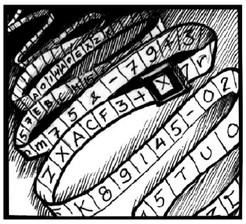

Sumeaa logiikkaa lukiolaisille

Saku Snicker
Helsingin yliopisto

Johdanto

Sumealla logiikalla voidaan tarkoittaa periaatteessa kahta eri asiaa. Toisaalta se viittaa erääseen tiettyyn ei-klassiseen matemaattiseen formaaliin logiikkaan; toisaalta sillä viitataan kaikkeen matematiikkaan, mikä liittyy sumeuteen. Lieneekin paikallaan korostaa heti aluksi, että tässä kirjoituksessa tulemme käyttämään ensimmäistä tulkintaa: esittelemme lyhyesti lähinnä sumean propositiologiikan perusteet. Jälkimmäisen tulkinnan käytön puolesta on tosin puhunut voimakkaasti ”sumean logiikan isä” yhdysvaltalainen matematikko Lotfi A. Zadeh, joka itse asiassa aloittikin teoriansa rakentamisen sumeasta joukko-opista.

Mistä tässä sumeudessa sitten on kyse? Lyhyesti sanottuna kyse on jonkinlaisesta epämääräisyydestä, joka eri matematiikan osa-alueilla tulkitaan eri tavoin. Esimerkkinä voitaisiin tarkastella seuraavaa kysymystä joukko-opin alalta: kuuluuko elokuu kesäkuukausien joukkoon? Klassisen, naiivin joukko-opin mukaan joukko on hyvinmääritelty, mikäli jokaisesta oliosta voidaan sanoa, kuuluuko se tähän joukkoon vai ei, mutta kumpikaan näistä vaihtoehdoista ei elokuun tapauksessa oikein tunnu täysin oikealta. Sumea ajattelu pyrkii antamaan vastauksia tämänkaltaisiin ongelmiin.

Sumean ajattelun historia ulottuu antiikin Kreikkaan asti. Tutkielmassaan *De Interpretatione* Aristoteles pohti, onko väite ”Huomenna tulee olemaan meritaistelu” tosi vai epätosi tänään. Jos väite olisi tosi, niin tällöin huomenna tosiaankin aivan varmasti tapahtuisi meritaistelu, minkä hyväksyminen tänään tuntuu epämielekkäältä. Samoin väitteen sanominen epätodeksi tarkoittaisi, että huomenna ei missään nimessä tapahtuisi meritaistelua, mikä tuntuu sekin tänään kovin kummalliselta päätelmältä. Totuuden ja epätotuuden väliin sijoittuu siis eräänlainen harmaa alue, jonka tutkimisessa kunnostautunein henkilö lienee puolalainen matemaatikko Jan Łukasiewicz (1878–1956). Łukasiewicz kehitteli muun muuassa niin sanotun kolmiarvologiikan, jossa totuusarvojen ”tosi” ja ”epätosi” lisäksi otetaan käyttöön kolmas totuusarvo eli ”määräämätön”. Myöhemmin Łukasiewicz yleisti tämän idean useammallekin kuin kolmelle totuusarvolle, ja näitä logiikoita kutsutaankin Łukasiewiczin moniarvologiikoiksi.

Kuten jo aikaisemmin mainittiin, varsinaisena sumean ajattelun kehittäjänä pidetään kuitenkin yhdysvaltalaista matemaatikkoa Lotfi A. Zadehia. Kuuluisassa julkaisussaan ”Fuzzy Sets” [1] Zadeh esitteli ensimmäistä kertaa epämääräisen eli sumean joukon käsitteen. Kriitikot ovat tosin jälkikäteen epäilleet [2], että Zadeh sai kunnian sumean ajattelun keksimisestä lähinnä siksi, että hän keksi antaa artikkelilleen mielenkiintoisen nimen: ”Min- ja max-operaatioiden käytöstä reaalisen yksikkövälin osavälien käsittelyssä” olisi todennäköisesti hautautunut tieteellisten artikkelien harmaaseen massaan. Itävaltalainen matemaatikko Karl Menger oli esimerkiksi jo vuonna 1951 konstruoinut sumean relaation käsitteen idean, mutta hän ei sattunut käyttämään siitä nimitystä ”sumea relaatio”. 1980-luvun lopulla sumea ajattelu löi itsensä lopullisesti läpi muunakin kuin akateemisena näpertelynä, kun Yhdysvalloissa herättiin huomaamaan, että japanilaiset tienasivat sumean ajattelun sovelluksilla melkoisen määrän rahaa. Nykyisin sumeaa logiikkaa käytetäänkin hyvin monissa systeemeissä: esimerkiksi kameroissa, pölynimureissa, pesukoneissa, ilmastoinnin säädössä, autoissa, lentokoneissa ja jopa avaruusaluksissa.

