaisessa yhdysvaltalaisessa IEEE Computer lehdessä kansikuvajuttuna toukokuussa 2000 [1]. Lethbridge kysyi 200 useasta maasta kotoisin olevalta ohjelmistoammattilaiselta mm. mitä hyötyä heillä on ollut aikoinaan oppimistaan asioista. Tarkasteltavana oli 75 oppialaa tai osaamisaluetta, mm. perinteisesti yliopistoissa opetettavat matematiikan kurssit. Ohjelmistoammattilaisista kun oli kyse, ei liene yllätys, että kaikkein tärkeimpinä pidettiin välittömästi ohjelmistotyöhön liittyviä aloja kuten eri ohjelmointikielet, tietorakenteet, ohjelmistojen suunnittelumallit ja arkkitehtuurit. Korkealla kärjessä olivat myös etiikka, eikä hyvää neuvottelutaitoakaan väheksytty – se esimerkiksi tuli ennen ensimmäistäkään matematiikan kurssia. Nimittäin, matemaattisista oppialoista parhaiten sijoittui todennäköisyyslaskenta ja tilastotiede, mutta nekin löytyvät vasta läheltä listan puoliväliä, sijalta 31. Vasta listan loppupuolella alkaa näkyä jotain sellaista, minkä olisi ehkä luullut sijoittuvan korkeallekin: numeeriset menetelmät, jotka ovat aivan keskeisiä esimerkiksi erilaisissa simulaatioissa ja teollisuusprosessien optimoinnissa, löytyy uskomattoman alhaalta, sijalta 52. Ja ne tavallisimmat matematiikan pää- ja sivuaineopintoina suoritettavat kurssit ovat todellakin käytännössä hännänhuippuja: lineaarialgebra ja matriisit sijalla 56, kunnianarvoisa differentiaali- ja integraalilaskenta sijalla 67 ja differentiaaliyhtälöt sijalla 72.

Entä varsinaiset matemaatikot?

Joitakin vuosia sitten tein itsekin pienimuotoisen kyselyn IT-alalla tutkimustehtävissä toimivien matemaatikoiden ja matematiikkaa käyttävien tietojenkäsittelytieteilijöiden parissa tarkoituksena saada selville, mikä heille on ollut matematiikan merkitys ja ovatko kenties jotkin matematiikan alat heidän mielestään tärkeämpiä kuin toiset. Olihan kuitenkin ehkä niin, että kun Timothy Lethbridge kysyi asiaa nimenomaan ohjelmistoammattilaisilta, saattoivat tulokset olla perinteiselle matematiikalle turhan negatiiviset. Mitä siis sanoisivat matematiikan ammattilaiset?

He sanoivat esimerkiksi, että ”eri IT-aloilla tarvitaan hyvin erilaista matematiikkaa”, mikä jo näyttää vähän rohkaisevammalta. Usein myös katsottiin, että tärkeämpää kuin tiettyjen tietotekniikkaan liittyviksi miellettyjen matematiikan alojen opiskelu ja erikoistietojen hankinta on kuitenkin lujan yleismatemaattisen perustan valaminen. Päämääränä tulisi olla vankan mutta ei välttämättä ylettömän laajan matemaattisen perusosaamisen saavuttaminen, joka sitten mahdollistaisi eri sovelluksissa tarvittavan uuden käsitteistön nopean ja kunnollisen oppimisen.

Matematiikan osaamisella katsottiin olevan ajattelua jalostava ja itseluottamusta lisäävä vaikutus. Tätä varmaan tarkoitti eräskin, joka totesi, että hieno puoli abstraktin matematiikan opiskelussa oli tunne, että ”ainakin on joskus tultu tehtyä jotain kunnolla”. Kun on selvittänyt pohjiaan myöten matematiikan monimuktaisia teoreettisia konstruktioita, voi luottaa siihen, että pystyy kirjoista ja manuaaleista oppimaan mitä vain. Tämä usko näkyi myös toteamuksessa, että ”matemaatikkojen vahvuuksia ovat ajattelun kirkkaus ja selkeys”. Eräässä informaatioteknologian suuryrityksessä tutkimusjohtajana toiminut matemaatikko piti matemaatikkoja itse asiassa ylivertaisina ohjelmistokehittäjinä todeten heistä löytyvän alalla kipeäsi kaivattua ”särmää”.

Matematiikasta saatava hyöty tyyypilliselle tämän päivän ohjelmistoammattilaiselle on siis luultavimmin epäsuoraa. Matematiikka tarjoaa työkaluja abstraktioiden tunnistamiseen ja niiden muotoiluun. Matematiikka myös opettaa keskittymään olennaisuuksiin ja siten kirkastaa ajattelua. Nämähän ovat mitä ilmeisimmin tärkeitä kykyjä rakennettaessa suuria ja monimutkaisia ohjelmistoja ja niiden kautta voi siis ohjelmistoammattilainenkin aivan aidosti ammentaa matematiikasta ainakin epäsuoraa hyötyä – sitä kaivattua särmää.

Matematiikka keskeisessä roolissa: teknis-luonnontieteellinen IT

Vaikka perinteisen matematiikan merkitys suurelle osalle ohjelmistotekniikkaa saattaakin siis olla melko vähäinen tai ainakin se usein on vain epäsuora, kokonaan oma lukunsa on kuitenkin teknisluonnontieteellinen tietotekniikka, jossa matematiikan välitön hyödyllisyys ja osaamistarpeet ovat kiistattomat.

Esimerkkinä olkoon vaikka GSM:n tulo Suomeen osana Nokian matkapuhelinbisneksen kehitystä 1980-luvulla. Siitähän Nokian voimakas nousu aikoinaan alkoi. Digitaalisen mobiilitekniikan läpimurtoon Suomessa keskeisen panoksen tuolloin antoi nimenomaan joukko nuoria matemaatikkoja ja teoreettisia tietojenkäsittelijöitä. GSM:n kehitystyössä tarvittuja matematiikan ja teoreettisen tietojenkäsittelytieteen menetelmiä olivat mm. stokastiikka, teleliikenne- ja jonoteoria, automaattien teoria ja kääntäjien teoria.

Matematiikka ja matkapuhelin

Nyt kun tarkastelumme on siirtynyt matkapuhelimeen, onkin ehkä paikallaan lähemmin tarkastella, minkälaista matematiikkaa tuohon Suomen IT-teollisuuden ikoniin oikeastaan sisältyy. Tämä katsaus ei suinkaan pyri olemaan tyhjentävä, mutta se toivon mukaan kuitenkin valaisee sitä, mitä kaikkea matematiikan saralta voidaan ja pitääkin käyttää, kun kännyköitä suunnitellaan ja rakennetaan.

Ensiksikin itse fyysinen laite. Pyrittäessä yhä monipuolisempia ominaisuuksia sisältäviin mutta kuitenkin pienikokoisiin matkapuhelimiin joudutaan käytettyjä elektronisia komponentteja jatkuvasti pienentämään. Skaalan pienuus yhdistettynä käytettyihin taajuuksiin johtaa mm. siihen, että elektroniikan suunnittelutyötä ei aina voida perustaa perinteisille virtapiirilaskuille, vaan sähkön kulkua komponenteissa on mallitettava sähkömagneettisena aaltoliikkeenä. Tämä tuo kuvaan mukaan esimerkiksi osittaisdifferentiaali- ja integraaliyhtälöt ja niihin liittyvät kehittyneet numeeriset menetelmät. Saman tyyppistä matematiikkaa tarvitaan myös ratkaistaessa äänen etenemiseen liittyviä akustiikan ongelmia, jotka tulevat vastaan matkapuhelimen pienien mutta tehokkaiden kovaäänisten ja mikrofonin suunnitelussa.

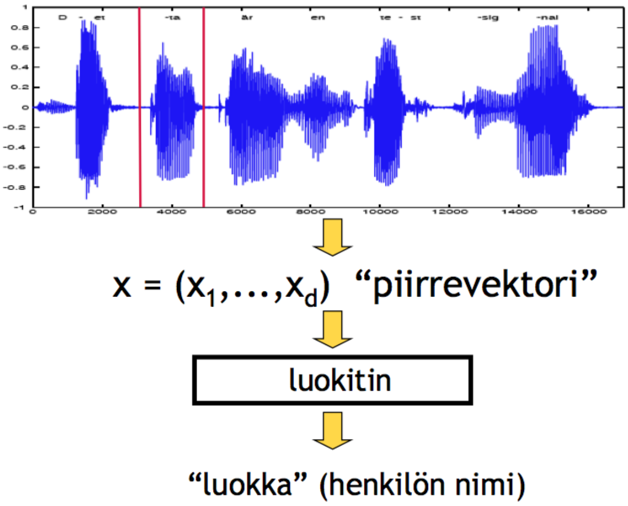
Toiseksi voidaan tarkastella puhelimen käyttöliittymää, eli sitä miten puhelinta nyt ja tulevaisuudessa käytetään. Modernia matkapuhelintahan pystyy näppäimistön lisäksi käyttämään myös puhutuilla kommennoilla ja haluttaessa voitaisiin puhelimessa olevaa kameraa käyttää myös vaikka puhujan tunnistamiseen. Tarvittava matemaattinen teknologia on niin sanottua *hahmontunnistusta* ja se hyödyntää mm. monenlaisia tilastomatemaattisia menetelmiä ja koneoppimista.

Ja kolmanneksi itse tietoliikenne kännyköiden ja tukiasemien välillä. Puhe-, teksti- tai kuvatiedon siirto, koodaus, tiivistäminen ja mahdollinen salaus ammentavat matemaattista perustaa stokastiikasta, signaalianalyysistä, algebrasta, informaatioteoriasta ja lukuteoriasta.

Fokusoimalla siis yhteen keskeiseen IT-tuotteeseen, matkapuhelimeen, nähdäänkin, että kunnon matematiikkaa tarvitaan itse asiassa hyvin monen ongelman ratkaisuun. Saadaksemme matematiikan roolista vielä yksityiskohtaisemman kuvan poraudutaan seuraavaksi tarkemmin vielä tuohon puhelimen käyttöliittymään ja sen puhetta tunnistavaan osaan.

Puheentunnistus

Miten siis kännykkä tunnistaa vaikkapa sille annetun käskyn soittaa tietylle henkilölle? Puhe on kännykälle tietysti vain signaali, aaltomuoto, jonka amplitudi muuttuu ajan funktiona. Tästä amplitudin vaihtelusta esimerkiksi soiton vastaanottajaksi halutun henkilön nimi pitää osata tunnistaa.



Kuva 1: Puheentunnistuksen eri vaiheet.

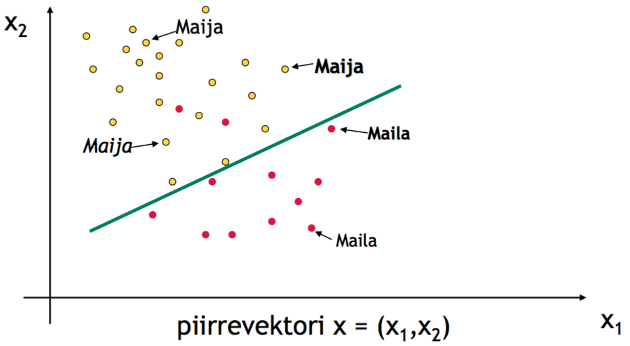
Ajatellaan vaikkapa, että kuvan 1 punaisten viivojen välissä on sen henkilön ääneen lausuttu nimi, jolle haluamme soittaa. Jo sekunninkin pätkä puhetta digitoituna tuottaa niin paljon numeerista dataa, että puhesignaali pitää yleensä puristaa tiiviimpään muotoon, jotta sen tehokas käsittely olisi mahdollista. Siksi tuosta puhutusta pätkästä voidaan ensin muodostaa niin sanottu *piirrevektori*, kuvassa 1 d:n pituinen jono reaalilukuja x_1:stä x_d:hen, joka sisältää kaiken oleellisen tiedon sen henkilön nimen tunnistamiseksi, jolle halusimme soittaa. Tässä d on jokin kokonaisluku, esimerkiksi 10, missä tapauksessa piirrevektorissamme on 10 komponenttia.

Tätä informaation tiivistämistä sanotaan piirteiden irrottamiseksi ja siinä nojataan usein erilaisiin tilastollisiin menetelmiin, joilla tiedetään olevan optimaalisia ominaisuuksia tiedon tiivistämisessä. Samalla voidaan suorittaa myös häiriönpoistoa sopivilla matemaattisilla signaalinkäsittelymenetelmillä. Tämä on tärkeätä, jos soittokomento annetaan vaikkapa hands-free -laitteiston välityksellä meluisassa autossa.