Kuriositeettina mainittakoon, että suomenkielisen termin ”sumea” keksi Turun yliopiston apulaisprofessori Markku I. Nurminen. Hän sai idean ajatellessaan, että valomerkin jälkeen turkulaisesta opiskelijoiden ja taiteilijoiden suosiossa olevasta ravintola Hämeenportista astuu kaupungille sumea joukko.

Klassista propositiologiikkaa

Käsitellään aluksi klassista logiikkaa. Logiikan aivan perustavin käsite on *lause* eli väittämä. Ehkäpä yksinkertaisin esimerkki lauseista on niin sanotun *propositiologiikan* lauseet eli *propositiolauseet*. Intuitiivisesti sanottuna propositiolauseet ovat väittämiä, jotka ilmaisevat, miten jotkin asiat ovat, ja joiden voidaan ajatella olevan aina joko totta tai epätotta. Tarkalleen ottaen propositiolauseet voidaan määritellä seuraavasti: yksinkertaisimpia propositiolauseita ovat *propositiosymbolit* $p_0, p_1, p_2, \ldots$, joita myös atomilauseiksi kutsutaan. Nämä ovat propositiolauseita, jotka on muodostettu ilman sidossanojen, kuten ”ja”, ”tai” ja ”jos... niin”, käyttöä. Esimerkiksi ”$6 > 2$” ja ”Kuu on juustoa” ovat siis atomilauseita, joista ensimmäinen on totta ja jälkimmäinen epätotta. Sen sijaan ”Olkoon x reaaliluku”, ”Lupaan käydä kaupassa huomenna”, ”Ostin kaupasta maitoa ja maksoin sen käteisellä” ja ”Äygäbäy 1927566688” eivät ole propositiologiikan atomilauseita (miksi?).

Alla olevia symboleita puolestaan kutsutaan *konnektiiveiksi*. Niiden avulla saadaan mukaan propositiolauseisiin myös mm. edellämainittuja ”ja”, ”tai” ja ”jos... niin” -rakenteita sisältävät lauseet:

- $\neg$ negaatio (vastaa ei-sanaa, eli väite ei päde)
- $\wedge$ konjunktio (vastaa ja-sanaa, eli molemmat väitteet pätevät)
- $\vee$ disjunktio (vastaa tai-sanaa, eli ainakin toinen väitteistä pätee)
- $\rightarrow$ implikaatio (jos ensimmäinen väite pätee, niin toinen väite pätee)
- $\leftrightarrow$ ekvivalenssi (molemmat väitteet joko pätevät tai eivät päde).

Propositiosymbolien ja konnektiivien avulla voidaan nyt määritellä induktiivisesti kaikki propositiolauseet.

Määritelmä 1. ***Propositiolauseiksi*** *sanotaan seuraavien sääntöjen avulla propositiosymboleista, konnektiiveista sekä sulkumerkeistä ”(” ja ”)” muodostettuja merkkijonoja:*

1. *Propositiosymbolit* $p_0, p_1, p_2, \ldots$ *ovat propositiolauseita.*
2. *Mikäli merkkijonot A ja B ovat propositiolauseita, niin merkkijonot $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ ja $(A \leftrightarrow B)$ ovat propositiolauseita.*

Esimerkki 1. *Olkoon p_0 atomilause ”On syksy”, p_1 atomilause ”Sataa vettä” ja p_2 atomilause ”Puiden lehdet putoavat”. Lause ”Ei ole syksy” voidaan nyt formalisoida merkinnällä $\neg p_0$, ja lause ”Jos on syksy, niin sataa vettä ja puiden lehdet putoavat” voidaan formalisoida merkinnällä $(p_0 \rightarrow (p_1 \wedge p_2))$.*

Atomilauseiden totuus riippuu tietysti monesta asiaintilasta. Tätä tekstiä kirjoittaessa Helsingissä sataa, joten edellisen esimerkin atomilause p_1 on tällä hetkellä totta. Mutta jos atomilauseiden totuus tiedetään, niin miten päätellään muiden propositiolauseiden totuus? Tähän tarvitaan totuusjakauman ja totuusarvojen käsitteitä. Merkitsemme seuraavassa totuutta numerolla 1 ja epätotuutta numerolla 0.