Seuraavassa vaiheessa piirrevektori sitten syötetään niin sanottuun *luokittimeen*, jonka tehtävänä on päättää, minkä henkilön nimestä olikaan kysymys. Luokitin on jossain mielessä se matkapuhelimessa, tai nykyisin usein myös niin sanotusti ”pilvessä” majailevan älyn ylin aste, joka tekee puolestamme valinnan siitä kenelle soitto menee. Siksi on kiinnostavaa vielä katsoa hieman tarkemmin, miten tuo päätös voidaan tehdä, eli katsotaan miten tyypillinen luokitin voisi toimia.

Luokiteltavissa piirrevektoreissa on tavallisesti useita komponentteja, mutta yksinkertaistamme tässä tilannetta ja tarkastelemme vain kuviteltua kaksiulotteista piirreavaruutta, jolloin piirrevektorin voi esittää tason pisteenä. Kuvan 2 pisteet esittävät matkapuhelimeen sanottuja nimiä, kun puhesignaali on puristettu kaksiulotteiseksi piirrevektoriksi eli x_1x_2-tason pisteeksi.

Jos vaikka pyysin soittamaan Maijalle, niin piste esittää ”Maija”-sanan synnyttämää puhesignaalia. Jos piste olisi eri soittokerroilla aina samassa paikassa, olisi tilanne tunnistamisen kannalta hyvin yksinkertainen, mutta näin ei todellisuudessa ole. Kuten kuvassa 2 esitetään, eri kerroilla ”Maija” tulee sanottua aina hieman eri tavalla. Tähän vaikuttavat puhenopeus, tilanne jossa nimi sanotaan, ulkoiset olosuhteet ja niin edelleen. Eri Maijan versiot siis osuvat eri osiin piirreavaruutta, eikä tässä kaikki. Puhelinluettelossamme on toki muitakin nimiä, joista jotkut saattavat läheisesti muistuttaa Maijaa. Miten erottaisimme Maijan ja Mailan, kun meluisassa ympäristössä huolimattomasti lausuttuna ne voivat muistuttaa toisiaan paljonkin ja siten täyttävät osittain saman osan piirreavaruuttamme?



Kuva 2: Kaksiulotteinen piirreavaruus, jossa matkapuhelimelle sanotut nimet on kuvattu pisteillä. Suora määrää luokittelusäännön, joka pyrkii erottamaan ”Maija” ja ”Maila” -luokat toisistaan.

Puheentunnistus saattaakin toimia mukautuvasti siten, että järjestelmän suorituskyky paranee käytön myötä. Tämä perustuu siihen, että kun matkapuhelin kuulee useita versioita samoista nimistä, se ikäänkuin oppii esimerkkien avulla, missä päin piirreavaruutta on vaikkapa Maija-alue ja missä on Maila-alue. Esimerkkien kuulemisen jälkeen puhelin pyrkii sitten erottamaan nämä alueet toisistaan jollain tavalla. Se mitä edellä sanoin luokittimeksi on täsmälleen tämä erottelusääntö. Niin sanottu *lineaarinen luokitin* esimerkiksi erottaisi Maija ja Maila -luokan sopivalla suoralla viivalla (Kuva 2). Kun suora on kerran sitten asetettu, luokitellaan sen vastakkaisille puolille osuvat puhesignaalit eri luokkiin, toiset Maijaksi ja toiset Mailaksi.

Suoraa käyttävä lineaarinen luokitin on ehkä yksinkertaisin mahdollinen menetelmä ja parempi päätössääntö saadaankin tavallisesti käyttämällä jotain yleisempää luokkia erottavaa käyrää. Kun piirreavaruuden dimensio on korkeampi kuin 2, kuten se yleensä on, erotetaan luokat hypertasolla tai jollain yleisemmällä korkeaulotteisella pinnalla. Optimaalinen luokkien välinen rajapinta on sellainen, että siihen perustuva luokitin tekee mahdollisimman harvoin virheen. Käyttäen todennäköisyyslaskentaa voidaan osoittaa, että optimaalinen luokitin riippuu luokkien todennäköisyysjakaumista piirreavaruudessa ja paras luokkia erottava rajapinta määräytyy tietyllä tavalla jakaumien todennäköisyystiheysfunktioiden korkeuseroista. Optimaalinen luokitin ei tavallisesti ole lineaarinen, vaan luokkia erottava pinta saattaa olla periaatteessa minkä muotoinen tahansa.

Yksinkertaisen kaksiulotteisen esimerkkimme luokittelusäännön määrittely käy vielä melko helpon tuntuisesti, mutta todellisuudessa piirrevektori harvoin on 2-ulotteinen vaan ehkä 10-, 100- tai vaikkapa 1000-ulotteinen ja jakaumia erottava optimaalinen rajapinta saattaa olla hyvin monimutkainen. Lisäksi teoreettisia jakaumia ei käytännössä tunneta, vaan ne tulee jotenkin estimoida puhe-esimerkkien avulla. Selvää on, että korkeaulotteisissa piirreavaruuksissa tehtävä on tällöin sekä matemaattisesti että myös käytännön toteutuksen kannalta haastava.

Siirryttäessä yksittäisten nimien tunnistamisesta pidempien, vapaamuotoisesti annettujen komentojen ja kysymysten käsittelyyn tarvitaankin sitten jo hyvin kehittyneitä teoreettisia menetelmiä ja todella runsaasti laskentaresursseja. Siksi uusimmissa matkapuhelimissa toimivissa puheentunnistusjärjestelmissä laskenta itse asiassa tehdäänkin osittain tai pääasiassa pilvessä, eli sovellusta ylläpitävän yrityksen palvelimilla. Se, että kännyköiden puheentunnistus onnistuu, osoittaa, että toimivia ratkaisuja on löydetty. Tässä vaiheessa lukijalle ei lienekään enää yllätys, kun totean, että monet tehokkaat tekniikat perustuvat nimenomaan kehittyneisiin matemaattisiin ja tilastollisiin menetelmiin.

Puheentunnistus on itseasiassa vain yksi esimerkki hahmontunnistuksesta. Kun puhesignaali korvataan vaikka aivosähkökäyrällä tai kudoksesta otetulla magneettikuvalla, päästään matemaattisia hahmontunnistusmenetelmiä soveltamaan lääketieteeseen. Voimakkaasti kasvavan kiinnostuksen kohteena on myös bioinformaatioteknologia, jossa hahmontunnistusta voidaan soveltaa mm. DNA-sirujen analyysiin. Huomattava informaatioteknologiaa hyödyntävä ala on myös robotiikka, jossa hahmontunnistusta on pitkään käytetty antamaan roboteille alkeellinen näköaisti.

Ja kyllä sitä niin sanottua perinteistäkin matematiikkaa informaatioteknologiassa ja ohjelmistotekniikassa tarvitaan. Esimerkiksi lineaarialgebraa, geometriaa ja pintojen teoriaa hyödynnetään tietokoneavusteisessa suunnittelussa, kolmiulotteisten kappaleiden tietokonemallintamisessa ja tietokonegrafiikassa – ja esimerkiksi elokuvien ja pelien digitaalisissa tehosteissa. Esimerkiksi kuvan 3 hahmot ja maailma, jossa ne seikkailevat, ovat lopultakin nekin matemaattisia konstruktioita.

Kuva 3: Ruutukaappaus mm. Applen älypuhelimille saatavasta Infinity Blade II -pelistä. Copyright Chair Entertainment and Epic Games.

Johtopäätöksiä

On totta, että informaatioteknologia nykyään on paljolti puhdasta ohjelmistotekniikkaa, jolle hyöty matematiikasta saattaa usein olla vain epäsuoraa. Kuitenkin, matematiikkaa on tarvittu ja tullaan jatkossakin tarvitsemaan paljon nimenomaan monien todella haastavien ongelmien ratkaisuun. Tämä pätee erityisesti teknis-luonnontieteelliseen informaatioteknologiaan. Tarvittavien ja potentiaalisesti hyödynnettävien matemaattisten menetelmien kirjo on todella laaja ja kasvaa jatkuvasti. Tämän takaa jo pelkästään alati kasvava laskentateho, joka tuo entistä eksoottisemmat ja vaativammat menetelmät käytännön sovellusten ulottuville.

Sen sijaan, että kysytään ”Tarvitseeko informaatioteknologia matematiikkaa?”, pitäisikin siksi mielestäni kysyä ”Onko sellaista matematiikkaa, jota informaatioteknologia EI tarvitse?”.

Viitteet

[1] Timothy C. Lethbridge. What knowledge is important to a software professional? *Computer*, 33:44–50, 2000.

Verkko-Solmun oppimateriaalit

Osoitteesta `http://solmu.math.helsinki.fi/oppimateriaalit.html` löytyvät oppimateriaalit:

Kilpailumatematiikan opas (Matti Lehtinen)

Geometrian perusteita (Matti Lehtinen)

Geometria (K. Väisälä)

Lukualueiden laajentamisesta (Tuomas Korppi)

Jaksolliset desimaaliesitykset algebrallisesta näkökulmasta (Jaska Poranen ja Pentti Haukkanen)

Algebra (Tauno Metsänkylä ja Marjatta Näätänen)

Algebra (K. Väisälä)

Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 1: Mekaniikkaa (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

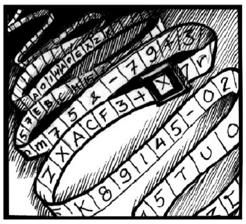
Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 2: Sähköoppia (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

Lukuteorian helmiä lukiolaisille (Jukka Pihko)

Matematiikan peruskäsitteiden historia (Erkki Luoma-aho)

Matematiikan historia (Matti Lehtinen)

Reaalianalyysiä englanniksi (William Trench)



Mitä ei voida laskea?

Tuomas Korppi

Johdanto

Matemaatikkoja kuulee usein syytettävän siitä, että he olettavat, että mitä tahansa voidaan laskea. Perusteluna sille, että kaikkea ei voida laskea, tarjotaan usein rakkauden määrää tai jotain vastaavaa, joka on niin epämääräistä, että matemaattiset metodit eivät pure siihen.

Todellisuudessa matemaatikot eivät oleta, että mitä tahansa voidaan laskea. He nimittäin tietävät, että *matematiikan sisältä* löytyy asioita, jotka ovat eksaktisti määriteltyjä, mutta niin monimutkaisia, että mikään laskentamenetelmä ei tepsi niihin. Tässä kirjoitelmassa tutustumme pariin tällaiseen kysymykseen.

Korostan vielä, että esitämme tässä kirjoitelmassa kysymyksiä, joista voidaan todistaa, että niiden vastauksia ei edes periaatteessa voida laskea. Tässä siis laskemattomuus ei johdu siitä, että laskentamenetelmiä ei ole vielä keksitty.

Mitä tarkoitamme laskemisella?

Tarkoitamme laskennalla prosessia, jonka lähtökohta on *syöte*, jokin (jossain ennaltamäärätyssä äärellisessä aakkostossa annettu) äärellinen merkkijono, ja joka päättyy *tulokseen*, joka on samoin äärellinen merkkijono. Laskenta voi koostua useista välivaiheista, mutta oletamme, että laskennalla on jotkin säännöt, jotka määräävät yksikäsitteisesti kussakin kohdassa, kuinka laskentaa jatketaan. Tämä siis tarkoittaa, että säännöt eivät missään kohdassa anna laskijalle valinnanvaraa jatkon suhteen.

Laskettaessa esimerkiksi kynällä ja paperilla käytettävissä oleva aika ja paperin määrä määräävät, kuinka pitkä laskenta voi olla. Teoreettisessa laskennan käsitteessämme emme tee tällaista rajoitetta, vaan laskenta saa olla vaikka kuinka pitkä, kunhan se on äärellinen. Samoin syöte ja tulos saavat olla kuinka pitkiä tahansa, kunhan ne ovat äärellisiä.

Edellä puhuimme kynällä ja paperilla laskemisesta, mutta yleisemmin laskemme tietokoneella. Tämän johdosta kutsummekin niitä sääntöjä, joilla laskenta etenee, *tietokoneohjelmaksi*. Tässä siis hyväksymme tietokoneohjelmaksi minkä tahansa tavallisen tietokoneohjelman, joka saa aluksi yhden syötteen[1], prosessoi sitä ja palauttaa lopuksi laskennan tuloksen. Ainoa ero tavallisiin tietokoneohjelmiin on se, että oletamme tietokoneessa olevan muistia rajattomasti, eli niin paljon kuin on tarpeen. Laskenta voi myös kestää niin pitkään kuin on tarpeen, vaikka tarvittava aikamäärä olisikin epärealistisen pitkä.