Määritelmä 2. ***Totuusjakauma*** *on mikä tahansa funktio $v : \mathbb{N} \rightarrow \{0{,}1\}$. Propositiolauseen A* ***totuusarvo jakaumalla*** *v, merkitään $v[A]$, määritellään seuraavasti:*

1. $v[p_n] = v(n)$ *kaikilla* $n \in \mathbb{N}$
2. $v[\neg A] = 0$, *mikäli* $v[A] = 1$, *ja* $v[\neg A] = 1$, *mikäli* $v[A] = 0$
3. $v[(A \wedge B)] = 1$, *jos sekä* $v[A] = 1$ *että* $v[B] = 1$, *muutoin* $v[(A \wedge B)] = 0$
4. $v[(A \vee B)] = 1$, *jos* $v[A] = 1$ *tai* $v[B] = 1$, *muutoin* $v[(A \vee B)] = 0$
5. $v[(A \rightarrow B)] = 1$, *jos* $v[A] = 0$ *tai* $v[B] = 1$, *muutoin* $v[(A \rightarrow B)] = 0$
6. $v[(A \leftrightarrow B)] = 1$, *jos* $v[A] = v[B]$, *muutoin* $v[(A \leftrightarrow B)] = 0$.

Totuusjakauma siis määrää suoraan, mitkä atomilauseista p_n ovat totta ja mitkä ei. Monimutkaisempien lauseiden totuudet päätellään edellisten sääntöjen avulla, ja ne on näppärä esittää taulukoiden eli niin sanotuilla *totuustauluilla*. Edellisen määritelmän perusteella totuustaulut konnektiiveille näyttävät seuraavilta:

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$(A \wedge B)$	$(A \vee B)$	$(A \rightarrow B)$	$(A \leftrightarrow B)$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Sumeaa propositiologiikkaa

Vaikka edellä esitellyllä propositiolauseen käsitteellä voidaankin jo ilmaista monia asioita, on se silti suhteellisen rajoittunut. Esimerkkinä voitaisiin tarkastella mukaelmaa johdantokappaleen esimerkistä: onko väite ”Elokuu on kesäkuukausi” propositiolause, eli toisin sanoen voidaanko sanoa, että se olisi joko tosi tai epätosi? On vaikea päättää yksikäsitteisesti, pitääkö edellinen väite paikkansa vai ei, joten näinkin yksinkertainen lause joudutaan hylkäämään propositiologiikan lauseiden joukosta.

Sumean logiikan yleistys propositiologiikkaan on kaikessa yksinkertaisuudessaan seuraavanlainen: *sumeiden propositiolauseiden* totuusarvojen ei vaaditakaan olevan diskreetisti joko 0 tai 1, vaan ne voivat olla mitä tahansa suljetulta väliltä $[0,1]$. Siis *sumea totuusjakauma* on mikä tahansa funktio $u : \mathbb{N} \rightarrow [0,1]$.

Esimerkki 2. *Merkitaan väitteitä ”Heinäkuu on kesäkuukausi”, ”Elokuu on kesäkuukausi” ja ”Syyskuu on kesäkuukausi” symboleilla p_0, p_1 ja p_2. Eräs mahdollisuus määritellä näille väitteille sopiva sumea totuusjakauma u on määritellä $u(0) = 1$, $u(1) = 0{,}7$ ja $u(2) = 0{,}3$.*

Edellisessä esimerkissä tulee esiin hyvin sumean ajattelun eräs ominaispiirre: sen mukanaan tuoma epämääräisyys on aina subjektiivista. Voisihan joku olla vaikkapa sitä mieltä, että väite ”Elokuu on kesäkuukausi” on täysin totta – tai että sen totuusarvon tulisi olla pienempi kuin 0,7. Tietysti selvissä tilanteissa, kuten ”Heinäkuu on kesäkuukausi” tai ”Tammikuu on kesäkuukausi”, totuusarvo on helppo antaa, mutta näin on asiain laita myös klassisessa logiikassa: sumea logiikka antaakin edes jonkinlaisen viitekehyksen tarkastella niitä tilanteita, jotka eivät ole äkkiseltään niin selviä.