Lukijalle kenties heräsi kysymys, että millä ohjelmointikielellä oletamme ohjelmamme olevan kirjoitet-

[1] Tässä siis syöte on yksi merkkijono. Yhteen merkkijonoon voi koodata vaikka kuinka paljon tietoa, esimerkiksi useita lukuja vaikkapa puolipisteellä erotettuna

tu. Tässä vastaus on: Sillä ei ole merkitystä. Käytännössä kaikki käytössä olevat ohjelmointikielet ovat yhtä vahvoja, eli niillä voidaan toteuttaa samat laskennat. Kun siis puhumme tietokoneohjelmasta, lukija voi vapaasti ajatella sen olevan kirjoitettu hänelle tutuimmalla kielellään, esimerkiksi C:llä, C++:lla tai Javalla. Myös kynällä ja paperilla (kunhan sitä on rajattomasti) voidaan teoriassa toteuttaa täsmälleen samat laskennat kuin ohjelmointikielillä – joskin se on käytännössä huomattavasti työläämpää.

Teemme vielä yhden lievennyksen edelläesitettyyn laskennan käsitteeseen. Sallimme tietokoneohjelmiksi myös ne, jotka eivät kaikilla syötteillä palauta tulosta, vaan jotka voivat joillain syötteillä ”jäädä jumiin”, eli joillain syötteillä laskenta jatkuu ikuisesti eikä tulosta anneta[2,3]. Jos ohjelma antaa tuloksen jollain syötteellä x, sanomme, että ohjelma *pysähtyy* syötteellä x.

Pysähtymisongelma

Valitaan aluksi ohjelmointikieli. Oletamme, että kaikki tässä luvussa mainitut tietokoneohjelmat on kirjoitettu tällä kielellä. Tutkitaan seuraavaa kysymystä:

On annettu tietokoneohjelma T ja syöte x. Pysähtyykö ohjelma T syötteellä x?

Meitä kiinnostaa se, voidaanko muodostaa tietokoneohjelma T_0, joka vastaa tähän kysymykseen kaikkien parien T, x osalta. Tällainen ohjelma siis saisi syötteenään parin T, x, ja palauttaisi merkkijonon ”Kyllä”, jos T pysähtyy syötteellä x ja merkkijonon ”Ei”, jos T ei pysähdy syötteellä x tai T ei ole kelvollinen (valitulla ohjelmointikielellä kirjoitettu) tietokoneohjelma.

Osoittautuu, että tällaista tietokoneohjelmaa T_0 ei voida muodostaa. Seuraavaksi todistamme kyseiseen väitteen. Käytämme pohjana Wikipediasta [2] löytyvää todistusta. (Voit skipata todistuksen, jos sen lukeminen tuntuu liian raskaalta.)

Tehdään vastaoletus: Tällainen tietokoneohjelma T_0 on olemassa. Muodostetaan T_0:aa muokkaamalla uusi tietokoneohjelma T_1, joka saa syötteenään merkkijonon s ja toimii seuraavasti:

- Jos T_0 palauttaa syöteparilla s,s vastauksen ”Ei”, T_1 palauttaa syötteellä s tuloksena merkkijonon ”ok”.
- Jos T_0 palauttaa syöteparilla s,s vastauksen ”Kyllä”, T_1 jää syötteellä s laskemaan ikuisesti.

Nyt kysymys kuuluu: Kuinka T_1 toimii, jos sille annetaan itsensä (eli T_1) syötteeksi?

- Jos T_1 palauttaa syötteellä T_1 merkkijonon ”ok”, T_0 palauttaa parilla T_1, T_1 vastauksen ”Ei”, eli T_1 jää jumiin syötteellä T_1. Kuitenkin oletimme, että T_1 pysähtyy syötteellä T_1. Ristiriita.
- Jos taas T_1 jää jumiin syötteellä T_1, ohjelma T_0 palauttaa syöteparilla T_1, T_1 vastauksen ”Kyllä”, eli T_1 pysähtyy syötteellä T_1. Kuitenkin oletimme, että T_1 jää jumiin syötteellä T_1. Ristiriita.

Siis kaikki mahdolliset vaihtoehdot johtavat ristiriitaan, eli vastaoletuksemme on väärä, ja tietokoneohjelmaa T_0 ei voida muodostaa.

Olemme siis nyt löytäneet ensimmäisen eksaktisti määritellyn kysymyksen, jonka vastausta ei voida (kaikissa tilanteissa) laskea: Pysähtyykö annettu tietokoneohjelma annetulla syötteellä?

Voidaan tosin muodostaa sellainen tietokoneohjelma T_0, joka saa syötteenään tietokoneohjelman T ja merkkijonon s, ja joka simuloi T:n laskemista syötteellä s. Kuitenkin, jos laskenta kestää kauan, ei missään vaiheessa laskentaa välttämättä ole mahdollista sanoa, että olemme laskeneet niin kauan, että ohjelma ei varmasti tule pysähtymään.

Luettelevat tietokoneohjelmat

Aiemmin tutkimme tietokoneohjelmia, jotka yleensä pysähtyivät. Seuraavaksi määrittelemme käsitteen *luetteleva tietokoneohjelma*, joka ei saa syötettä, vaan alkaa laskennan tyhjästä, eikä välttämättä pysähdy. Luetteleva tietokoneohjelma antaa kuitenkin laskennan edetessä tulosteita. Koska laskenta voi jatkua äärettömästi, se voi laskennan kuluessa antaa yhteensä äärettömän määrän tulosteita.

Laskennan edetessä luetteleva tietokoneohjelma voi käyttää yhä enemmän ja enemmän muistia, ja oletamme, että luettelevalla tietokoneohjelmalla on käytössään rajattomasti muistia niin, että ohjelman suoritus ei tyssää muistin loppumiseen[4].

Ne lukijat, jotka eivät tunne oloaan kotoisaksi tietokoneiden parissa, voivat yhä ajatella kynällä ja paperilla suoritettavaa laskentaa, joka jatkuu ja jatkuu, ja laskennan edetessä määrättyjä välituloksia kutsutaan tulosteiksi.

[2] Jokainen ohjelmointia harrastanut lukija lienee tehnyt vähintään kerran elämässään sellaisen ohjelmointivirheen, jonka johdosta ohjelma on jäänyt ikuiseen silmukkaan.

[3] Tällainen ikuisesti jatkuva laskenta voi vaatia laskennan edetessä yhä enemmän ja enemmän muistia. Oletamme, että tällaisella laskennalla on käytössään rajaton määrä muistia, niin, ettei se lopu.

[4] Lukija voi puolileikillisesti ajatella äärellisellä muistilla varustetun luettelevaa tietokoneohjelmaa suorittavan tietokoneen, joka osaa ilmoittaa muistin loppumisesta, ja koneen vieressä istuvan juoksupojan, joka käy aina tarpeen vaatiessa ostamassa lisää muistia ja asentaa sen koneeseen laskennan jatkamiseksi.