Koska eri totuusarvoja eli välin $[0,1]$ pisteitä on ääretön määrä, käy konnektiivien totuusarvojen esittäminen totuustauluilla hieman hankalaksi. Tarvitaankin siis vähän näppärämpi tapa määritellä esimerkiksi negaation totuusarvo tai kahden propositiolauseen konjunktion ja disjunktion totuusarvo. Tämä tehdään seuraavasti:

Määritelmä 3. *Olkoot A ja B sumeita propositiolauseita, joilla $u[A] = a$ ja $u[B] = b$. Tällöin määritellään*

1. $u[\neg A] = 1 - a$

2. $u[(A \wedge B)] = \min\{a, b\}$

3. $u[(A \vee B)] = \max\{a, b\}$.

Idea määritelmissä on se, että ne toimivat normaalisti klassisessa tapauksessa, jossa propositiolauseet ovat joko täysin totta tai täysin epätotta. Jos esimerkiksi sumea propositiolause A on täysin totta (eli $u[A] = 1$) ja sumea propositiolause B on täysin epätotta (eli $u[B] = 0$), niin $u[(A \wedge B)] = \min\{1, 0\} = 0$, joten sumea propositiolause $(A \wedge B)$ on täysin epätotta – kuten klassisen propositiologiikan nojalla pitääkin. Samoin nähdään, että tässä tapauksessa sumea propositiolause $(A \vee B)$ on täysin totta.

Itse asiassa on olemassa vieläkin yleisempi tapa määritellä negaation, konjunktion ja disjunktion totuusarvot. Tämä toteutuu niin sanottujen *yleisten negaatioiden*, *t-normien* ja *s-normien* avulla. Niiden tulee käyttäytyä klassisessa tapauksessa kuten klassisten vastineidensa, ja lisäksi niiltä vaaditaan myös joitakin muita ominaisuuksia. Emme kuitenkaan perehdy tähän sen enempää.

Lukijalle herännee seuraavaksi mieleen kysymys, miten implikaation ja ekvivalenssin totuusarvot määräytyvät sumeassa logiikassa. Valitettavasti asia ei ole niiden tapauksessa yhtä helppoa. Vaikka olisimme valinneet konjunktiota ja disjunktiota vastaaviksi t-normiksi ja s-normiksi minimin ja maksimin, niin jää silti monta erilaista epäyhtäpitävää mutta silti järkevää tapaa määritellä sumea implikaatio. Monet näistä määritelmistä perustuvat ideaan, jossa pyritään löytämään jokin toinen propositiolause, jolla on klassisessa propositiologiikassa kaikilla mahdollisilla totuusjakaumilla sama totuusarvo kuin implikaatiolla $(A \rightarrow B)$. Tällaisia ovat esimerkiksi propositiolauseet $(\neg A \vee B)$ ja $((A \wedge B) \vee \neg A)$: ensimmäistä vastaavuutta käyttäen muodostettua implikaatiota kutsutaan *Łukasiewiczin implikaatioksi*, ja jälkimmäisen avulla muodostettua implikaatiota kutsutaan *Zadehin implikaatioksi*.