Totuus lukuteoriassa

Olkoon $(n, n+2)$ pari luonnollisia lukuja. Sanomme, että n ja $n+2$ ovat alkulukukaksoset, jos sekä n että $n+2$ ovat alkulukuja. On avoin ongelma, onko alkulukukaksosia äärellinen vai ääretön määrä. Jos kävisimme läpi kaikki luonnolliset luvut n ja testaisimme jokaisen kohdalla, ovatko n ja $n+2$ alkulukukaksosia, joutuisimme käymään läpi äärettömän monta lukua n, joten tällainen läpikäynti ei ole laskenta tarkoittamassamme mielessä[5]. Tällaisia äärettömästä määrästä luonnollisia lukuja puhuvia lauseita on muitakin, ja herää kysymys, olisiko mahdollista muodostaa jokin ääretöntä läpikäyntiä ovelampi laskentamenetelmä, jolla ratkaista kaikkien tällaisten lauseiden totuus. Esittelemme tässä luvussa tuloksen, joka sanoo, että tämä ei ole mahdollista.

Tulos, jonka aiomme esitellä, puhuu luonnollisia lukuja koskevista lauseista. Koska tässä meillä lauseet ovat *matematiikan tutkimuksen kohde*, eivät *matematiikan tutkimuksen väline*, tarvitsemme eksaktin määritelmän niille lauseille, josta tuloksemme puhuu.

Jatkon kannalta olennaista on ymmärtää, että tarkoitamme lukuteorian lauseilla lauseita, jotka puhuvat luonnollisista luvuista, ja joilla on tietty, tarkasti määrätty muoto. Muoto on sellainen, että voidaan laskea, onko jokin merkkijono tätä muotoa oleva lause. Lisäksi kyseistä muotoa olevia lauseita on ääretön määrä. Tässä on huomattava, että muoto on sellainen, että kyseistä muotoa oleva lause voi olla joko tosi tai epätosi; muoto määrää vain sen, että kyseessä on mielekäs lause, jolla on totuusarvo.

Annamme hiukan tarkemman luonnehdinnan (joskaan emme tarkkaa määritelmää). Sen voi halutessa sivuuttaa. Tarkkakin määritelmä on mahdollista antaa, mutta emme halua rasittaa lukijaa sen yksityiskohtien läpikäynnillä.

Lukuteorian lauseella tarkoitamme "mielekästä", äärellistä lausetta, joka saadaan muodostettua käyttäen merkkejä $(,), 0, 1, +, \times, =, \wedge$ (ja), $\neg$ (ei), $\forall$ (kaikilla) sekä rajatonta määrää muuttujasymboleja $x_0, x_1, \ldots$. Muuttujien ajatellaan saavan arvoikseen luonnollisia lukuja.

Esimerkkejä lukuteorian lauseista ovat

$$1+1+1=1+1,$$

joka on hyvinmuodostettu (joskin epätosi) lause, joka väittää, että kaksi on yhtäsuuri kuin kolme,

$$\forall x_0(x_0 = x_0 + 0),$$

joka väittää, että jos mihin tahansa luonnolliseen lukuun lisätään nolla, saadaan alkuperäinen luku,

$$\forall x_0 \neg(x_0 = x_0 + 1),$$

joka väittää, että mikään luonnollinen luku ei ole sellainen, että kun siihen lisätään yksi, saadaan alkuperäinen luku,

$$(0=0) \wedge (1=1),$$

joka väittää, että sekä nolla että yksi ovat yhtäsuuria itsensä kanssa,

$$\forall x_0 \neg(x_0 \times 0 = 0),$$

joka on epätosi lause, joka väittää, että mikään luonnollinen luku kerrottuna nollalla ei ole nolla, sekä

$$\forall x_0 \neg \forall x_1 \neg(x_1 = x_0 + 1),$$

joka väittää, että jokaiselle luonnolliselle luvulle x_0 on olemassa toinen luonnollinen luku x_1 siten, että $x_1 = x_0 + 1$. (Tässä kannattaa huomata, että "Ei ole niin, että millään x ei päde… " tarkoittaa samaa kuin "On olemassa x, jolle pätee… ".)

Myös väite, että alkulukukaksosia on ääretön määrä, on mahdollista kirjoittaa lukuteorian lauseena, joskin lauseesta tulisi melko pitkä.

Lukuteorian lauseen käsitteeseemme sisältyy myös se, että jokaiseen x_i:n esiintymään vaikuttaa kvanttori $\forall x_i$, eli

$$x_2 = x_2 + 0$$

ei ole lukuteorian lause tarkoittamassamme mielessä.

Nyt voidaan todistaa seuraavaa teoreemat:

Teoreema 1. *Ei voida muodostaa luettelevaa tietokoneohjelmaa, joka luettelee kaikki todet lukuteorian lauseet ja vain ne.*

Teoreema 2. *Ei voida muodostaa tietokoneohjelmaa, joka saadessaan toden lukuteorian lauseen syötteeksi antaa tuloksen "kyllä" ja saadessaan epätoden lukuteorian lauseen syötteeksi antaa tuloksen "ei".*

Todistukset ovat vaikeita, ja ne löytyvät teoksesta Väänänen [1]. (Tulosten saamiseksi tarvitsemme Määritelmän 13.1, Lauseen 12.8 ja Lauseen 12.3.)

Olemme nyt löytäneet toisen hyvinmuotoillun ongelman, jonka vastausta ei voida (kaikissa tapauksissa) laskea, nimittäin matemaattisten väitteiden totuuden. Sanon edellä "matemaattisten väitteiden", mutta itse asiassa olemme todenneet, että laskemattomuus koskee jo hyvin rajallista muotoa olevia matemaattisia väitteitä.

[5] Useissa tapauksissa tällaisten kaikista luonnollisista luvuista puhuvien lauseiden totuus voidaan ratkaista äärellisellä todistuksella, ja useimmat uskonevatkin, että alkulukukaksoskysymys saadaan ennemmin tai myöhemmin ratkaistua tällä tavoin.

Seuraus matematiikan harjoittamiselle

Oletetaan, että olemme saaneet matemaattisen todistuksen käsitteen niin hyvin määritellyksi, että voidaan laskea, onko annettu merkkijono todistus. Ts. voidaan muodostaa tietokoneohjelma T_0, joka saa syötteenään parin P, R, ja palauttaa merkkijonon ”Ok”, jos merkkijono P on lauseen R todistus ja merkkijonon ”Ei-Ok”, jos näin ei ole. Tämä oletus on realistinen, koska näin voidaan tehdä[6]. Käytännössä vain todistusten saaminen tällaiseen eksaktiin muotoon on äärimmäisen työlästä, joten matemaatikot eivät koskaan esitä todistuksia tässä muodossa.