Lopuksi

Kuten johdannossa mainittiin, edellisessä kappaleessa esitelty klassisten käsitteiden sumentaminen on mahdollista tehdä monella eri matematiikan alalla. Ehkäpä tunnetuin näistä on joukko-oppi, jossa sumentaminen toteutetaan siten, että alkio voi kuulua joukkoon myös osittain: sen niin sanotun *jäsenyysfunktion* arvo voi siis olla mitä tahansa väliltä $[0,1]$, jossa jäsenyysfunktion arvo 0 vastaa tilannetta, jossa alkio ei kuulu joukkoon lainkaan, ja jäsenyysfunktion arvo 1 vastaa tilannetta, jossa alkio kuuluu joukkoon täysin. Klassisen joukko-opin tulokset, kuten myös klassisen logiikan tulokset, yleistyvät suurilta osin sumeaan joukko-oppiin ja sumeaan logiikkaan. Poikkeuksiakin kuitenkin on: esimerkiksi klassisilla joukoilla pätevä laki $A \cap \complement A = \emptyset$ ei päde sumeilla joukoilla. Sumeassa logiikassa tämä vastaa sitä tilannetta, että propositiolause $(A \wedge \neg A)$ ei olekaan niin sanottu *ristiriita* eli propositiolause, jonka totuusarvo on 0 kaikilla totuusjakaumilla. Asiasta kiinnostuneille mainittakoon, että lähteessä [2] on esitetty kattavasti ja selkeästi myös sumean joukko-opin perusteet. Lisäksi se sisältää mainion ja laajan kirjallisuusluettelon, josta löytää lisälukemista yleisistä sumean logiikan oppikirjoista sumeaan differentiaalilaskentaan.

Monet ovat kritisoineet sumeaa ajattelua siitä, että siinä ei ole itse asiassa kyse mistään muusta kuin todennäköisyyslaskennasta uudelleen formalisoituna. Asia ei ole kuitenkaan näin yksinkertainen, sillä on olemassa monenlaista muutakin epämääräisyyttä kuin satunnaisuuden määräämää stokastisuutta. Esimerkit meritaistelusta ja kesäkuukausista ovat siinä mielessä huonoja, että niiden epämääräisyys liittyy satunnaisuuteen: voidaan ajatella, että meritaistelu tapahtuu tietyllä todennäköisyydellä, ja että elokuu on kesäkuukausi tietyllä todennäköisyydellä. Parempi esimerkki puhtaasta sumeudesta olisikin seuraava: onko 180 cm pitkä ihminen kookas vai ei? Kysymys on taas selvästi käsitteen "kookas" subjektiivisesta epämääräisyydestä eli sumeudesta, mutta nyt sumeus ei esimerkiksi selkene ajan kanssa. Ei ole kovinkaan järkevää esimerkiksi ajatella, että tänään 180 cm pitkä ihminen voisi olla kookas, mutta huomenna jollakin tietyllä todennäköisyydellä näin ei olisi.

Kaiken kaikkiaan sumean ajattelun voitaneen kuitenkin sanoa olevan melko kätevä tapa kuvata ihmisten luontaista ajattelutapaa. Ihmiselämässä kun asiat ovat harvoin täysin mustavalkoisia.

Kiitokset vielä Kaarlo Reippaalle mainiosta klassisen logiikan oppimateriaalista, jota on käytetty apuna tämän kirjoituksen klassisen logiikan osion kirjoittamisessa.

Viitteet

[1] Lotfi A. Zadeh, 1965, Fuzzy sets, *Information and Control*, v. 8.

[2] Jorma K. Mattila, *Sumean logiikan oppikirja,* 2. painos, Art House, Hakapaino Oy, Helsinki, 1998.

Kilpailumatematiikan opas ilmestynyt

Suomen matemaattisen yhdistyksen Valmennusjaosto on julkaissut 108-sivuisen Kilpailumatematiikan oppaan. Kirjassa esitellään tiiviisti mutta melko kattavasti niitä matematiikan alueita, joilta erilaisten matematiikan koululaiskilpailujen tehtävät yleensä valitaan. Nämä alueet, algebra, geometria, lukuteoria ja kombinatoriikka eivät ole erityisen vahvasti esillä peruskoulun ja lukion matematiikanopetuksessa, ei myöskään täsmällinen matemaattinen todistaminen. Ainakin erilaisiin kansainvälisiin matematiikkakilpailuihin osallistujan olisi tutustuttava melko laajaan nykyisen koulumatematiikan ulkopuolelle jäävään matematiikan kenttään. Kilpailumatematiikan opas antaa ensimmäisen kerran mahdollisuuden aloittaa tämä tutustuminen suomen kielellä.

Teknologiateollisuuden 100-vuotissäätiön Valmennusjaostolle myöntämä apuraha tekee mahdolliseksi toistaiseksi jakaa opasta tarvitsijoille maksutta. Opasta voi tilata Matti Lehtiseltä, matti.lehtinen@helsinki.fi. Opas on myös vapaasti ladattavissa Valmennusjaoston verkkosivuilta osoitteesta

`http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/kirjallisuus/kilpmatopas.pdf`