Nyt voidaan muodostaa luetteleva tietokoneohjelma T_1, joka toimii seuraavasti: Se käy läpi kaikki parit P, R, ja aina kohdatessaan parin P, R, missä P on R:n hyväksyttävä todistus, se tulostaa R:n[7]. Ohjelma voidaan tehdä mm. niin, että ensin käydään läpi kaikki kahden merkin mittaiset parit P, R, sitten kaikki kolmen merkin mittaiset parit P, R, sitten kaikki neljän merkin mittaiset ja niin edelleen.

Edelleen T_1:n avulla voidaan muodostaa luetteleva tietokoneohjelma T_2, joka poimii T_1:n tulosteista kaikki lukuteorian lauseet. T_2 siis luettelee kaikki lukuteorian lauseet, joille on olemassa hyväksyttävä todistus.

Edellisessä luvussa totesimme, että ei voida muodostaa luettelevaa tietokoneohjelmaa, joka luettelee kaikki todet lukuteorian lauseet. Koska T_2 luettelee kaikki lukuteorian lauseet, joille on hyväksyttävä todistus, teemme seuraavan johtopäätöksen: On olemassa tosia lukuteorian lauseita, joita ei voida todistaa nykyisen todistuskäsityksen mukaisesti. Sama pätee mille tahansa todistuskäsitykselle, jossa todistuksen pätevyys voidaan laskea.

Pähkinöitä

1. Osoita, että ei voida muodostaa tietokoneohjelmaa T_0 siten, että T_0 saa syötteenään tietokoneohjelman T, ja palauttaa merkkijonon ”Tosi”, jos T pysähtyy kaikilla syötteillä, ja merkkijonon ”Epätosi”, jos on vähintään yksi syöte, jolla T ei pysähdy. (Tässä tehtävässä valitaan ohjelmointikieli ja oletetaan, että kaikki tehtävässä mainitut ohjelmat on kirjoitettu tällä kielellä.)

2. Edellisen kappaleen lopussa annoimme argumentin sille, että on olemassa vähintään yksi tosi lukuteorian lause, jota ei voida todistaa nykyisen todistuskäsityksen mukaisesti. Osoita käyttäen tässä kirjoitelmassa mainittuja tuloksia, että tällaisia lukuteorian lauseita on ääretön määrä.

3. Olkoon T luetteleva tietokoneohjelma. Osoita, että voidaan muodostaa tietokoneohjelma, joka antaa vastauksen ”Kyllä” täsmälleen niillä syötteillä, jotka T luettelee (ja muilla syötteillä jää jumiin).

4. Olkoon T tietokoneohjelma, joka joillain (ennaltamäärätyssä äärellisessä aakkostossa annetuilla) syötteillä antaa tuloksen ”Kyllä”, joillain (samassa aakkostossa annetuilla) syötteillä antaa tuloksen ”Ei” ja jää jumiin lopuilla (samassa aakkostossa annetuilla) syötteillä. Osoita, että voidaan muodostaa luetteleva tietokoneohjelma, joka luettelee täsmälleen ne syötteet, joilla T antaa tuloksen ”Kyllä”.

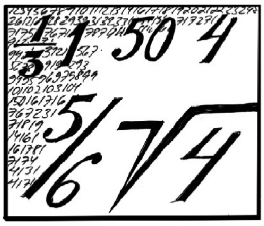
Viitteet

[1] Väänänen, Jouko, *Matemaattinen logiikka*, luentomoniste, `https://wiki.helsinki.fi/download/attachments/86367413/luentoteksti2010.pdf?version=1&modificationDate=1345108822439`

[2] Wikipedia, *Halting problem*, `http://en.wikipedia.org/wiki/Halting_problem`, haettu 25.12.2012.

[6] Siihen, kuinka tämä tehdään, emme tässä mene, mutta taikasanat ovat 1. kertaluvun predikaattilogiikka + ZFC.

[7] Vaikka tällainen tietokoneohjelma voidaan teoriassa tehdä, käytännössä se on niin hidas, että sen käyttäminen todistusten etsimiseen on aivan toivotonta.



Kilpailutehtäviä yhtälöistä

Heikki Pokela
Tapiolan lukio

Yhtälöiden ratkaisu on yksi matematiikkakilpailujen tehtävätyypeistä. Usein kysytään yhtälölle joko yksittäistä ratkaisua tai ratkaisuiden määrää. Yhtälö voi sisältää useampiakin kuin yhden muuttujan, mikä yleensä tekee ratkaisemisen vaativaksi, ellei jopa mahdottomaksi millään lukiokurssilla esitellyllä standarditavalla. Esimerkki tällaisesta tehtävästä on:

Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut m ja n siten, että

$$m^2 - n^2 = 270.$$

(MAOL alkukilpailu 2000)

Ratkaisu perustuu lukiossa selkäytimeen saakka harjoiteltuun summan ja erotuksen tuloon. Termien $m+n$ ja $m-n$ parillisuutta ja parittomuutta eri vaihtoehdoilla tarkastelemalla päätyy havaitsemaan, että ne ovat joko molemmat parillisia tai parittomia riippuen muuttujien m ja n valinnasta. Edellisestä puolestaan seuraa summan ja erotuksen tulon parittomuus tai jaollisuus neljällä. Luku 270 ei ole kumpaakaan, joten mitkään alkuehdon toteuttavat m ja n eivät kelpaa ratkaisuiksi.

Parillisuuden tai parittomuuden säilyminen laskuoperaatioissa on vahva työkalu ratkaistaessa alkeelliseen lukuteoriaan perustuvia kilpatehtäviä. Lukion lukuteorian kurssiin kuuluva asia, kongruenssi, avaa myös mahdollisuuksia ratkoa yhtälöiden ratkaisujen määrään liittyviä tehtävätyyppejä.

Useiden asiakokonaisuuksien rutiininomainen hallinta on usein vaatimuksena, kuten vaikkapa seuraavassa tehtävässä.

Osoita, että yhtälön

$$\sqrt{1996}\,x^{\log_{1996} x} = x^6$$

juurien tulo on kokonaisluku ja määritä lisäksi kyseisen luvun neljä viimeistä numeroa. (Kilpailutehtävä Moldovasta 1996)

Merkitään $a = \log_{1996} x$. Koska $\log_{1996} \sqrt{1996} = 1/2$, annettu yhtälö saadaan muotoon

$$\frac{1}{2} + a^2 = 6a$$

(ottamalla 1996-kantainen logaritmi puolittain). Olkoot nyt a_1 ja a_2 yhtälön juuret, ja alkuperäisen yhtälön juuret ovat siten $x_1 = 1996^{a_1}$ ja $x_2 = 1996^{a_2}$, eli niiden tulo on $1996^{(a_1+a_2)} = 1996^6$, kun käytetään toisen asteen yhtälön juurten summaa – ja tulos on kokonaisluku. Viimeisten neljän numeron määrittämiseksi kirjoitetaan

$$1996^6 = (2000-4)^6 = 2^6(2-1000)^6.$$

Viimeisen termin sulkulauseke voidaan avata tunnetulla binomikaavalla:

$$2^6(2-1000)^6 = 2^6(2^6 - 6 \cdot 2^5 \cdot 1000 + \ldots),$$

missä kolme pistettä tarkoittaa, että loput termit eivät enää vaikuta neljään viimeiseen numeroon eli ovat siis luvun 10000 monikertoja. Näin ollen voimme kirjoittaa kongruenssin avulla

$$\begin{aligned}1996^6 &\equiv 2^6(2^6 - 192000) \bmod 10000\\ &\equiv 64(64 + 8000) \bmod 10000\\ &\equiv 6096 \bmod 10000,\end{aligned}$$

joten viimeiset neljä numeroa ovat 6096.

Lukiolaiselle eli aktiiviselle lukijalle hyvä harjoitustehtävä on esimerkiksi

Etsi kaikki kokonaisluvut x, jotka toteuttavat yhtälön

$$2^x(4 - x) = 2x + 4.$$

Huomaamalla jotain eksponenttifunktion perusominaisuuksista ja rationaalilausekkeen merkin vaihteluista tehtävään sopivien yritteiden määrä vähenee huomattavasti. Tehtävä ratkeaa periaatteessa lukion kahden ensimmäisen pitkän matematiikan kurssin tiedoilla, mutta kuten kilpatehtävissä yleensä, jotain on ensin hoksattava.

Aktiiviselle lukijalle jätetään seuraava haasteellisempi harjoitustehtävä.

Osoita, että jos $m \cdot s = 2000^{2001}$ (missä m ja s ovat positiivisia kokonaislukuja), niin yhtälöllä

$$mx^2 - sy^2 = 3$$

ei ole kokonaislukuratkaisuja. (Kilpailutehtävä Makedoniasta)

Ratkaisut tehtäviin esitettäneen jossain tulevassa Solmun numerossa. Toivottavasti pieni vihjeistys ei pilaa kenenkään motivaatiota käydä tehtävän kimppuun – tai jos sellainen vaara on olemassa – kannattaa hypätä vihjeiden yli seuraavaan tehtävään.

Tehtävässä ensimmäisellä yhtälöllä halutaan antaa jotain tietoa lukujen m ja s ominaisuuksista. Eksponenttien laskusäännöillä yhtälön suurehkolta vaikuttava luku on muutettavissa yhden parillisen ja yhden parittoman luvun eksponenttien tuloksi. Tällöin voidaan heti päätellä jotain tulon $m \cdot s$ – ja sitä kautta myös termien m ja s – parillisuudesta tai parittomuudesta. Näin saaduilla parillisuus/parittomuus-vaihtoehdoilla ja tehtävän toisella yhtälöllä päästään eteenpäin. Lopuksi tarvitaan vielä jaollisuustarkasteluita ja kongruenssin ominaisuuksia luvun neliölle.

Yhtälöiden käsittelyssä on usein hyödyllistä osata jakaa lauseke tekijöihin. Tästä esimerkkinä tehtävä, jonka ratkaisemisessa tulee vastaan muistisääntö summan ja erotuksen tulosta yleistetylle tapaukselle:

Onko olemassa luonnollista lukua q ja alkulukua p siten, että

$$3^p + 7^p = 2 \cdot 5^q?$$

(Kilpailutehtävä Ukrainasta)

Aluksi havaitaan, että $p = 2$ ei käy ratkaisuksi, sillä $3^2 + 7^2 = 58$, joka ei ole muotoa $2 \cdot 5^q$. Siksi p on pariton alkuluku. Jaetaan yhtälössä $3^p + 7^p$ tekijöihin seuraavasti:

$$\begin{aligned}&3^p + 7^p\\ &\quad = (3+7)(3^{p-1} - 3^{p-2} \cdot 7 + 3^{p-3} \cdot 7^2 - \dots\\ &\qquad\qquad - 3 \cdot 7^{p-2} + 7^{p-1})\\ &\quad = 2 \cdot 5^q.\end{aligned}$$

Koska $3 + 7 = 2 \cdot 5$, täytyy päteä

$$3^{p-1} - 3^{p-2} \cdot 7 + 3^{p-3} \cdot 7^2 - \dots - 3 \cdot 7^{p-2} + 7^{p-1} = 5^{q-1}.$$

Lisäksi koska $3 \equiv -2 \bmod 5$ ja $7 \equiv 2 \bmod 5$, kongruenssin laskusäännöillä pätee

$$\begin{aligned}&3^{p-1} - 3^{p-2} \cdot 7 + 3^{p-3} \cdot 7^2 - \dots - 3 \cdot 7^{p-2} + 7^{p-1}\\ &\quad \equiv 2^{p-1} + 2^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + 2^{p-1} + 2^{p-1}\\ &\quad \equiv p \cdot 2^{p-1} \bmod 5.\end{aligned}$$

Edellä etumerkit saadaan luvun p parittomuudesta. Yhdistämällä saadut tulokset havaitaan, että

$$5^{q-1} \equiv p \cdot 2^{p-1} \bmod 5,$$

mikä tarkoittaa, että

$$p \cdot 2^{p-1} \equiv 0 \bmod 5.$$

Tähän ainoa vaihtoehto on $p = 5$. Se ei kuitenkaan toteuta yhtälöä, joten ei löydy tehtävän toteuttavia p ja q.

Matematiikasta kiinnostuneelle aktiiviselle lukiolaiselle kilpatehtävien parissa puuhastelu on todella suositeltavaa, sillä kyseiset tehtävät, paitsi antavat vaihtelun tuntua mekaaniselle harjoittelulle, avaavat myös matematiikan rakennetta ymmärrettäväksi tehokkaalla tavalla.

Avoimia matematiikan oppikirjoja verkossa

Osoitteesta `http://avoinoppikirja.fi` löytyy avoimia yläkoulun ja lukion matematiikan oppikirjoja.